Примеры решения задач ТОЭ ч. 3

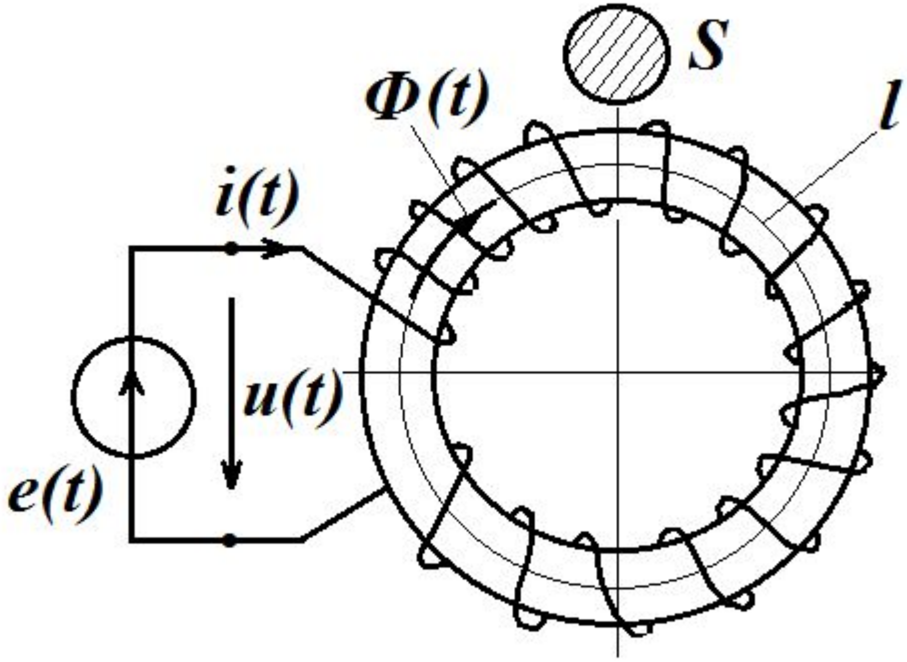
Катушка со сталью

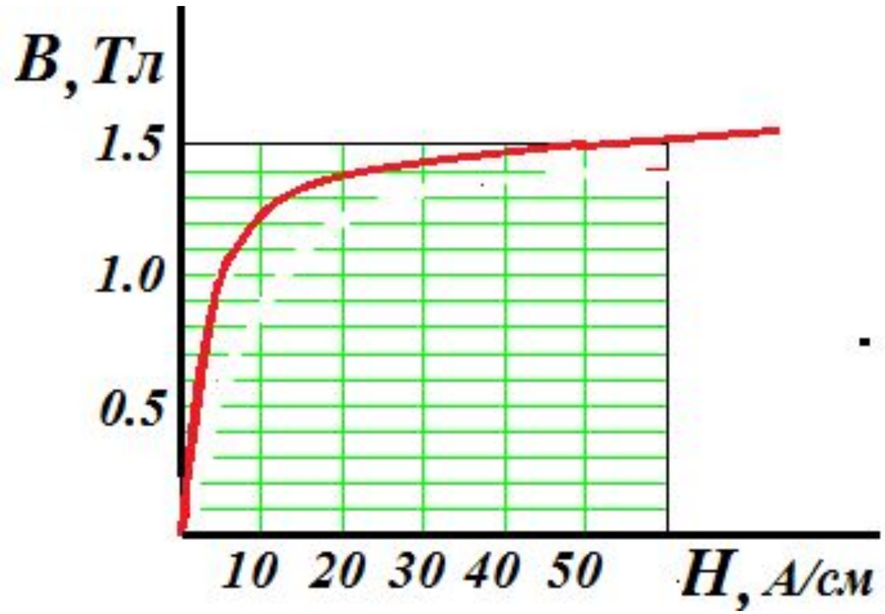
задача 1

Для катушки со стальным сердечником задано:

$$u(t) = 130\cos(\omega t) \quad B \qquad S = 25 \quad см^2 \quad l = 50 \quad см \quad w = 100 \qquad f = 50 \quad Гц$$

Кривая намагничивания ферромагнитного сердечника представлена в виде





Построить график зависимости тока в катушке от времени. Найти амплитуду тока.

Решение

Напряжение на входе катушки и магнитный поток в сердечнике связаны уравнением

$$u(t) = w\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{U_m}{w\omega}\sin(\omega t) \qquad \omega = 2\pi f = 314 \quad \frac{1}{c}$$

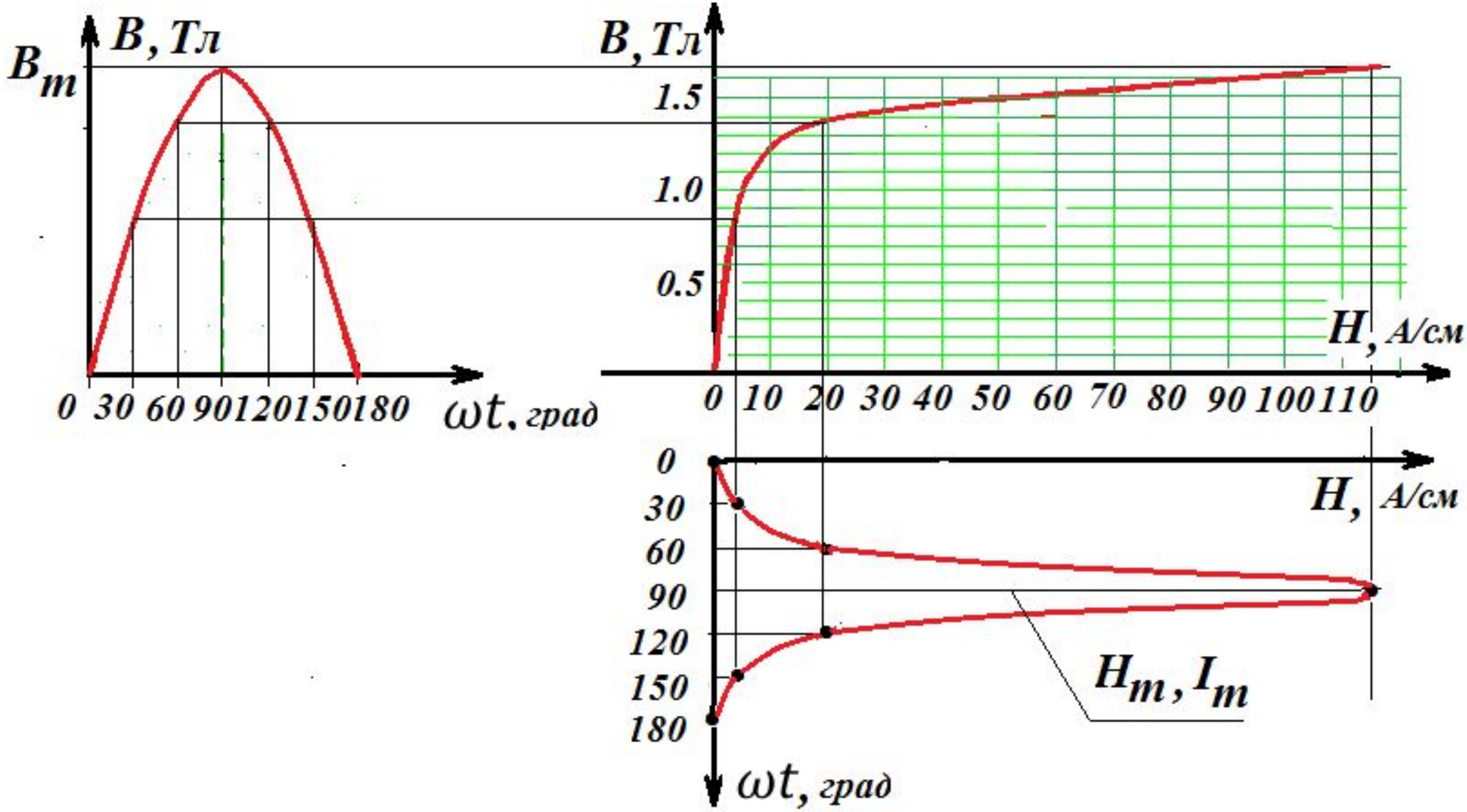
$$\Phi_m = \frac{U_m}{w\omega} = \frac{130}{100\cdot 314} = 4.14\cdot 10^{-3} \quad Вб \qquad B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{4.14\cdot 10^{-3}}{25\cdot 10^{-4}} = 1.656 \quad Тл$$

$$B(t) = B_m\sin(\omega t) = 1.656\sin(\omega t) \quad Тл$$

Дальнейшие расчеты проводятся графически. Из графических построений следует:

$$H_m = 115 \quad А/см \Rightarrow I_m = \frac{H_m l}{w} = \frac{115\cdot 50}{100} = 57.5 \quad А$$

Амплитуда тока определяется по закону полного тока



B, Тл
B_m
0 30 60 90 120 150 180
ωt, град
B, Тл
1.5
1.0
0.5
H, А/см
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110
0
30
60
90
120
150
180
H, А/см
H_m, I_m
ωt, град

задача
2

На стальном сердечнике с сечением $S = 10 \quad см^2$

длиной средней линии $l = 50 \quad см$

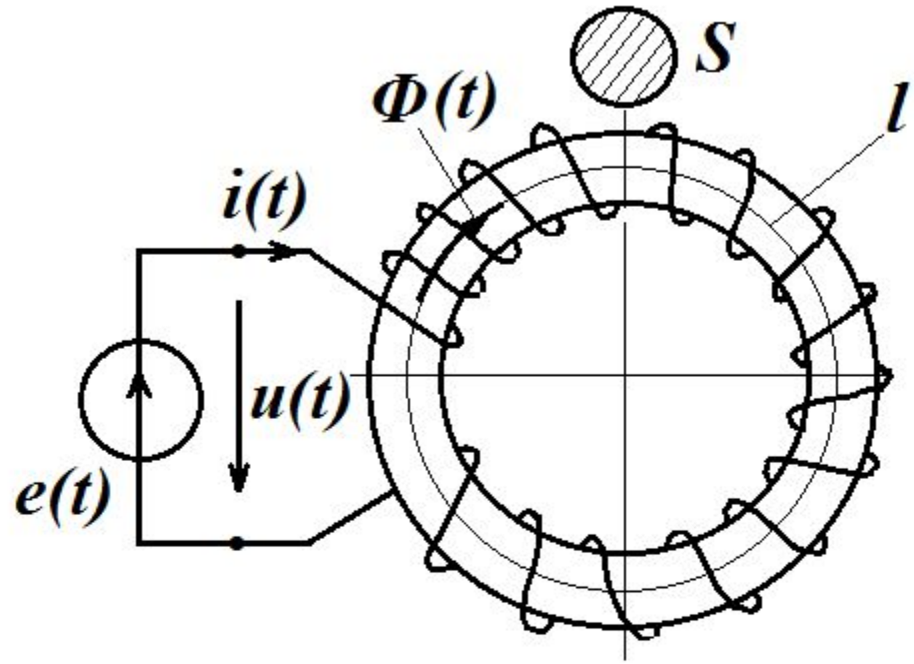
расположена обмотка $w = 4000$

По ней протекает синусоидальный ток $I_m = 15 \quad A$ частотой $f = 50 \quad Гц$

Кривая намагничивания ферромагнитного сердечника представлена в виде таблицы

$B, Тл$	0	1	1,25	1,4	1,5
$H, A/см$	0	200	400	800	1500

Построить график зависимости напряжения на зажимах катушки от времени. Найти амплитуду этого напряжения.



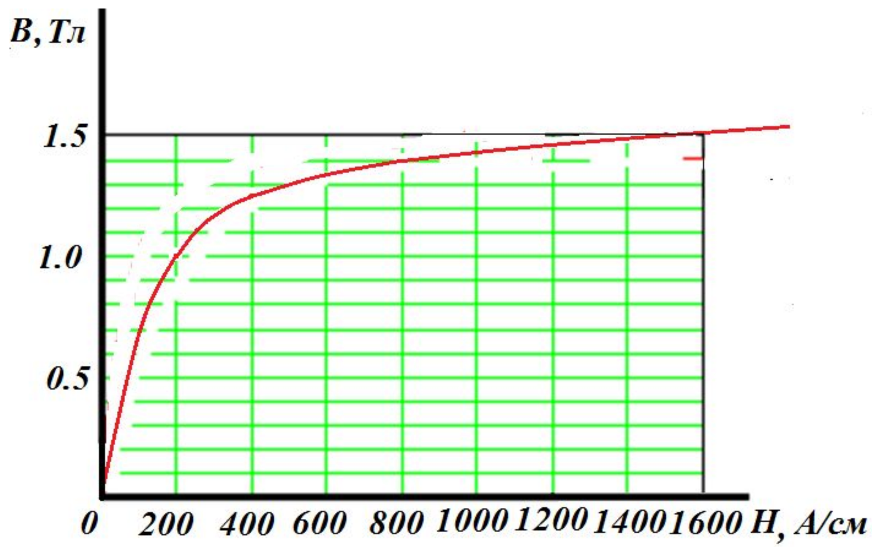
Решени
е

По закону полного тока

$$i(t)w = H(t)l \Rightarrow H(t) = \frac{i(t)w}{l} = 15\sin(\omega t)\cdot\frac{4000}{50} = 1200\sin(\omega t)$$

$$H_m = 1200 \quad A/см$$

По таблице строится график кривой намагничивания



Дальнейшие расчеты проводятся графически. Из графических построений следует:

$$\text{При}\ \omega t = 30^o\ H = 600 \quad A/\text{см} \Rightarrow B_m = 1.35 \quad \text{Тл}$$

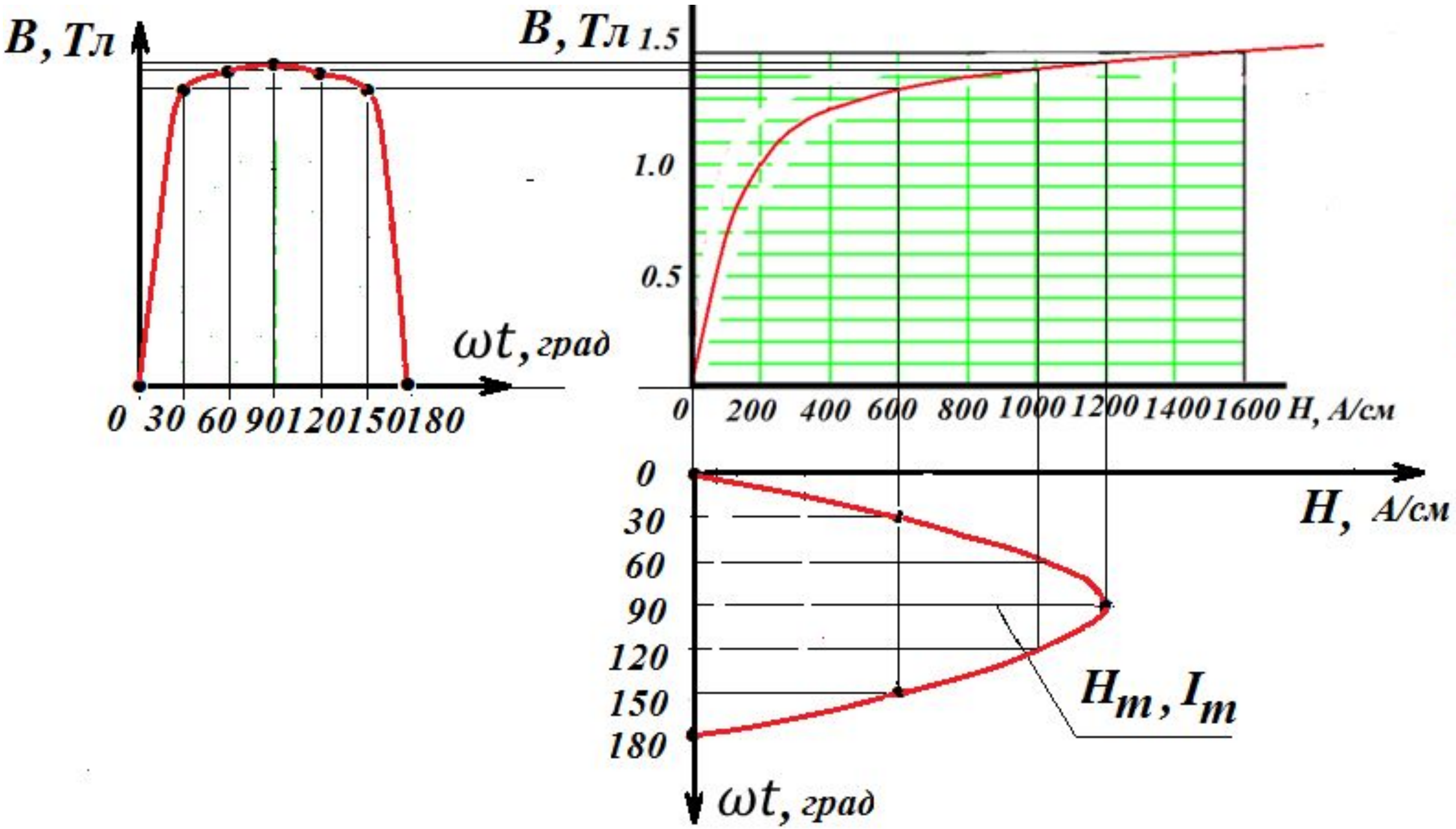
$$\Phi = BS = 1.35 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \quad \text{Вб}$$

$$\text{При}\ \omega t = 60^o\ H = 1040 \quad A/\text{см} \Rightarrow B_m = 1.43 \quad \text{Тл}$$

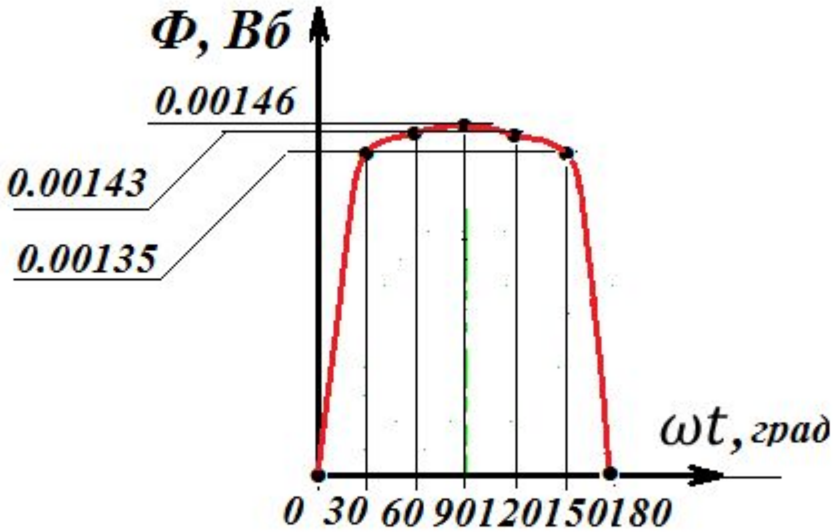
$$\Phi = BS = 1.43 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \quad \text{Вб}$$

$$При\,\omega t = 90^o\; H = 1200 \quad A/см \Rightarrow B_m = 1.46 \quad Тл$$

$$\Phi = BS = 1.46 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \quad Вб$$

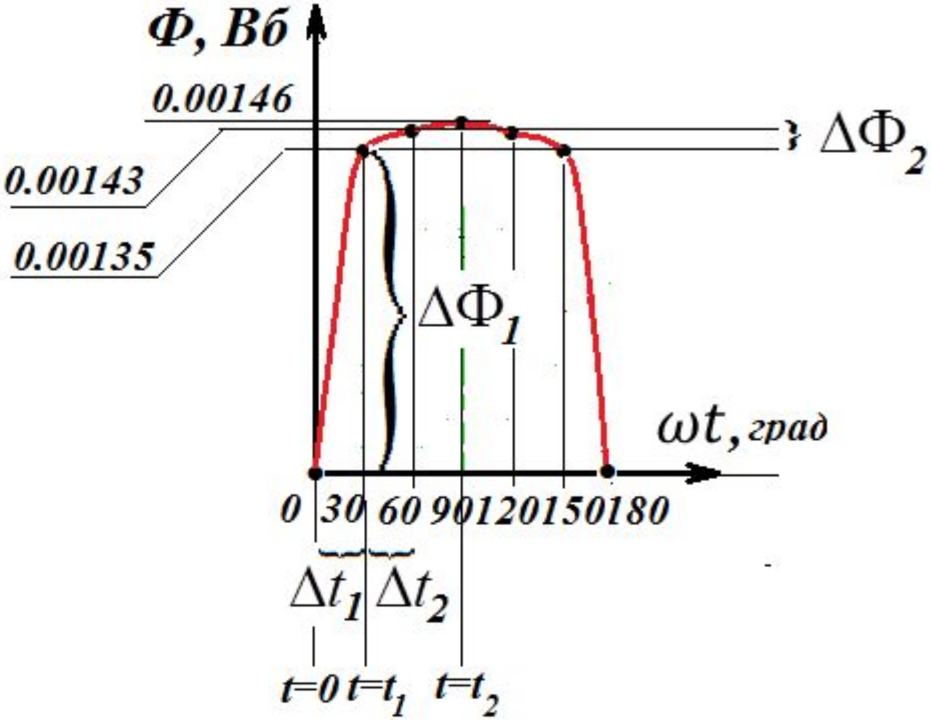


По результатам графических расчетов строится график зависимости магнитного потока сердечника от времени



Напряжение можно рассчитать используя выражение

$$u(t) = w\frac{d\Phi}{dt} \approx w\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$



$$\Delta t_1 = \frac{T}{12} = \frac{0.02}{12} \quad c$$

$$u(0) \approx w\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t_1} = 4000\frac{0.00135}{\frac{0.02}{12}} = 3240 \quad B$$

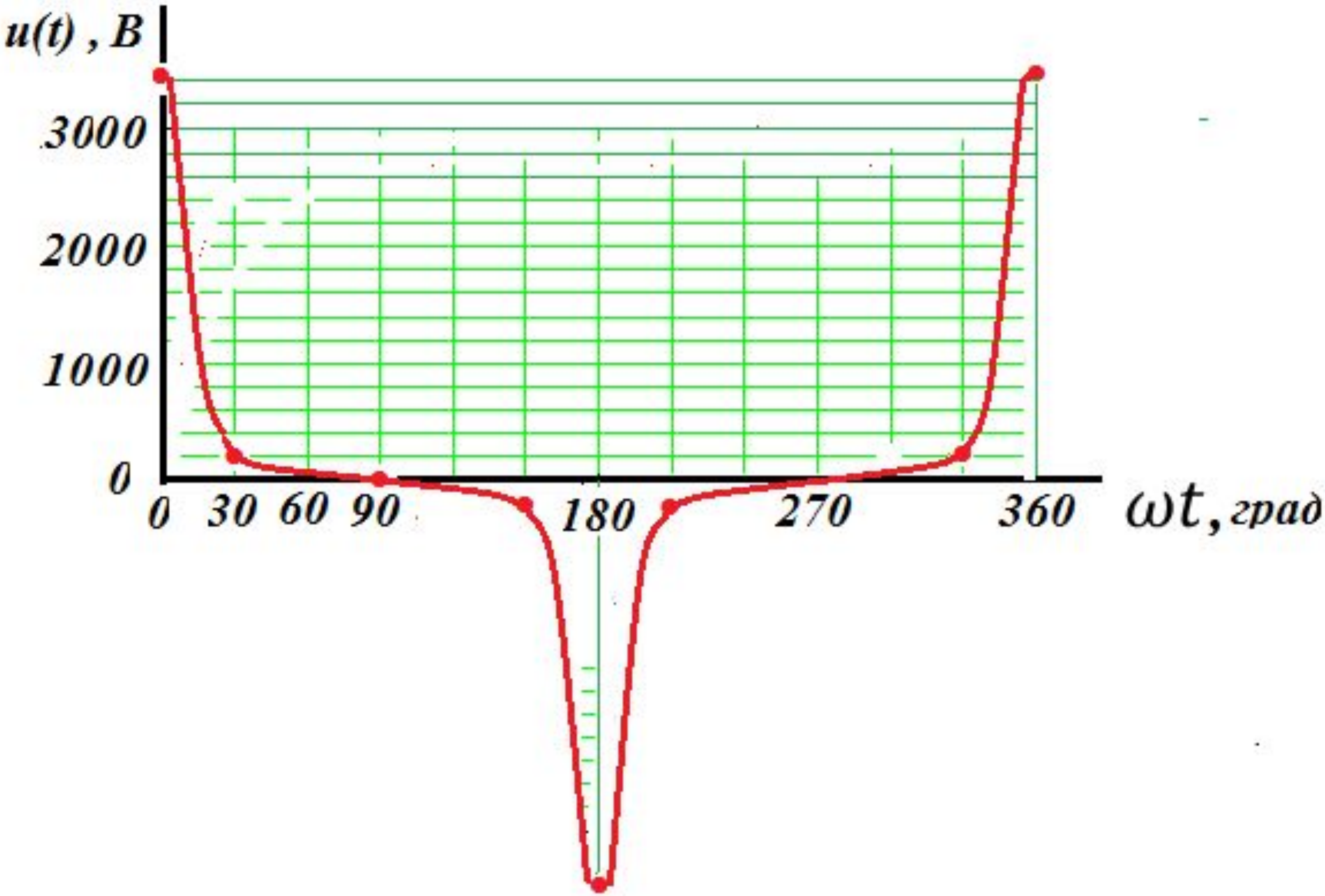
$$u(t_1) \approx w\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t_2} = 4000\frac{0.00143-0.00135}{\frac{0.02}{12}} = 192 \quad B$$

$$u(t_2) = 0$$

Амплитуда напряжения равна

$$U_m = 3240 \quad B$$

По результатам графических расчетов строится график зависимости напряжения от времени



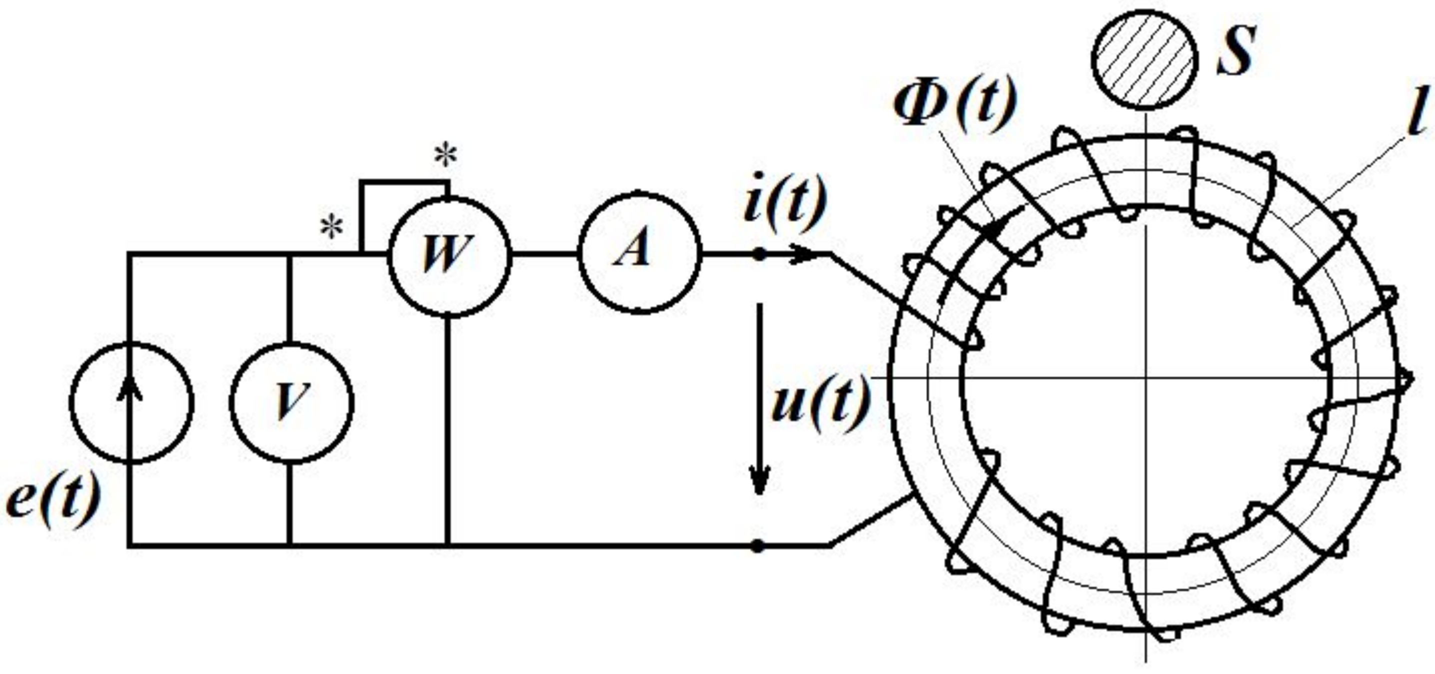
задача 3

Катушки с ферромагнитным сердечником питается от источника синусоидального напряжения. Активное сопротивление обмотки $r = 4.36 \quad Ом$

Определить параметры схемы замещения катушки R_0, X_0

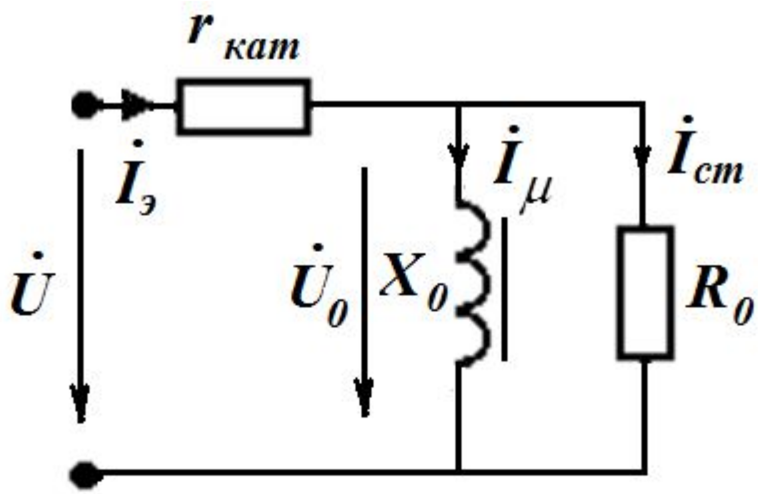
если известны показания приборов

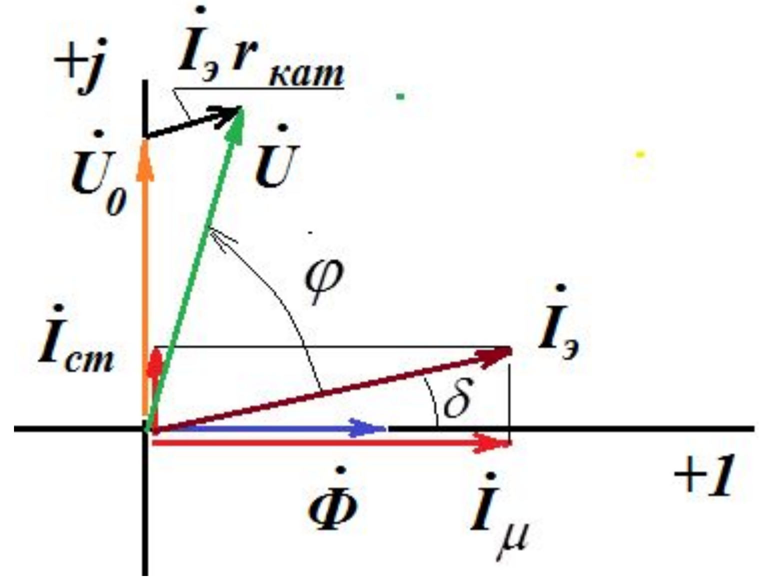
$$P_w = 5.26 \quad Вт \quad U_v = 10 \quad В \quad I_A = 1 \quad A$$



решение

Схема замещения катушки со сталью и векторная диаграмма к ней имеют вид





Из схемы замещения следует, что активная мощность показываемая ваттметром складывается из мощности, выделяющейся в проводах обмотки ($r_{обм}$) , и мощности потерь в стали (в сердечнике катушки)- R_0 .

$$P_{обм} = I_A{}^2 r = 1^2 \cdot 4.36 = 4.36 \quad Вт \qquad P_{ст} = P_w - P_{обм} = 5.26 - 4.36 = 0.9 \quad Вт$$

Напряжение на сопротивлении обмотки

$$U_{обм} = I_A r = 1 \cdot 4.36 = 4.36 \quad В$$

Напряжение U_0 можно определить, используя векторную диаграмму. Треугольник напряжений можно приблизительно принять прямоугольным, тогда

$$U_0 = \sqrt{U_v{}^2 - U_{обм}{}^2} = \sqrt{10^2 - 4.36^2} = 9 \quad B$$

По мощности в стали можно определить ток $I_{ст}$

$$I_{ст} = \frac{P_{ст}}{U_0} = \frac{0.9}{9} = 0.1 \quad A$$

Используя векторную диаграмму можно определить ток намагничивания I_μ

$$I_\mu = \sqrt{I_A{}^2 - I_{ст}{}^2} = \sqrt{1^2 - 0.1^2} = 0.995 \quad A$$

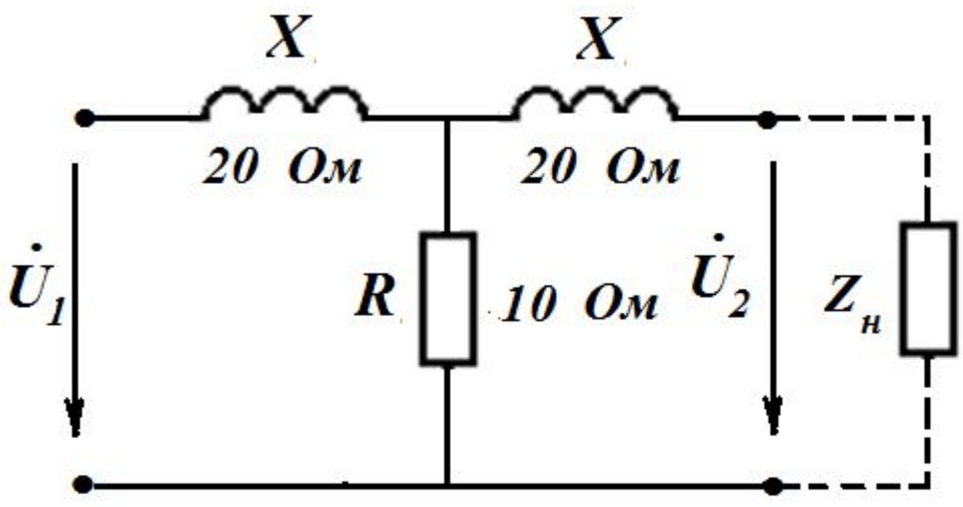
Параметры схемы замещения

$$R_0 = \frac{U_0}{I_{ст}} = \frac{9}{0.1} = 90 \quad Ом \qquad X_0 = \frac{U_0}{I_\mu} = \frac{9}{0.995} = 9.045 \quad Ом$$

Четырехполюсники

задача 1

Определить сопротивление нагрузки ЧТП при согласованном режиме его работы



решение

По определению при согласованном режиме работы ЧТП сопротивление нагрузки должно равняться характеристическому сопротивлению ЧТП

$$Z_н = Z_c$$

$$Z_c = \sqrt{Z_{xx} Z_{кз}}$$

Входное сопротивление ЧТП в режиме холостого хода равно

$$Z_{xx} = R + jX = 10 + j20$$

Входное сопротивление ЧТП в режиме короткого замыкания равно

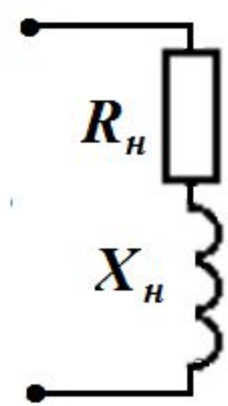
$$Z_{кз} = jX + \frac{R \cdot jX}{R + jX} = j20 + \frac{10 \cdot j20}{10 + j20} = 8 + j24$$

следователь
но

$$Z_c = \sqrt{Z_{xx} Z_{кз}} = \sqrt{(10 + j20)(8 + j24)} = \sqrt{-400 + j400} =$$

$$= \sqrt{565.7 e^{j135^o}} = 23.8 e^{j67.5^o} = 9.1 + j22$$

Таким образом нагрузка ЧТП в согласованном режиме представляет собой активно
индуктивное сопротивление



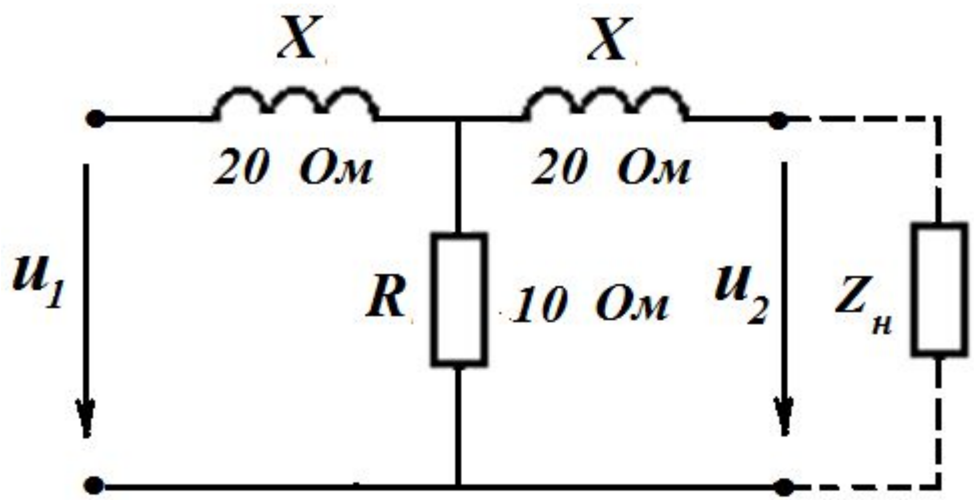
$$R_н = 9.1 \quad Ом$$

$$X_н = 22 \quad Ом$$

задача 2

Определить мгновенное значение синусоидального напряжения на нагрузке ЧТП, нагруженного согласованно, если входное напряжение равно

$$u_1(t) = 100\sin(\omega t + 100^o)$$



решение

Для решения воспользуемся характеристической постоянной передачи ЧТП

$$g_c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\dfrac{Z_{кз}}{Z_{xx}}}}{1-\sqrt{\dfrac{Z_{кз}}{Z_{xx}}}} = a_c + jb_c = \ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$$

$$a_c = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{U_{m1}}{U_{m2}}$$

характеристическое затухание ЧТП

$$b_c = \psi_{u1} - \psi_{u2}$$

характеристическая фаза ЧТП

Входное сопротивление ЧТП в режиме холостого хода равно

$$Z_{xx} = R + jX = 10 + j20$$

Входное сопротивление ЧТП в режиме короткого замыкания равно

$$Z_{кз} = jX + \frac{R\cdot jX}{R+jX} = j20 + \frac{10\cdot j20}{10+j20} = 8 + j24$$

$$\sqrt{\frac{Z_{кз}}{Z_{xx}}} = \sqrt{\frac{8+j24}{10+j20}} = \sqrt{1.12+0.16\mathrm{i}} = \sqrt{1.131\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.13}} = 1.063\mathrm{e}^{\mathrm{j}4.065} = 1.06+0.075\mathrm{i}$$

$$g_c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(1.06+0.075\mathrm{i})}{1-(1.06+0.075\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\ln\frac{2.06+0.075\mathrm{i}}{-0.06-0.075\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\ln(-14.008+16.26\mathrm{i}) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(21.462\mathrm{e}^{\mathrm{j}130.75}) = \frac{1}{2}\{\ln(21.462)+\mathrm{j}130.75\} = \frac{1}{2}(3.066+\mathrm{j}130.75) =$$

$$= 1.5 + j65.5^o$$

Следовательно, характеристическое затухание ЧТП $a_c = 1.5$ Нп (непера)

характеристическая фаза ЧТП $b_c = 65.5^o$ (градуса)

Тогда

$$1.5 = \ln\frac{U_{m1}}{U_{m2}} \Rightarrow \frac{U_{m1}}{U_{m2}} = e^{1.5} = 4.482 \Rightarrow U_{m2} = \frac{U_{m1}}{4.482} = \frac{100}{4.482} = 22.31$$

$$b_c = \psi_{u1} - \psi_{u2} \Rightarrow \psi_{u2} = \psi_{u1} - b_c = 100^o - 65.5^o = 34.5^o$$

ответ

$$u_2(t) = 22.3\sin(\omega t + 34.5^o)$$

задача 3

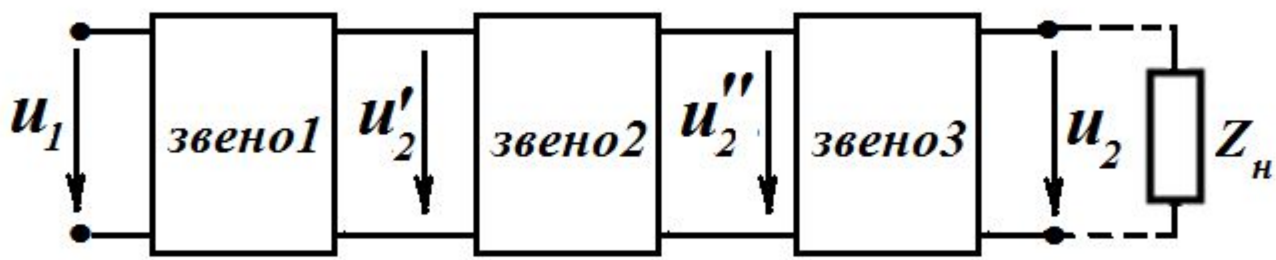
Определить мгновенное значение синусоидального напряжения на нагрузке цепной схемы, составленной из трех каскадно включенных ЧТП- звеньев, нагруженной согласованно, если входное напряжение равно

$$u_1(t) = 100\sin(\omega t + 100^o)$$

и заданы характеристические параметры звена $Z_c = 10 + j20$ $g_c = 1.2 + j15^o$

Рассчитать входное сопротивление цепной схемы с согласованной нагрузкой и меру

передачи цепной схемы



решение

1. При согласованно нагруженном ЧТП его входное сопротивление равно сопротивлению
нагрузки. Поэтому входное сопротивление цепной схемы тоже равно сопротивлению
Нагрузки то есть характеристическому сопротивлению звена

$$Z_{ц.сх.} = Z_c = 10 + j20$$

2. При одинаковых звеньях цепной схемы ее мера передачи равна

$$g_{ц.сх.} = \ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2'} = \ln\frac{\dot{U}_2'}{\dot{U}_2''} = \ln\frac{\dot{U}_2''}{\dot{U}_2} = g_{c1} + g_{c2} + g_{c3} = 3g_c =$$

$$= 3(1.2 + j15^o) = 3.6 + j45^o$$

$$3.6 = \ln\frac{U_{m1}}{U_{m2}} \Rightarrow \frac{U_{m1}}{U_{m2}} = e^{3.6} = 36.598 \Rightarrow U_{m2} = \frac{U_{m1}}{36.598} = \frac{100}{36.598} = 2.732$$

$$b_c = \psi_{u1} - \psi_{u2} \Rightarrow \psi_{u2} = \psi_{u1} - b_c = 100^o - 45^o = 55^o$$

$$u_2(t) = 2.73\sin(\omega t + 55^o)$$

Цепи с распределенными параметрами (длинные линии)

задача 1

Какому идеализированному элементу ЭЦ (электрическому сопротивлению, индуктивности или емкости) соответствует воздушная линия без потерь , если ее длина равна 20 см. и она работает в режиме холостого хода на частоте 300 МГц

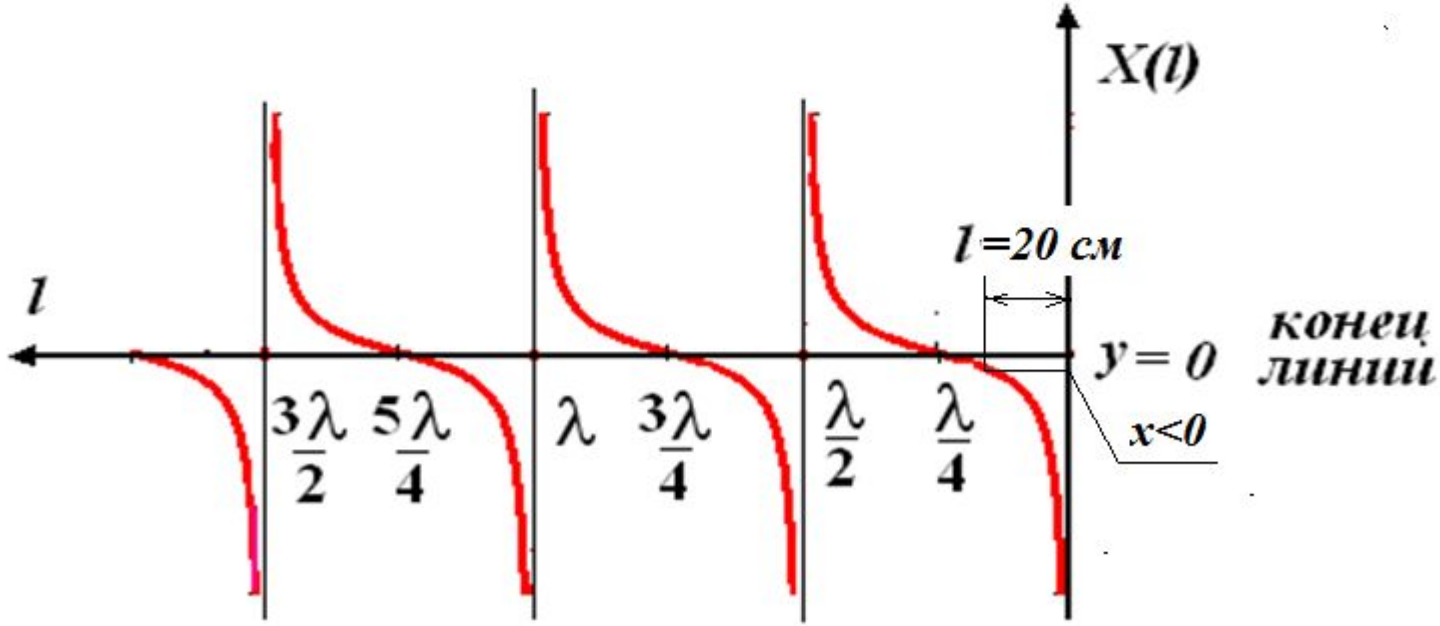
решение

Длина электромагнитной волны распространяющейся в воздушном пространстве равна

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^6} = 1 \quad м$$

Здесь c скорость электромагнитной волны, распространяющейся в воздушном пространстве, равная скорости света

Входное сопротивление линии без потерь зависит от длины линии и частоты гармонического колебания волны в ней. В режиме холостого хода это сопротивление чисто реактивное, то есть может быть либо индуктивностью, либо емкостью. График зависимости этого сопротивления от длины линии имеет вид

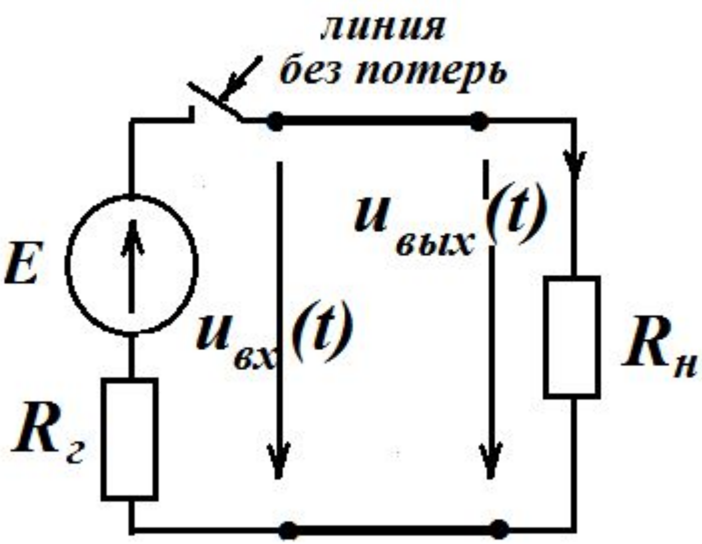


При длине линии 20 см из графика видно, что сопротивление линии имеет
емкостный характер

$$\lambda/4 = 25 \quad см$$

задача 2

Построить графики входного и выходного напряжений на входе и на нагрузке линии
при включении линии без потерь на источник постоянного напряжения при следующих



тора) , линии и нагрузки:

$$E = 100 \quad B \qquad R_г = 3\rho \qquad R_н = \frac{1}{3}\rho$$

ρ волновое сопротивление линии

решение

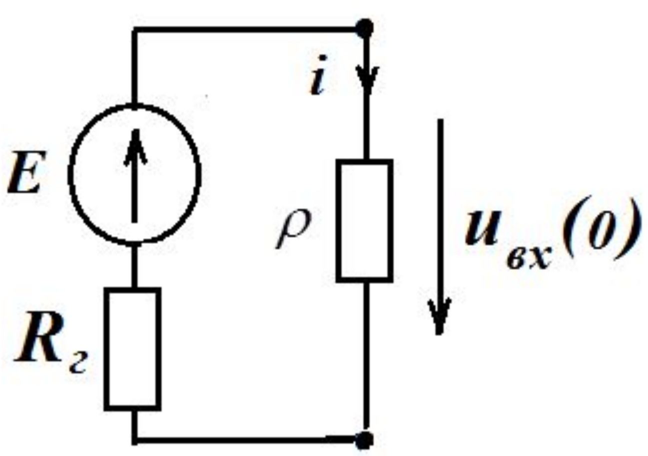
При расчете переходного процесса используется понятие коэффициента отражения
от конца линии (от нагрузки) и от генератора

$$k_н = \frac{R_н - \rho}{R_н + \rho} = \frac{\frac{1}{3}\rho - \rho}{\frac{1}{3}\rho + \rho} = -0.5$$

$$k_г = \frac{R_г - \rho}{R_г + \rho} = \frac{3\rho - \rho}{3\rho + \rho} = 0.5$$

Обозначим время перемещения волны от начала линии к концу как τ

В момент коммутации линия с нагрузкой всегда воспринимается генератором как волновое сопротивление, что соответствует режиму бегущей волны. Поэтому



$$i = \frac{E}{R_г + \rho} = \frac{E}{4\rho}$$

$$u_{вх}(0) = i\rho = \frac{E}{4\rho}\rho = \frac{E}{4} = 25$$

В момент первого отражения от конца линии

$$u_{отр}(\tau) = u_{вх}(0)k_{н} = 25\cdot(-0.5) = -12.5$$

$$u_{вых}(\tau) = u_{вх}(0) + u_{отр}(\tau) = 25 + (-12.5) = 12.5$$

В момент первого отражения от генератора

$$u_{отр}(2\tau) = u_{отр}(\tau)k_{г} = -12.5\cdot 0.5 = -6.25$$

$$u_{вх}(2\tau) = u_{вых}(\tau) + u_{отр}(2\tau) = 12.5 + (-6.25) = 6.25$$

В момент второго отражения от конца линии

$$u_{отр}(3\tau) = u_{отр}(2\tau)k_{н} = -6.25\cdot(-0.5) = 3.125$$

$$u_{вых}(3\tau) = u_{вх}(2\tau) + u_{отр}(3\tau) = 6.25 + 3.125 = 9.375$$

В момент второго отражения от генератора

$$u_{отр}(4\tau) = u_{отр}(3\tau)k_{г} = 3.125\cdot 0.5 = 1.5625$$

$$u_{вх}(4\tau) = u_{вых}(3\tau) + u_{отр}(4\tau) = 9.375 + 1.5625 = 10.9375$$

В момент третьего отражения от конца линии

$$u_{отр}(5\tau) = u_{отр}(4\tau)k_н = 1.5625 \cdot (-0.5) = -0.78125$$

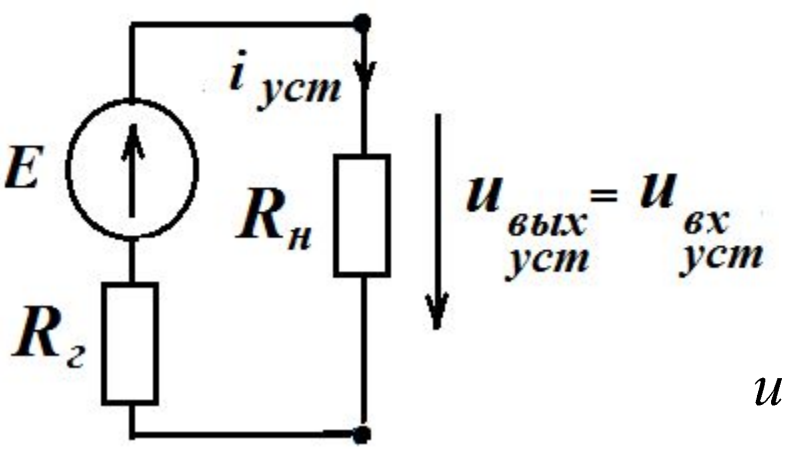
$$u_{вых}(5\tau) = u_{вх}(4\tau) + u_{отр}(5\tau) = 10.9375 - 0.78125 = 10.1562$$

В момент третьего отражения от генератора

$$u_{отр}(6\tau) = u_{отр}(5\tau)k_г = -0.78125 \cdot 0.5 = -0.3906$$

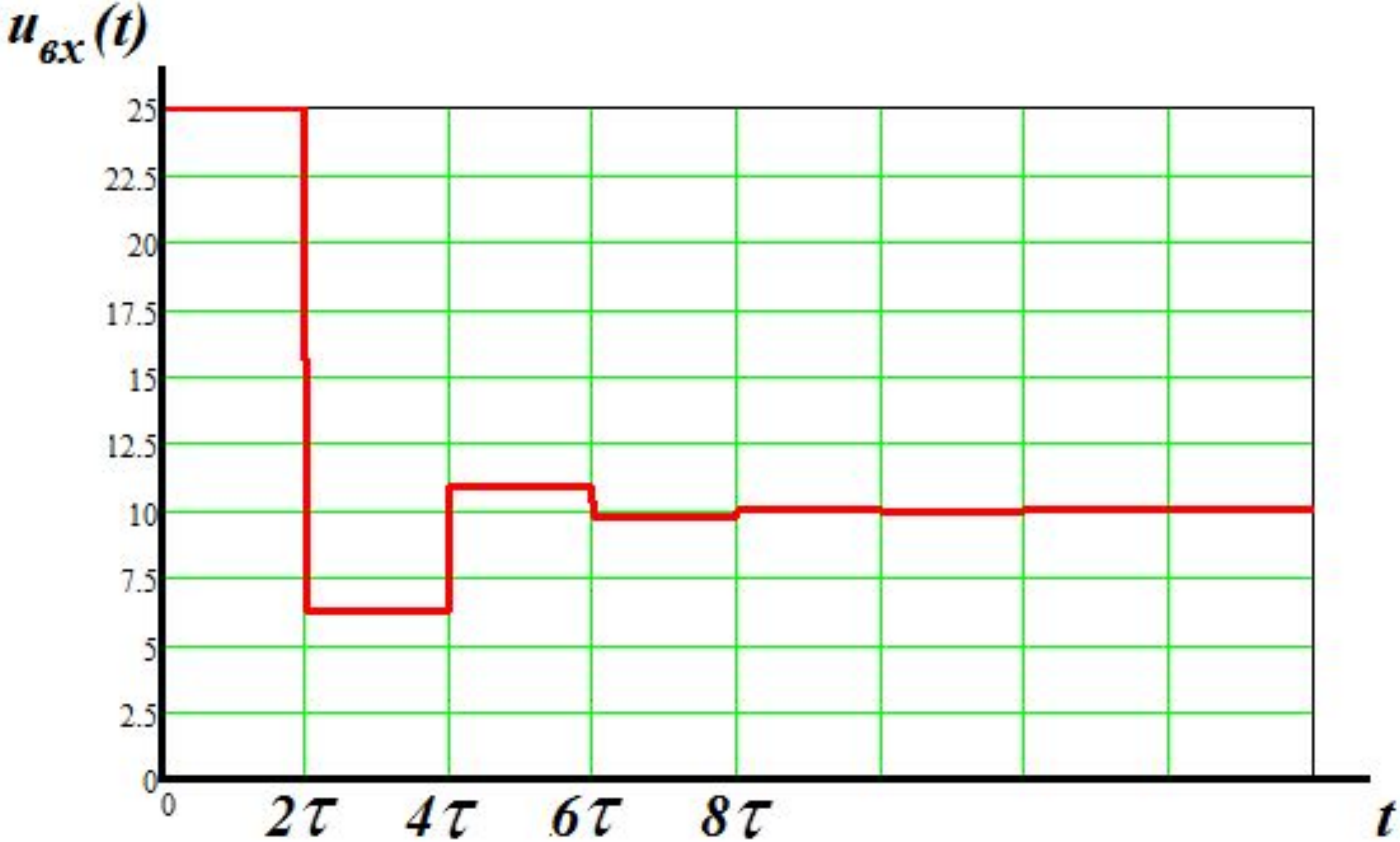
$$u_{вх}(6\tau) = u_{вых}(5\tau) + u_{отр}(6\tau) = 10.1562 - 0.3906 = 9.7656$$

В установившемся

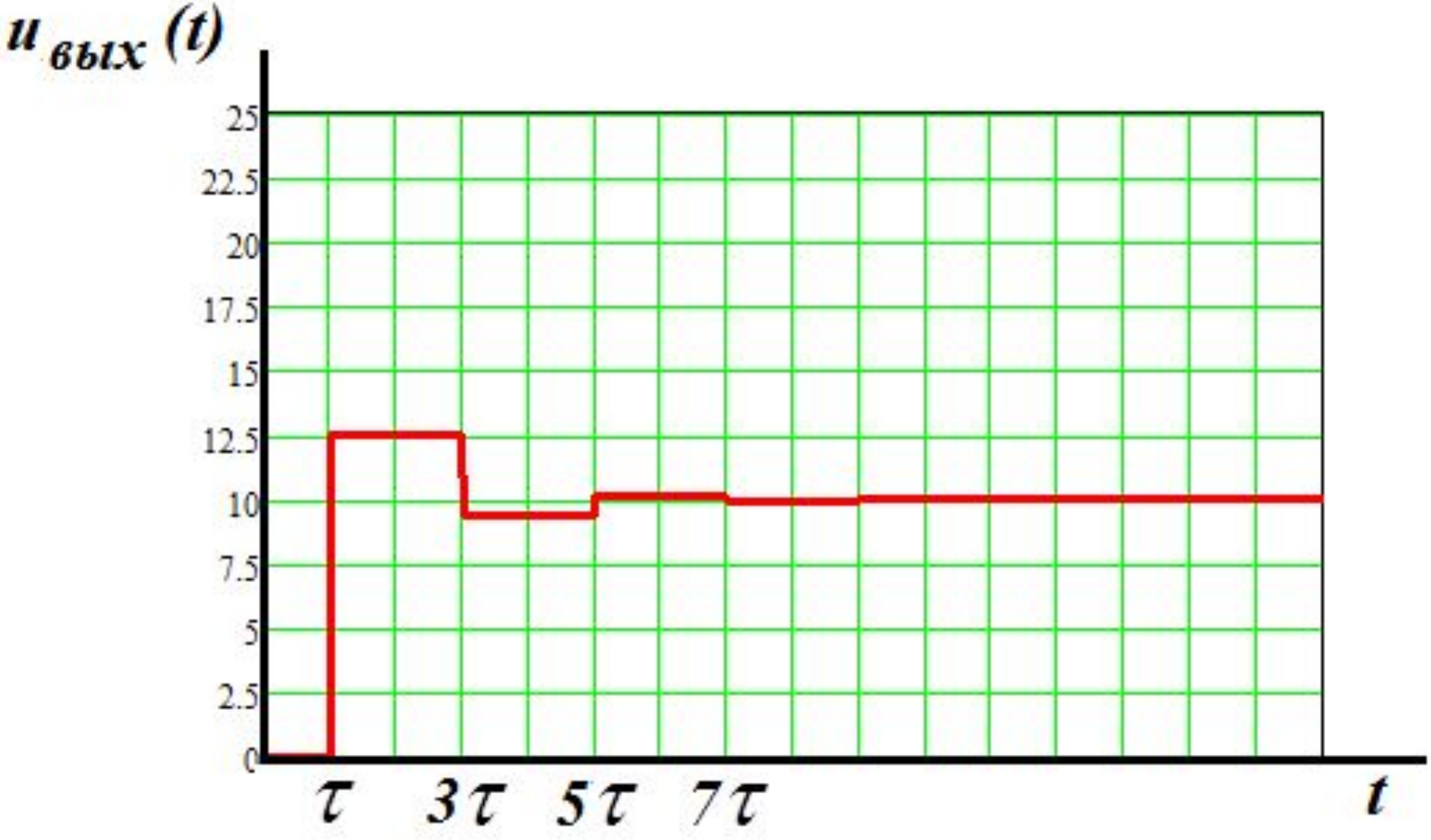


$$i_{уст} = \frac{E}{R_г + R_н} = \frac{E}{3\rho + \frac{1}{3}\rho} = \frac{E}{\frac{10}{3}\rho}$$

$$u_{вх.уст} = u_{вых.уст} = i_{уст}R_н = \frac{E}{\frac{10}{3}\rho} \cdot \frac{1}{3}\rho = \frac{E}{10} = 10$$



$u_{вх}(t)$
25
22.5
20
17.5
15
12.5
10
7.5
5
2.5
0
0
2τ
4τ
6τ
8τ
t

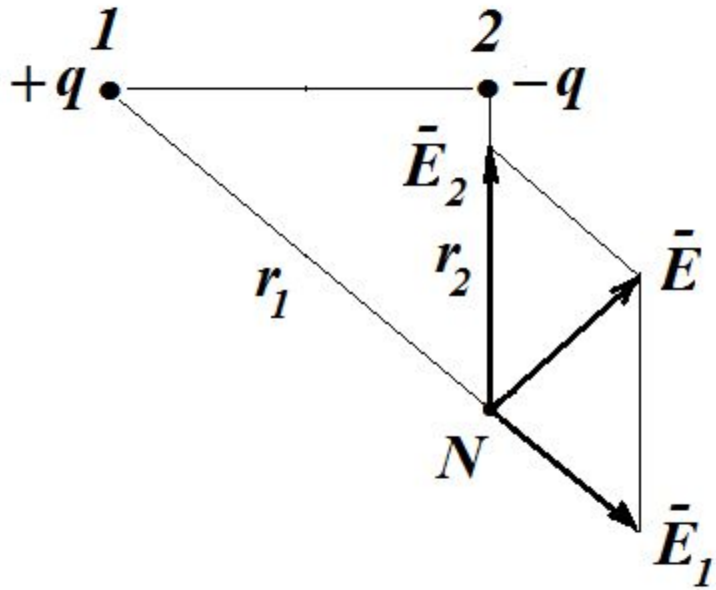


$u_{вых}(t)$
25
22.5
20
17.5
15
12.5
10
7.5
5
2.5
0
τ
3τ
5τ
7τ
t

Теория ЭМП

задача 1

Определить величину и направление вектора напряженности электростатического поля от двух точечных зарядов в заданной точке пространства

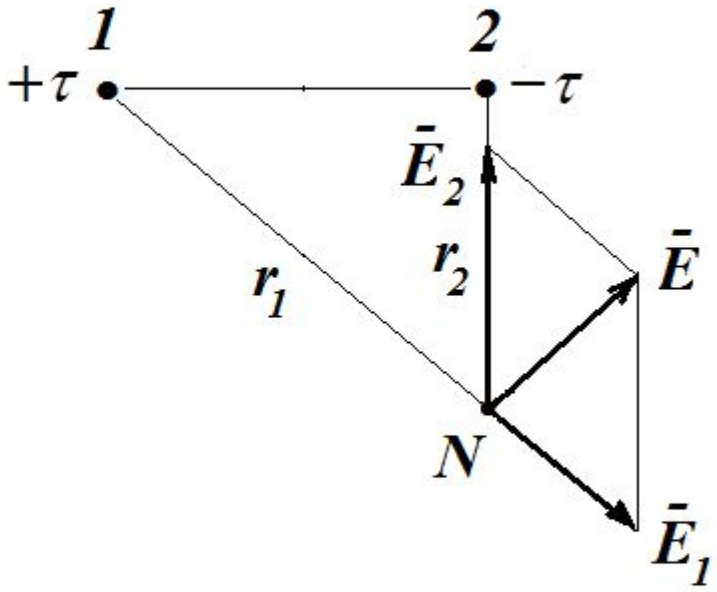


$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^{\,2}} \qquad E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^{\,2}}$$

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$$

задача 2

Определить величину и направление вектора напряженности электростатического поля и потенциал в заданной точке пространства от двух заряженных осей с линейной плотностью τ



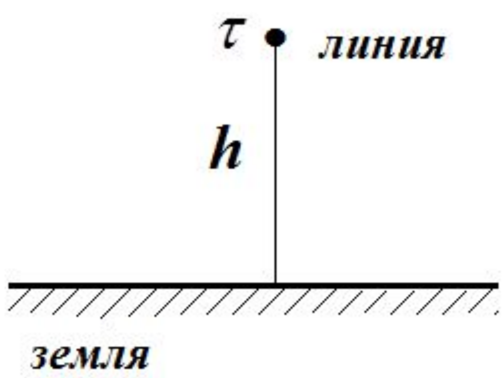
$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1} \qquad E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_2}$$

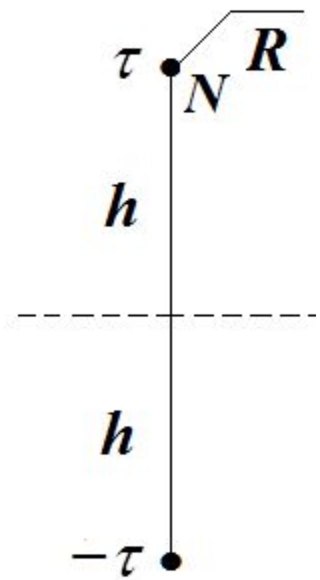
$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$$

$$\varphi(N) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

задача 3

Определить емкость на единицу длины бесконечно длинного провода над поверхностью земли. Заданы радиус провода и высота подвески над землей





По методу зеркальных отображений электростатическое поле от заряженного провода над поверхностью земли рассчитывается как поле от двух заряженных осей в воздушном пространстве, но уже при отсутствии проводящей земли. По определению емкость на единицу длины

$$C_0 = \frac{\tau}{u}$$

где u напряжение между линией и землей

$$u = \varphi_N - \varphi_0$$

напряжение между линией и землей равна разности потенциалов провода и земли.

Потенциал земли равен нулю, поэтому

$$u = \varphi_N = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{R}$$

Следовательно, емкость провода равна

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}}$$

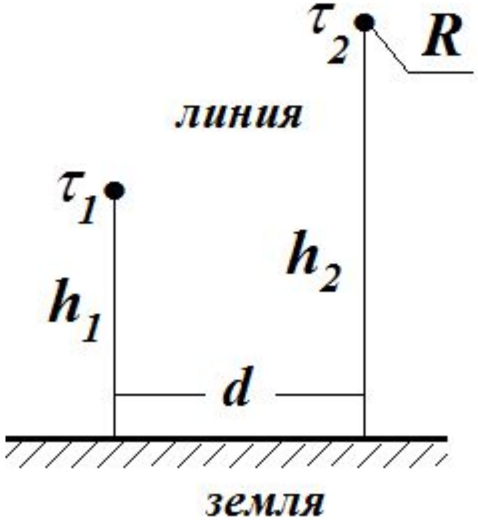
задача 4

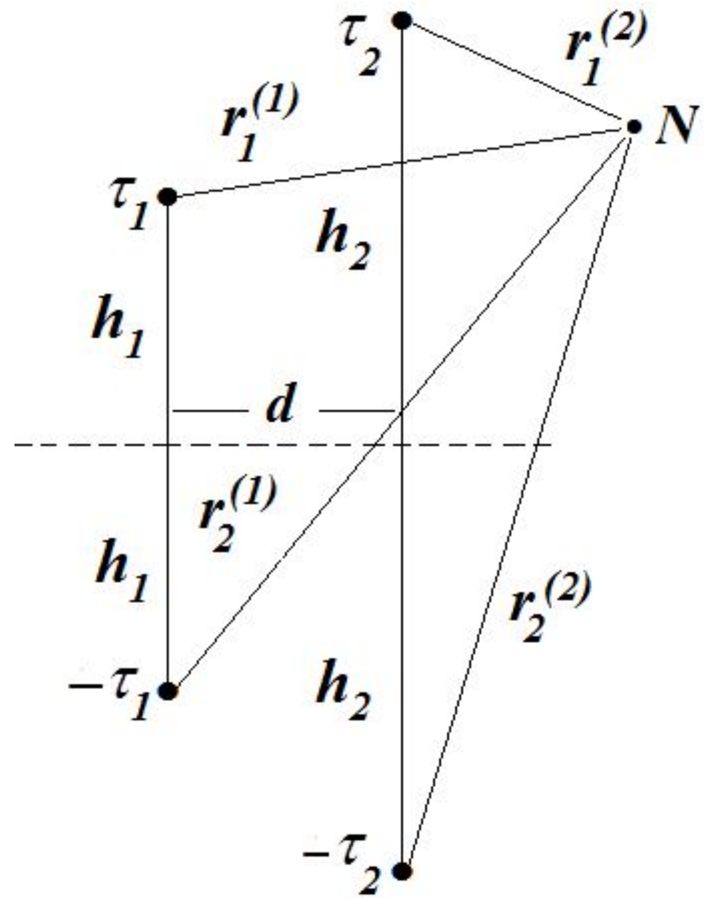
Рассчитать потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости двухпроводной воздушной линии, расположенной над поверхностью земли. Геометрические размеры заданы.

Расчет проводится на основании расчета электростатического поля заряженной линии с линейными плотностями τ_1 и τ_2 по методу зеркальных отображений

Потенциал в точке N от двух пар заряженных линий по методу наложения равен

$$\varphi(N) = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)}} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2^{(2)}}{r_1^{(2)}}$$





Если точку *N* поместить на поверхность первого провода, то его потенциал определится через заряды проводов

$$\varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{R} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(h_1+h_2)^2+d^2}}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+d^2}}$$

Если точку N поместить на поверхность второго провода, то его потенциал по аналогии равен

$$\varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(h_1+h_2)^2+d^2}}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+d^2}} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{R}$$

Полученная система уравнений связывает потенциалы проводов линии и заряды на них

$$\varphi_1 = \tau_1\alpha_{11} + \tau_2\alpha_{12}$$

$$\varphi_2 = \tau_1\alpha_{21} + \tau_2\alpha_{22}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{R}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{R}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(h_1+h_2)^2+d^2}}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+d^2}}$$

Коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ называются потенциальные коэффициенты

Коэффициенты электростатической индукции β дают возможность определить заряды линий через их потенциалы. Они рассчитываются как обратная матрица потенциальных коэффициентов

$$[\beta]=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}$$

Частичные емкости двухпроводной воздушной линии определяются через коэффициенты электростатической индукции

$$c_{11}=\beta_{11}+\beta_{12}$$

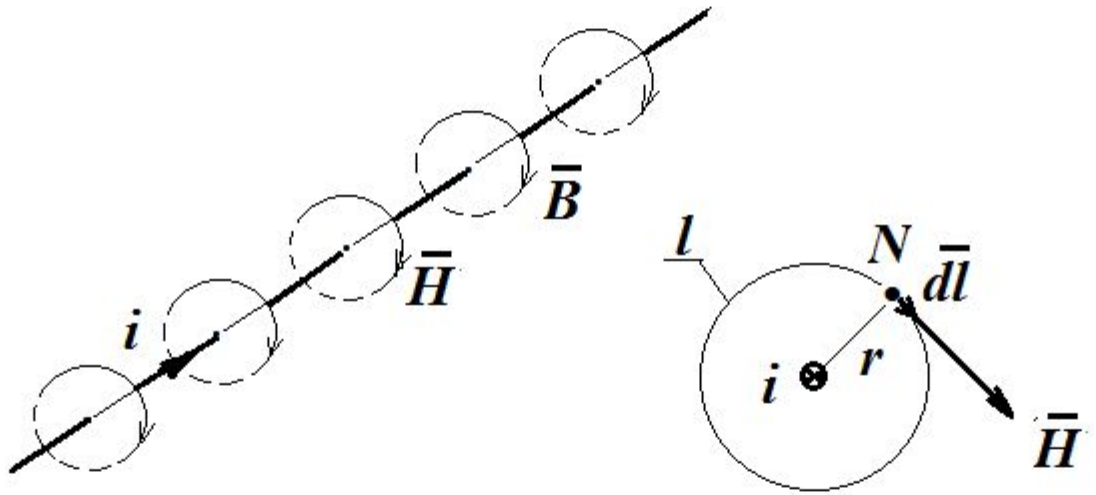
$$c_{12}=-\beta_{12}$$

$$c_{21}=-\beta_{21}$$

$$c_{22}=\beta_{22}+\beta_{21}$$

задача 5

Определить величину и направление вектора напряженности магнитного поля от бесконечно длинного провода с током в заданной точке пространства

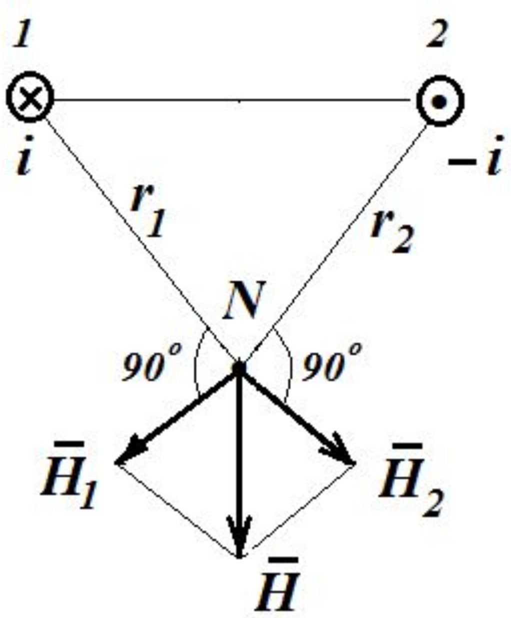


величину и направление вектора напряженности магнитного поля можно определить по закону полного тока

$$Hl = i \Rightarrow H = \frac{i}{l} = \frac{i}{2\pi r}$$

задача 6

Определить величину и направление вектора напряженности магнитного поля от двухпроводной линии с током в заданной точке пространства



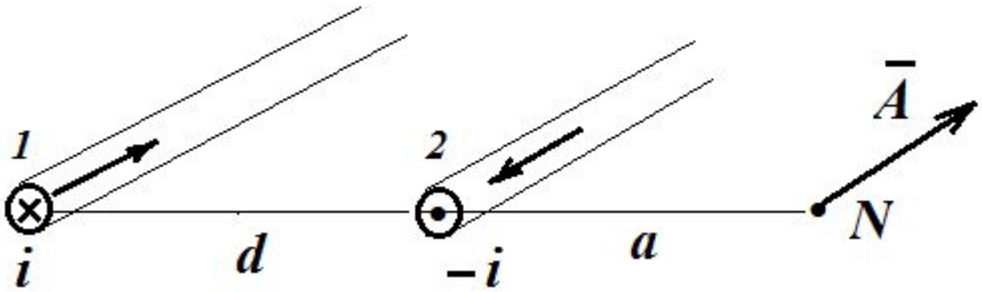
по закону полного тока

$$H_1 = \frac{i}{2\pi r_1} \qquad H_2 = \frac{i}{2\pi r_2}$$

$$\overline{H} = \overline{H}_1 + \overline{H}_2$$

Задача 7

Определить величину и направление векторного магнитного потенциала от двухпроводной линии с током в заданной точке пространства

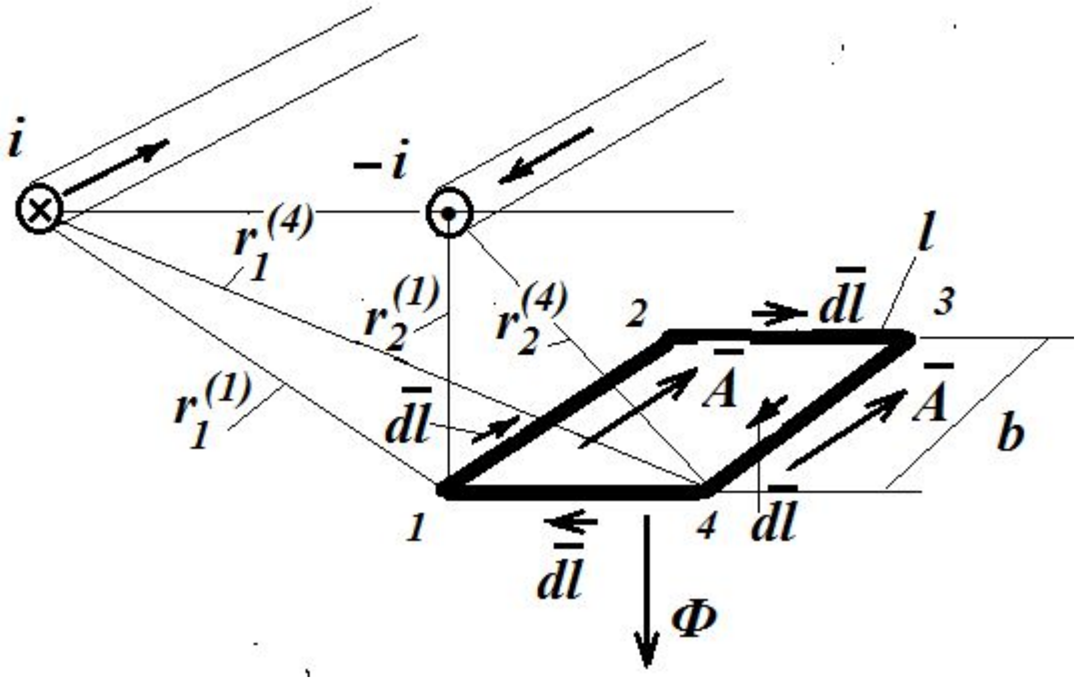


Магнитное поле от двухпроводной линии с током плоско –параллельное. Векторный потенциал такого поля имеет только z- составляющую и определяется по формуле

$$A(N) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{a}{a+d}$$

Задача 8

Рассчитать магнитный поток в рамке от двухпроводной линии с током. Определить взаимную индуктивность между линией и рамкой



магнитный поток в рамке можно вычислить через векторный потенциал вдоль контура рамки с помощью интеграла

$$\Phi = \oint_l \bar{A} d\bar{l}$$

Контур рамки разбиваем на 4 участка: от 1 до 2, от 2 до 3, от 3 до 4 , от4 до 1. Интеграл вычисляется в следующем виде

$$\Phi = \oint_l \overline{A} d\overline{l} = \int_1^2 \overline{A} d\overline{l} + \int_2^3 \overline{A} d\overline{l} + \int_3^4 \overline{A} d\overline{l} + \int_4^1 \overline{A} d\overline{l} =$$

$$= A_1 b + 0 - A_4 b + 0 = b(A_1 - A_4) = \frac{\mu_0 i b}{2\pi}(\ln\frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)}} - \ln\frac{r_2^{(4)}}{r_1^{(4)}})$$

взаимная индуктивность между линией и рамкой вычисляется по формуле

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}(\ln\frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)}} - \ln\frac{r_2^{(4)}}{r_1^{(4)}})$$