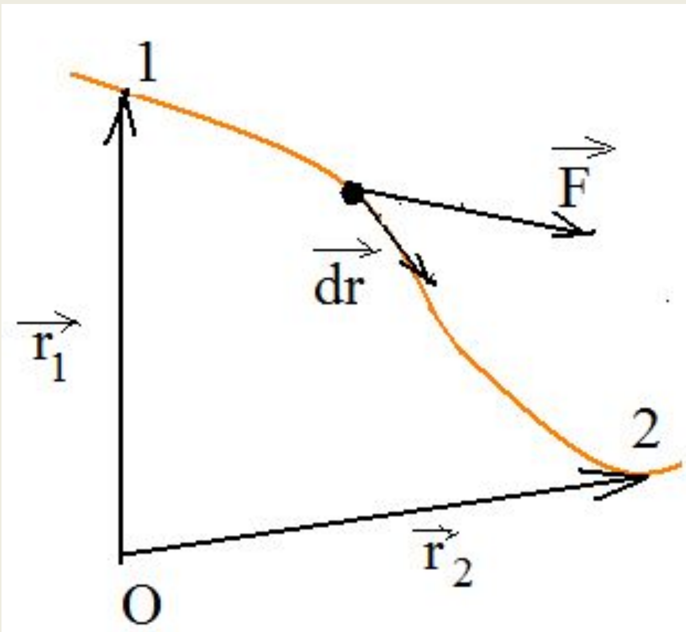
3.2 кинетическая энергия

Пусть м. т. перемещается по произвольной траектории 1 – 2 под действ $\vec{F}(r)$ силы (см. рис.).



Запишем для перемещения м.т. $d\vec{r}$ и $\vec{F}$ силы , действующей на нее, уравнения:

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\vec{\vartheta}dt = d\vec{r} \quad (2)$$

Перемножим почленно скалярно (1) и (2) :

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}\vec{\vartheta}dt = \vec{F}\,d\vec{r}\ ;\ \ m\vec{\vartheta}d\vec{\vartheta} = \vec{F}\,d\vec{r} \ \ (3)$$

$$md\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right) = \vec{F}\,d\vec{r}$$

Проинтегрируем вдоль траектории от т. 1 до т.2 :

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\,d\vec{r}\ ;$$

$$\frac{m\vartheta_2^2}{2} - \frac{m\vartheta_1^2}{2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\,d\vec{r} \qquad (4)$$

$\frac{m\vartheta^2}{2} = T$ -- кинетическая энергия частицы, энергетическая характеристика ее движения.

Выражение (4) теперь можно представить в виде:

$$\Delta T = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{r} \qquad (5)$$

Здесь слева стоит приращение кинетической энергии частицы на участке 1-2 траектории, справа – работа результирующей силы, действующей на частицу.

(5) выражает **теорему о кинетической энергии:**

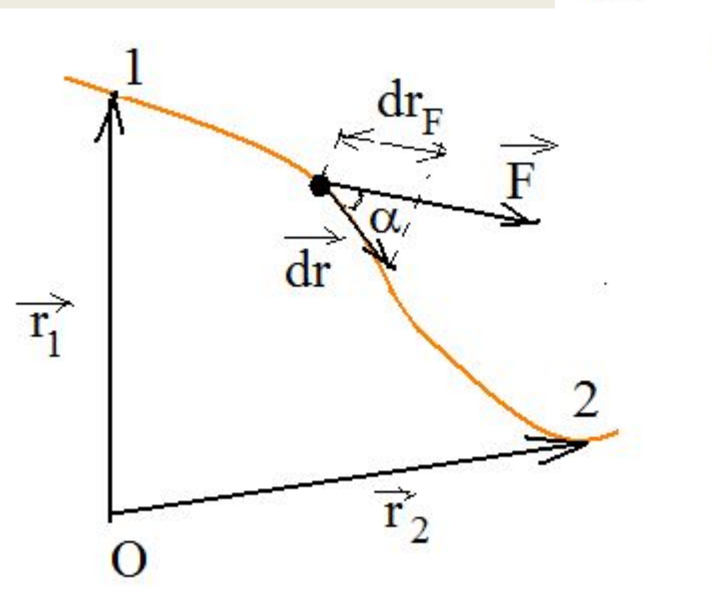
Приращение кинетической энергии частицы при некотором ее перемещении равно работе результирующей силы, действующей при этом на частицу.

3.3 Работа переменной силы по криволинейной траектории. Мощность

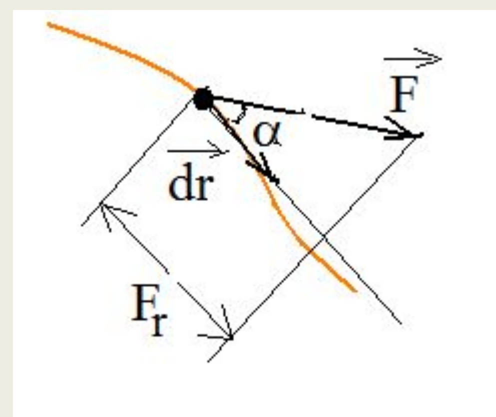
Механическая работа, или работа силы является количественной мерой изменения механических видов энергии.

Пусть тело движется по траектории 1-2 под действием си$\vec{F}(r)$. Работа силы выражается <u>криволинейным</u> интегралом:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F dr \cdot cos\alpha = \int_1^2 F dr_F = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$$



$$dr_F = dr cos\alpha$$



$$F_r = F cos\alpha$$

Пример 1.

Тело движется вдоль OX под действием силы $F_x = F_0 - kx^2$. Чему равна работа этой силы при перемещении из т. x_1 в т. x_2?

Ответ: $$A = F_0(x_2 - x_1) - \frac{k}{3}(x_2^3 - x_1^3).$$

Рассмотрим свойства механической работы:

1) Работа произвольной силы **зависит от формы и длины траектории движения** м.т.

Элементарная работа

$$\delta A = F_r dr = F_s ds \text{, т. к. } |d\vec{r}| = ds$$

Справка из математики

Полным дифференциалом функции Y(x) называется ее такое приращение при изменении аргумента от x до x+dx : dY=y(x+dx) – Y(x), при котором dY не зависит от пути перехода из начального в конечное состояние.

В общем случае работа силы зависит от формы и длины траектории движения точки, т.е. элементарная работа не является полным дифференциалом $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$.

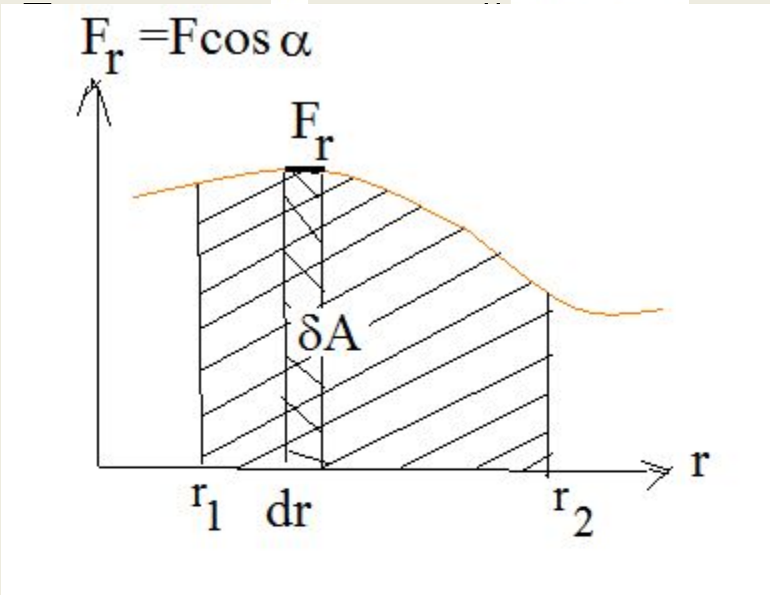
Забегая вперед, отметим, что элементарная работа является полным дифференциалом только для консервативных сил $\vec{F_к}$ $dA = \vec{F_к} d\vec{r}$

.

2) Работа – величина **алгебраическая**. Если α -ол ост $\delta A > 0$

. α $\delta A < 0$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\delta A = 0$.

. Есл



3) **Графическое** представление работы: она численно равна площади

криволинейной трапеции, ограниченной зависимостью $F_r(r)$,

осью r, начальным и конечным значениями перемещения.

4) Работа **аддитивна**.

Пусть на тело действуют несколько сил, результирующая которых равна

$$\vec{F}_p = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ ;$$

Элементарная работа результирующей силы

$$\delta A = \vec{F}_p d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\right) d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i d\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i$$

Отсюда следует, что работа результирующей силы равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой силой в отдельности.

Работа силы, совершаемая в единицу времени, называется ***мощностью***. Если за элементарный промежуток времени dt совершается работа δA, то мощность равна

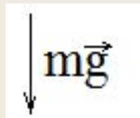
$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{(\vec{F} d\vec{r})}{dt} = (\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}) = \vec{F}\vec{\upsilon}.$$

Или $N = F \cdot \upsilon \cdot \cos\alpha$

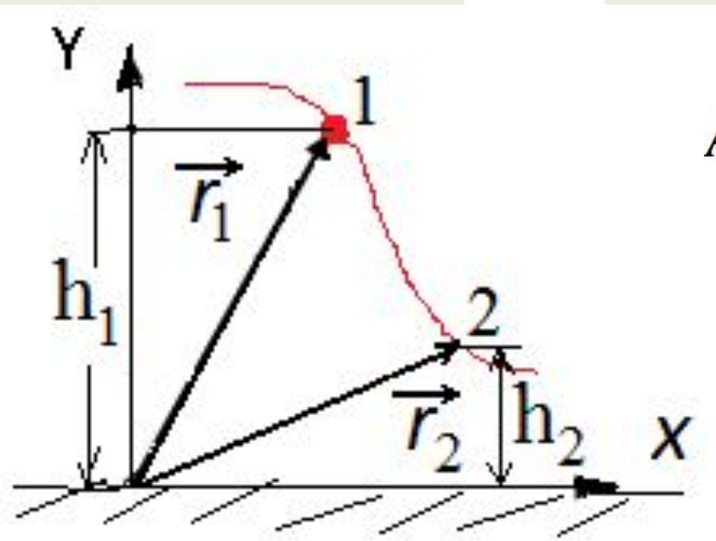
3.4 КОНСЕРВАТИВНЫЕ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ

Вычислим механическую работу нескольких сил.

1) Работа силы тяжести $m\vec{g}$.

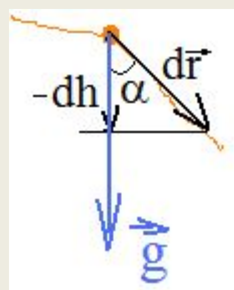


Пусть м.т. движется по траектории 1-2 в поле силы тяжести.



$$A = \int_1^2 m\vec{g}\, d\vec{r} = -\int_{h_1}^{h_2} mgdh = -mg(h_2 - h_1)$$

$$= -mg\Delta h.$$



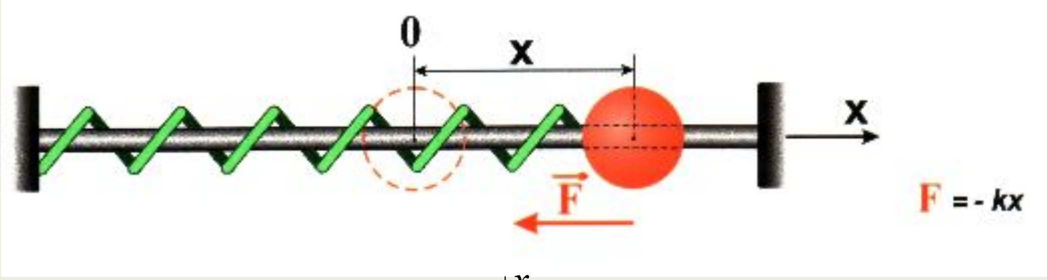
При этом

$$\vec{g}d\vec{r} = gdr \cdot \cos\alpha = g(-dh).$$

Т.о. работа силы тяжести не зависит от формы и длины траектории, а зависит только от начальной и конечной точек перемещения.

2) Работа упругой силы $F = -kx$

Работа при упругой деформации пружины



$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -\left.\frac{kx^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

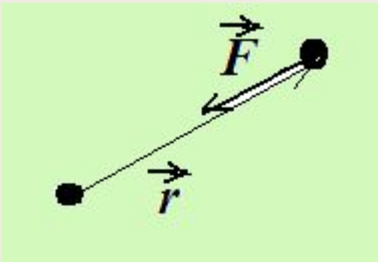
Работа этой силы тоже не зависит от формы и длины траектории, а зависит только от начальной и конечной точек перемещения.

3) Работа центральной силы.

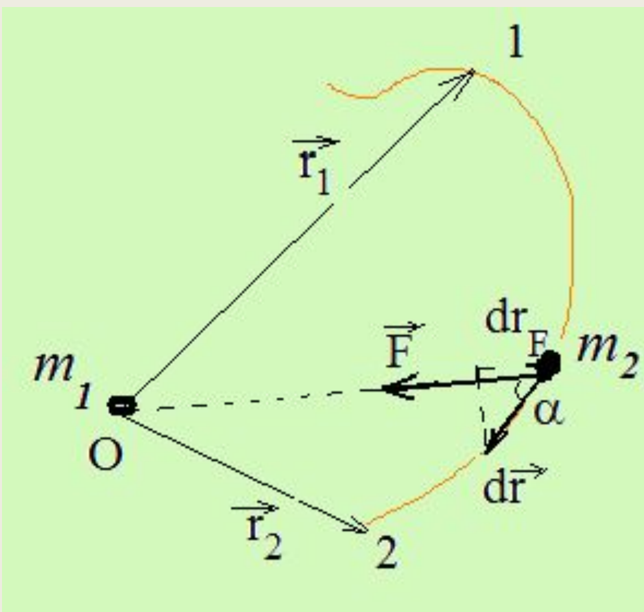
Центральная сила действует вдоль прямых, пересекающихся в одной точке – центре силы и является функцией только расстояния r от точки наблюдения до центра силы.

Примеры центральных сил: кулоновская сила $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

сила тяготения $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$



- Сила тяготения противоположна по направлению радиусу – вектору, проведенному из центра силы к рассматриваемой частице.



Найдем работу силы тяготения

$$A = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r} = \int_1^2 F\,dr_F$$

Обозначим $dr_F = dr$, где dr -- приращение расстояния от центра силового поля до частицы .

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = G\frac{m_1 m_2}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} = Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Работа этой силы тоже не зависит от формы и длины траектории, а зависит только от начальной и конечной точек перемещения.

Соответственно работа сил тяжести, упругости, центральных сил по замкнутому пути равна нулю:

$$A = \int_1^1 \vec{F} d\vec{r} = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Все эти силы консервативны.

Сила называется консервативной, если ее работа не зависит от траектории движения, а зависит только от начального и конечного положений тела. Работа консервативной силы по замкнутому контуру равна нулю.

Пример неконсервативной силы – сила трения.

В общем случае работа зависит от формы и длины траектории движения, поэтому элементарная работа не является полным дифференциалом: $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$

Но для консервативных сил $dA = \vec{F} d\vec{r}$ является полным дифференциалом:

3.5 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ЕЕ НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ.

Силовое поле – область пространства, в любой точке которой на тело действует сила.

Поле ***стационарно***, если в любой точке поля сила, действующая на данное тело, со временем не меняется.

Поле ***однородно***, если сила, действующая на данное тело, одинакова по величине и направлению во всех точках поля.
Так, поле силы тяжести $m\vec{g}$ вблизи поверхности Земли стационарно и однородно.
Мы будем рассматривать в механике только стационарные поля.
Рассмотрим поле некоторой консервативной силы.
В таком поле работу по перемещению тела из т.1 в т.2 можно выразить уже не криволинейным, а определенным интегралом:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}$$

.

Введем такую функцию $U(\vec{r})$, что $\vec{F}d\vec{r} = -dU(\vec{r})$, тогда

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = -\int_{U_1}^{U_2} dU(\vec{r}) = U_1 - U_2$$

$$\boxed{A_{12} = -\Delta U} \qquad (1)$$

Назовем эту функцию потенциальной энергией.

Таким образом, ***работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии частицы в потенциальном силовом поле (1).***

Консервативные силы иначе называют потенциальными силами.

Введем определение.

Характеристика тела является **функцией состояния этого тела**, если ее приращение, соответствующее переходу частицы из одного состояния в другое, не зависит от пути , по которому совершается переход, а зависит только от начального и конечного состояний тела.

Функция состояния может характеризовать также систему тел.

Потенциальная энергия является **функцией состояния тела,** так как зависит только от его положения.

Свойства потенциальной энергии:

1) Потенциальная энергия является **функцией состояния частицы,** так как зависит только от ее положения. Так как $A=U_1-U_2$, то выражение для потенциальной энергии:

в поле силы тяжести $A = mgh_1 - mgh_2$, $U = mgh$

в поле упругой силы $A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$, $U = \frac{kx^2}{2}$

В поле силы тяготения $A = G\frac{m_1m_2}{r_2} - G\frac{m_1m_2}{r_1}$, $U = -G\frac{m_1m_2}{r}$

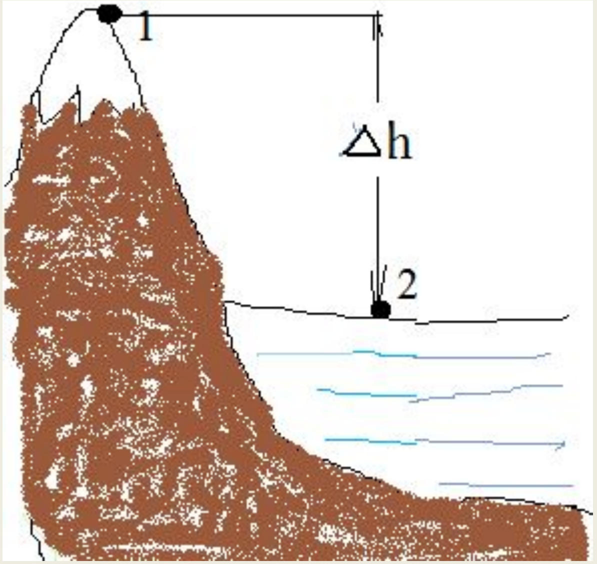
2) Величина U является **аддитивной**, то есть если в области движения частицы имеется несколько потенциальных силовых полей, то полная потенциальная энергия частицы равна сумме потенциальных энергий ее в каждом из полей в отдельности: $U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) + \ldots + U_n(\vec{r});$

$$U_{\text{сист}} = U_{\text{взаимод.тел сист.}} + U_{\text{сист.во внешн.силовом поле}}$$

3) Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной величины.

Действительно, физический смысл имеет разность значений U (см. выражение(1)), а не ее абсолютное значение. Это свойство позволяет выбирать нулевое значение потенциальной энергии в произвольной точке силового поля. Начало отсчета может быть в любой точке.

Пример:



$$A_{12} = mg(h_1 - h_2)$$

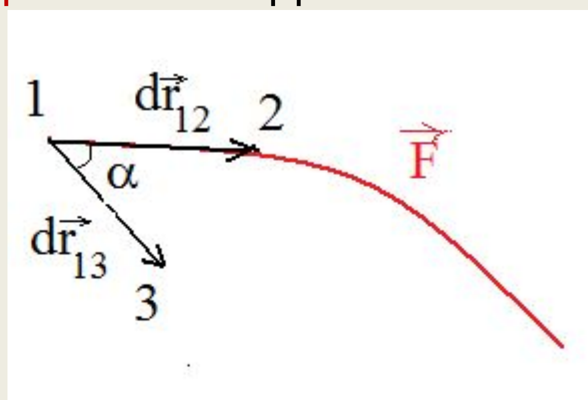
3.6 Связь силы и потенциальной энергии. Понятие градиента.

Пусть м.т. находится в потенциальном силовом поле.

$$\vec{F}d\vec{r} = Fdr_F = -dU \ ,$$

отсюда $\boxed{F = -\dfrac{dU}{dr_F}}$ -- **Вывод 1**: сила равна быстроте убывания потенциальной энергии вдоль линии действия силы.

Рассмотрим элементарное перемещение на равные расстояния - вдоль линии действия силы на dr_{12} и под углом α к ней на dr_{13}.



$$|d\vec{r}_{12}| = |d\vec{r}_{13}| = dr$$

$$-dU_{12} = Fdr$$

$$-dU_{13} = Fdr \cdot cos\alpha$$

Вывод 2: максимальное убывание потенциальной энергии происходит в направлении действия силы.

Найдем координатную зависимость $\vec{F}(U)$.

Выражение $\vec{F}d\vec{r} = -dU$ представим в координатной записи:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz) \quad (1)$$

Из (1):

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Запишем вектор силы:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}). \quad (2)$$

<u>Математическая справка:</u> В математике вектор с проекциями $\frac{\partial a}{\partial x}; \frac{\partial a}{\partial y}; \frac{\partial a}{\partial z}$ называется градиентом скалярной функции $a = a(x, y, z)$:

$$grad\ a = \nabla a = \frac{\partial a}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k}$$

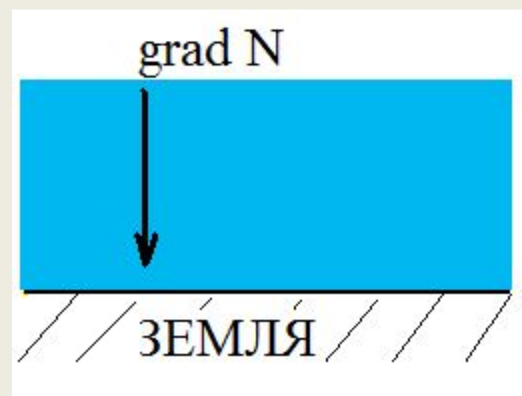
Символом ∇ (набла) обозначен **оператор**, который в декартовой системе координат имеет вид

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

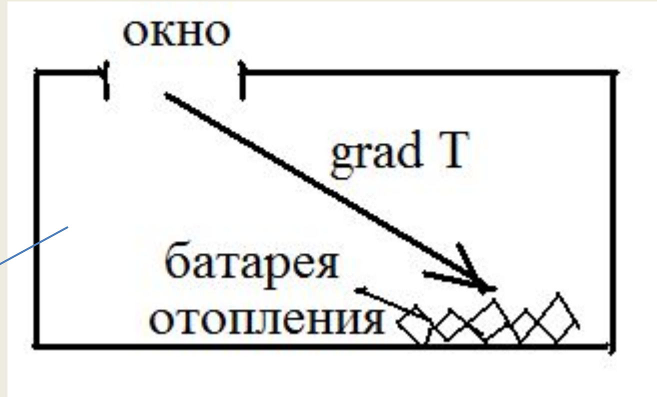
Градиент скалярной функции $a = a(x, y, z)$ равен векторной сумме скоростей изменения *a* по координатам и определяет величину и направление максимальной скорости возрастания *a* в данной точке пространства.

Пример 1

Под скалярной функцией понимается N(x,y,z) – концентрация молекул в воздухе.



Пример 2



аудитори
я

Скалярной функцией является Т – температура воздуха.

Из (2) следует:

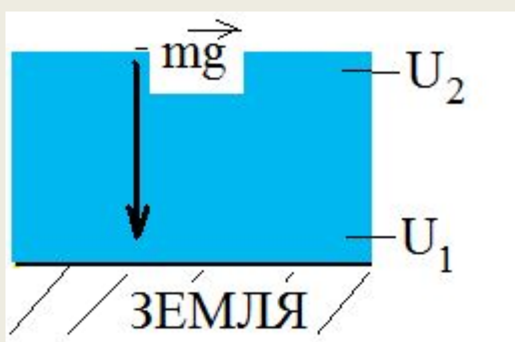
$$\vec{F} = -\nabla U = -gradU$$

В одномерном случае U(x):

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Т.е. сила, ***действующая на м.т. в потенциальном силовом поле, равна по величине и направлению максимальной скорости убывания ее потенциальной энергии в окрестности данной точки.***

Пример 3



$$U = mgh$$

3.7 закон сохранения механической энергии

Механической энергией Е называется сумма кинетической и потенциальной энергии частицы, то есть

E = T+U.

Можно назвать 2 причины существования механической энергии:

- движение, обладание частицы неким импульсом,
- нахождение в силовом потенциальном поле (грав., эл.-стат.)

Полная механическая энергия является **аддитивной величиной**, что непосредственно следует из свойств кинетической и потенциальной энергии.

Пусть на м.т. действуют консервативная и неконсервативная силы ; определим элементарную работу при перемещении точк $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \left(\vec{F}_{\text{к}} + \vec{F}_{\text{нк}}\right) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{\text{к}} d\vec{r} + \vec{F}_{\text{нк}} d\vec{r} \qquad (1)$$

$$\delta A = dT \qquad \vec{F}_{\text{к}} d\vec{r} = -dU$$

Из (1) получаем: $$dT + dU = \vec{F}_{нк} d\vec{r}$$

$$d(T + U) = dE$$

$$dE = \vec{F}_{нк} d\vec{r} \quad (2)$$

Последнее соотношение называется ***законом превращения полной механической энергии частицы***.
Из него следует, что полная механическая энергия частицы может изменяться только за счет работы неконсервативных сил.
Частный случай (2) : если $\vec{F}_{нк} = 0$, то $E = T + U = const$

Отсюда следует ***закон сохранения полной механической энергии одной частицы:***
Если на частицу действуют только консервативные силы, то ее полная механическая энергия сохраняется,

Законы легко обобщаются на систему частиц. В этом случае механическая энергия включает в себя кинетическую энергию частиц системы, потенциальную энергию взаимодействия частиц между собой $U_{вз}$, а также кинетическую энергию системы как целого T и потенциальную энергию системы во внешних потенциальных силовых полях U :

$$E = \sum_{i=1}^{N} T_i + U_{\text{вз}} + U_{\text{внеш}} + T$$

Закон сохранения полной механической энергии для системы частиц:

Полная механическая энергия системы частиц сохраняется, если на частицы системы действуют только консервативные силы, как внутренние, так и внешние.

В тех случаях, когда на частицы системы действуют неконсервативные силы, полная механическая энергия не сохраняется, поэтому закон сохранения механической энергии не выполняется.

Механическая энергия при этом переходит в другие виды энергии в количестве, равном работе неконсервативных сил.

3.8 Потенциальные кривые. Виды равновесия.

Рассмотрим одномерное движение частицы вдоль оси ***OX*** в потенциальном силовом поле.

Из закона сохранения механической энергии следует, что

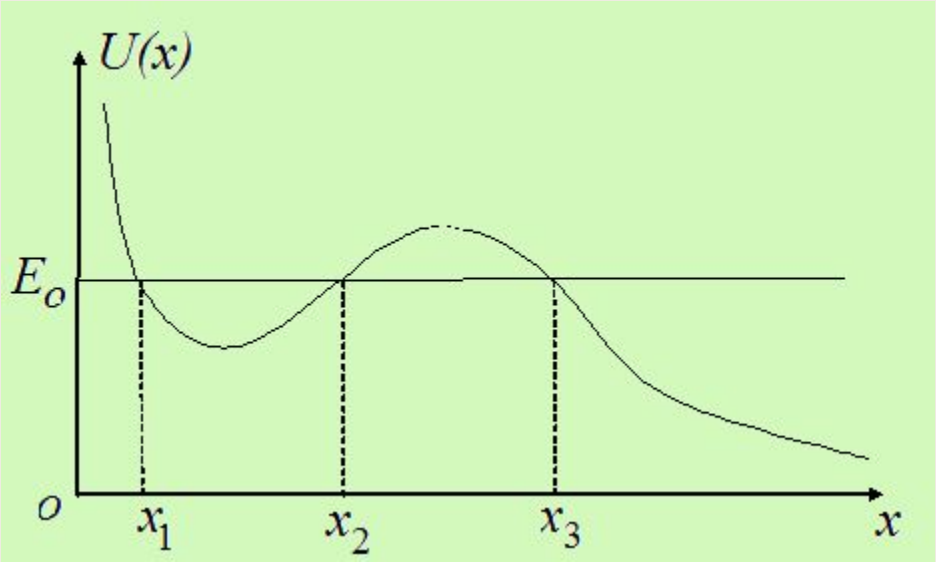
$$\frac{m\upsilon^2}{2}+U(x)=const=E_0,$$

или $$\upsilon=\sqrt{\frac{2}{m}(E_0-U)}$$

Так как скорость частицы - действительная величина, то это условие определяет области разрешенного движения и имеет вид:

$$E_0 \geq U(x).$$

Пусть потенциальная U(x) и полная механическая энергия E_0 таковы, как изображено на рис.



Движение частицы возможно в областях:

$$x_1 \le x \le x_2, x \ge x_3,$$

1) Ограниченная область $x_1 \le x \le x_2$ называется ***потенциальной ямой*** . Движение в потенциальной яме называется ***финитным***

2) Область $x_2<x<x_3$ запрещенная область, которая называется ***потенциальным барьером***. Здесь $\Delta x = x_3 - x_2$ - ширина потенциального барьера.

3) Движение в области $x_3 \le x < \infty$ ***инфинитно***, так как происходит в неограниченной области пространства.