

Устойчивость автоматических систем регулирования

Основные положения теории устойчивости АСР

Устойчивость – свойство АСР **возвращаться в установившееся состояние** после выхода из него в результате какого-либо воздействия (возмущающего или задающего).

Требование устойчивости является главным требованием к АСР

Устойчивость автоматических систем регулирования

Основные положения теории устойчивости АСР

В основе теории устойчивости лежит концепция **опорно-возмущенного движения** А.М.Ляпунова:

Состояние выходной величины $y(t)$ определяется

- 1) состоянием входной величины (вынужденное или возмущенное движение)
- 2) собственными свойствами системы

Устойчивость автоматических систем регулирования

Основные положения теории устойчивости АСР

Если система устойчива, то **после снятия входного воздействия** (все слагаемые в правой части дифференциального уравнения системы стали 0 - см. раздел 1.6), все **изменения выходной величины** через некоторое время также **прекратятся**.

Следовательно, свойство устойчивости зависит только от левой части уравнения. Она (левая часть)

Устойчивость автоматических систем регулирования

Основные положения теории устойчивости АСР

Для определения устойчивости нужно решить **однородное** дифференциальное уравнение

$$a_n \frac{d^n y(\tau)}{d\tau^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(\tau)}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d y(\tau)}{d\tau} + a_0 y(\tau) = 0$$

т.е. найти функцию $y(\tau)$ и проанализировать ее поведение при $\tau \rightarrow \infty$.
Если при $\tau \rightarrow \infty$ $y(\tau) \rightarrow 0$, то система устойчива.

Устойчивость автоматических систем регулирования

Основные положения теории устойчивости АСР

Вывод о устойчивости АСР можно сделать по ее **характеристическому уравнению**, которое получается приравниванием к 0 знаменателя передаточной функции АСР:

$$Y(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{\underbrace{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}_{\text{Передаточная функция } W(p)}} \cdot X(p)$$

Характеристическое уравнение:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

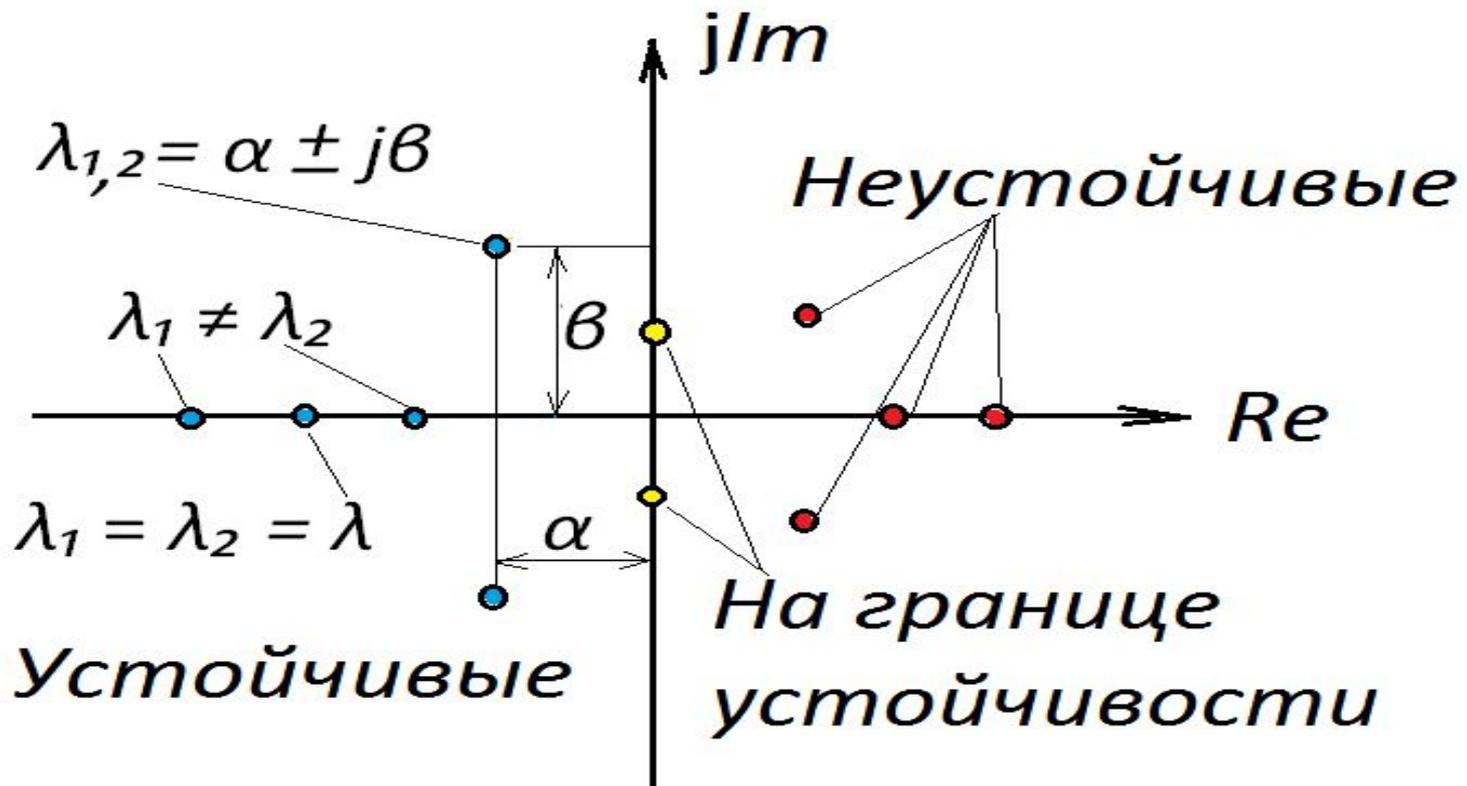
Устойчивость автоматических систем регулирования

Основные положения теории устойчивости АСР

Для устойчивости АСР **необходимо и достаточно**, чтобы все корни характеристического уравнения имели **отрицательные вещественные части**

Устойчивость автоматических систем регулирования

Основные положения теории устойчивости АСР



Графическая интерпретация условия
устойчивости АСР

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Критерии устойчивости – это общие признаки математического описания системы, позволяющие ***судить о ее устойчивости, не прибегая к решению характеристического уравнения*** (т.е. без нахождения корней)

В теории и практике АСР используются ***алгебраические и частотные*** критерии.

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

- **Алгебраический критерий устойчивости**

Вышнеградского применяется для систем до 3-го порядка, использует характеристическое уравнение замкнутой АСР.

$W(p)$ (замкн.) \rightarrow хар-е ур-ние \rightarrow критерий

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Характеристическое уравнение

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Для устойчивости АСР по критерию
Вышнеградского необходимо и достаточно
выполнения двух условий:

$$a_3 > 0;$$

$$a_2 \cdot a_1 > a_3 \cdot a_0.$$

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости базируются на анализе ***частотных характеристик АСР в замкнутом и условно разомкнутом*** состояниях.

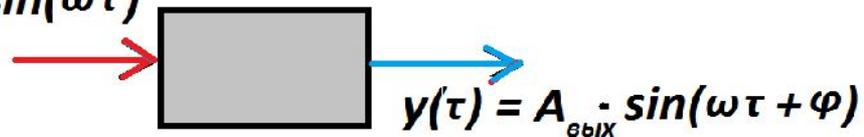
Достоинства по сравнению с алгебраическими: наглядность, возможность анализировать влияние параметров объекта и регулятора на качество регулирования, позволяют находить способы улучшения качества регулирования.

Устойчивость автоматических систем регулирования

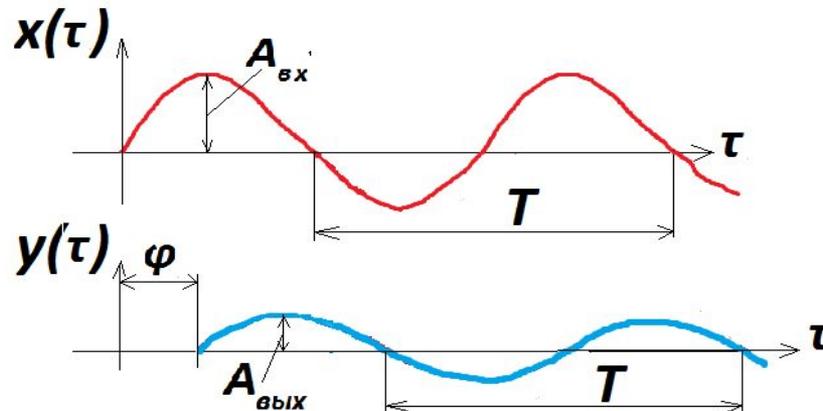
Критерии устойчивости

Частотные характеристики описывают реакцию звена (совокупности звеньев, системы) на гармонические входные воздействия

воздействий $x(\tau) = A_{\text{вх}} \cdot \sin(\omega\tau)$



$$y(\tau) = A_{\text{вых}} \cdot \sin(\omega\tau + \varphi)$$



Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Частотные характеристики:

Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ -АЧХ

- изменение $A_{вых}/A_{вх}$ при $0 < \omega < \infty$

Фазо-частотная характеристика $\phi(\omega)$ –ФЧХ

- изменение ϕ при $0 < \omega < \infty$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$W(j\omega)$ - АФЧХ - (АФХ)

- комплексная функция частоты $0 < \omega < \infty$

$$W(j\omega) = U(\omega) + j V(\omega)$$

$U(\omega)$ - вещественная частотная характеристика

$V(\omega)$ – мнимая частотная характеристика

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Связь АФЧХ с передаточной функцией –
путем замены p на $j\omega$:

$$W(p) \longrightarrow W(j\omega)$$

Например, для пропорционального звена

$$W(p) = K$$

$$W(j\omega) = K ; \quad A(\omega) = K ; \quad \phi(\omega) = 0$$

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Для пропорционально-интегрального регулятора

$$W(p) = K_p \cdot (1 + 1/(T_u \cdot p)) \rightarrow$$
$$\rightarrow W(j\omega) = K_p + K_p/(T_u \cdot j\omega);$$

в окончательном виде

$$W(j\omega) = K_p - j \frac{K_p}{T_u \omega}$$

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Частотный критерий устойчивости Михайлова
А.В. использует АФЧХ замкнутой АСР.

$$W(p)^{АСР-з} \rightarrow W(j\omega)^{АСР-з}$$

Автоматическая система регулирования **устойчива**, если ее **амплитудно-фазовая характеристика** (годограф Михайлова), построенная для **замкнутого состояния**, при изменении частоты от 0 до ∞ , начинаясь на положительной части вещественной оси, обходит в **направлении против часовой стрелки**, нигде не обращаясь в 0, такое **количество квадрантов**, каков **порядок характеристического**

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Частотный критерий устойчивости

Г.Найквиста использует АФЧХ условно разомкнутой АСР.

$$W(p)^{АСР-раз} \rightarrow W(j\omega)^{АСР-раз}$$

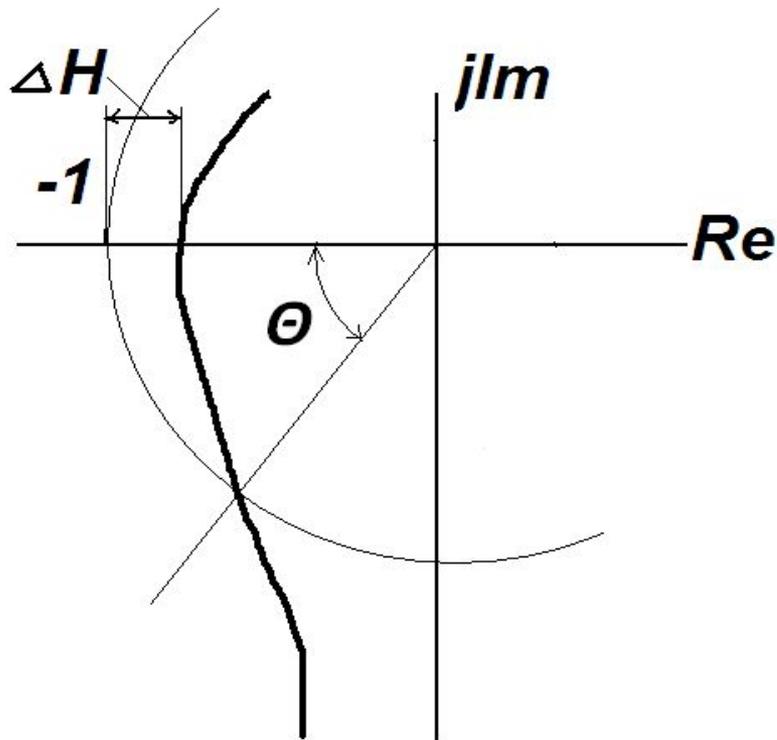
Автоматическая система регулирования **устойчива**, если ее **амплитудно-фазовая характеристика** (годограф Михайлова), построенная для **замкнутого состояния**, при изменении частоты от 0 до ∞ , начинаясь на положительной части вещественной оси, обходит в **направлении против часовой стрелки**, нигде не обращаясь в 0, такое **количество квадрантов**, каков **порядок характеристического**

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

Критерий Найквиста:

Автоматическая система регулирования **устойчива в замкнутом состоянии**, если ее амплитудно-фазовая характеристика (годограф Найквиста), построенная для **разомкнутого состояния**, при изменении частоты от 0 до ∞ **не охватывает** точку в комплексной плоскости с координатами $\{-1, j0\}$



ΔH – запас устойчивости по амплитуде
 Θ – запас устойчивости по фазе

Устойчивость автоматических систем регулирования

Критерии устойчивости

- Параметрическая область устойчивости

Если система уравнений соответствует
точке

$(-1, j0)$, т.е. состоянию АСР на границе
устойчивости, то для нее справедлива

$$\text{СИСТ} \left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = A(\omega, \underline{K_p}, \underline{T_u}, \underline{T_a}, \underline{K_o}, \underline{T_o}, \underline{\tau_3}) = 1 \\ \varphi(\omega) = \arg A(\omega, \underline{K_p}, \underline{T_u}, \underline{T_a}, \underline{K_o}, \underline{T_o}, \underline{\tau_3}) = -\pi \end{array} \right.$$

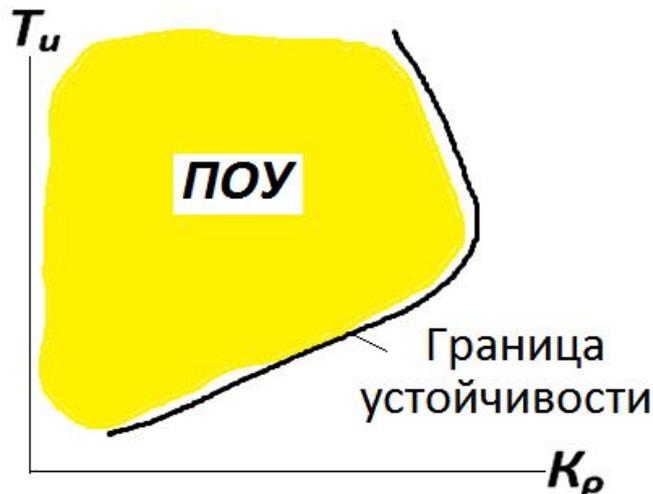
Устойчивость автоматических систем регулирования

Параметрическая область устойчивости

Полученное из этой систем уравнение

$$f(\omega, K_p, T_u) = 0$$

является уравнением пограничного
состояния АСР



**Параметрическая
область**

устойчивости – это совокупность значений параметров настройки регулятора, при которых АСР будет устойчивой