## Дәріс № 4. Сұйықтық қозғалысы мен динамиканың негізгі теңдеуі

Сұйықтық қозғалысына динамиканың негізгі теңдеуін:_____қолданғанда Эйлер теңдеуі алынады. Эйлер теңдеуін қорытындылау үшін, Ньютонның екінші заңы: денеге әсер ететін барлық күштер кескінінің қосындысы масса мен үдеудің көбейтіндісіне тең болған жағдайда ғана дене қозғалыста болады деп тұжырымдалады.

Қозғалыстағы сұйықтықтан көлемі элементарлы параллелепипед белгілеп алып *(1-сурет)*, параллелепипед қырларына әсер ететін ауырлық пен қысым күштерінің проекцияларын кескіндейміз. Z осін ауырлық күші бағытымен сәйкестендіріп аламыз. Осы жағдайда ауырлық күшінің мәні тең болады: . еркін түсу үдеуі.

1-сурет. Идеалды сұйықтықтар қозғалысының дифференциалды теңдеуіне арналған

Z осіне әсер ететін күштердің проекцияларын табамыз. Ауырлық күші Z осімен сәйкес, бірақ қарама-қарсы бағытталған:

(1.1)

Минус таңбасы ауырлық күшінің бағытын көрсетеді.

Z осі бойынша қысым күшінің мәні параллелепипедтің төменгі және жоғарғы бөліктеріне әсер ететін күштердің қосындысынан құралады.

Параллелепипедтің төменгі қырына әсер ететін гидростатикалық қысым күшінің z осіне проекциясы:

(1.2)

Z осіне гидростатикалық қысым күшінің проекциясы тең:

(1.3)

Тең әсерлі қысым күшінің  z осіне проекциясы:

(1.4)

болып өрнектеледі.

Z осі бойынша элементарлы параллелепипедке әсер ететін ортақ күш (1.1) және (1.4) өрнектерінің қосындысына тең болады:

(1.5)

X және Y осьтеріне әсер ететін күштер өрнектеледі:

(1.6)

(1.7)

Элементарлы көлемге әсер ететін табылған күштердің проекциялары осы көлемдегі сұйықтық массасының сәйкес бағыты бойынша үдеуге көбейтіндісіне тең:

(1.8)

(1.9)

(1.10)

Өрнектерді *dxdydz*-ке қысқартсақ:

(1.11)

(1.12)

(1.13)

Бұл теңдеулердегі $w_x$, $w_y$, $w_z$ координата мен уақыттың функциясы болып табылады, мысалы:

Толық дифференциал тең:

(1.14)

Орныққан қозғалыс үшін:

олай болса, кеңістіктің белгілі бір нүктесінде жылдамдық тұрақты болады:

(1.15)

Алайда, сұйықтықтың элементарлы көлемінде жылдамдық тұрақты болмайды. Жылдамдықтың өзгерісін соңғы теңдеуді dτ бөліп аламыз:

(1.16)

Алынған өрнектен

(1.17)

Сонымен келесі өрнектерді жазамыз:

(1.18)

(1.19)

(1.20)

Алынған дифференциалды теңдеулер (1.18-1.20) жүйесі идеалды сұйықтықтардың орнықкан қозғалысы үшін Эйлердің дифференциалды теңдеулері деп аталады.

**Бернулли теңдеуі**

Эйлер теңдеуін интегралдау арқылы гидродинамиканың негізгі теңдеуі Бернулли теңдеуі алынады.

Қозғалыстағы идеалды сұйықтықтың барлық қарастырылып отырған көлеміне әсер ететін күшті табу үшін Эйлер теңдеулерінің (1.11, 1.12, 1.13) оң және сол жақтарын көлемнің қырларының ұзындығына ( dx, dy, dz) көбейтіп, тығыздыққа бөлеміз:

(1.21)

(1.22)

(1.23)

Алынған теңдеулердің оң және сол жақтарын қосамыз.

(1.24)

Теңдеудің (1.24) оң жағындағы қосындыны былай өрнектеуге болады

(1.25)

Алынған өрнекті қосамыз:

(1.26)

Теңдеудің (1.24) сол жағындағы жақшадағы қосынды гидростатикалық қысымның толық дифференциалын білдіреді. Олай болса, (1.24) теңдеу былай жазылады:

(1.27)

Теңдеудің екі жағын да еркін түсу үдеуіне (g) бөліп, барлық мүшелерін теңдіктің бір жағына шығарып жазатын болсақ:

(1.28)

Идеалды сұйықтықтардың орныққан қозғалысы үшін ρ = const, сондықтан дифференциалдар қосындысын қосындының дифференциалы ретінде қарастыруға болады:

(1.29)

Теңдеуді интегралдасақ:

(1.30)

Алынған теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады.

Бернулли теңдеуіндегі мүшелердің өлшем бірліктері – метр.

(1.31)

(1.32)

Сонымен идеалды сұйықтықтардың орныққан қозғалысында ағынның кез келген нүктесінде потенциалдық және кинетикалық энергиялардың қосындысы тұрақты шама. Бернулли теңдеуі энергияның сақталу заңы негізінде ағынның жылулық балансын сипаттайды.

Бернулли теңдеуін қолданып құбыр бойымен белгілі бір жылдамдықпен сұйықтықтың ағуы үшін қажетті қысымды, сұйықтықтың қозғалыс жылдамдығын, мөлшерін, саңылаудан сұйықтықтың ағып өту уақытын анықтауға болады .

## Навье-Стокс заңы

Реалды немесе тұтқыр сұйықтықтардың қозғалысын қарастырғанда сұйықтық ағысына гидростатикалық қысым мен ауырлық күшінен басқа үйкеліс күшінің де әсерін ескеру қажет.

Z, X, Y остері бойынша бірлік көлемге сәйкес келетін үйкеліс күшінің мәнін жазылады:

(1.33)

(1.34)

(1.35)

Егер Эйлер теңдеуіндегі қысым мен ауырлық күштеріне үйкеліс күшін қосатын болсақ, онда сығылмайтын тұтқыр сұйықтық үшін Навье-Стокс теңдеулер жүйесін аламыз:

(1.36)

(1.37)

(1.38)

Сұйықтықтардың қозғалысы жөніндегі барлық практикалық мәселелер осы дифференциалды теңдеулердің қасиеттерін ескеру негізінде шешіледі. Ол үшін Навье-Стокс теңдеуі ұқсастық теориясы негізінде практикалық мәселелерді шешуге жарамды түрге түрлендіріліп барып қарастырылады .