Лекцию читает

кандидат физико-математических наук,

доцент

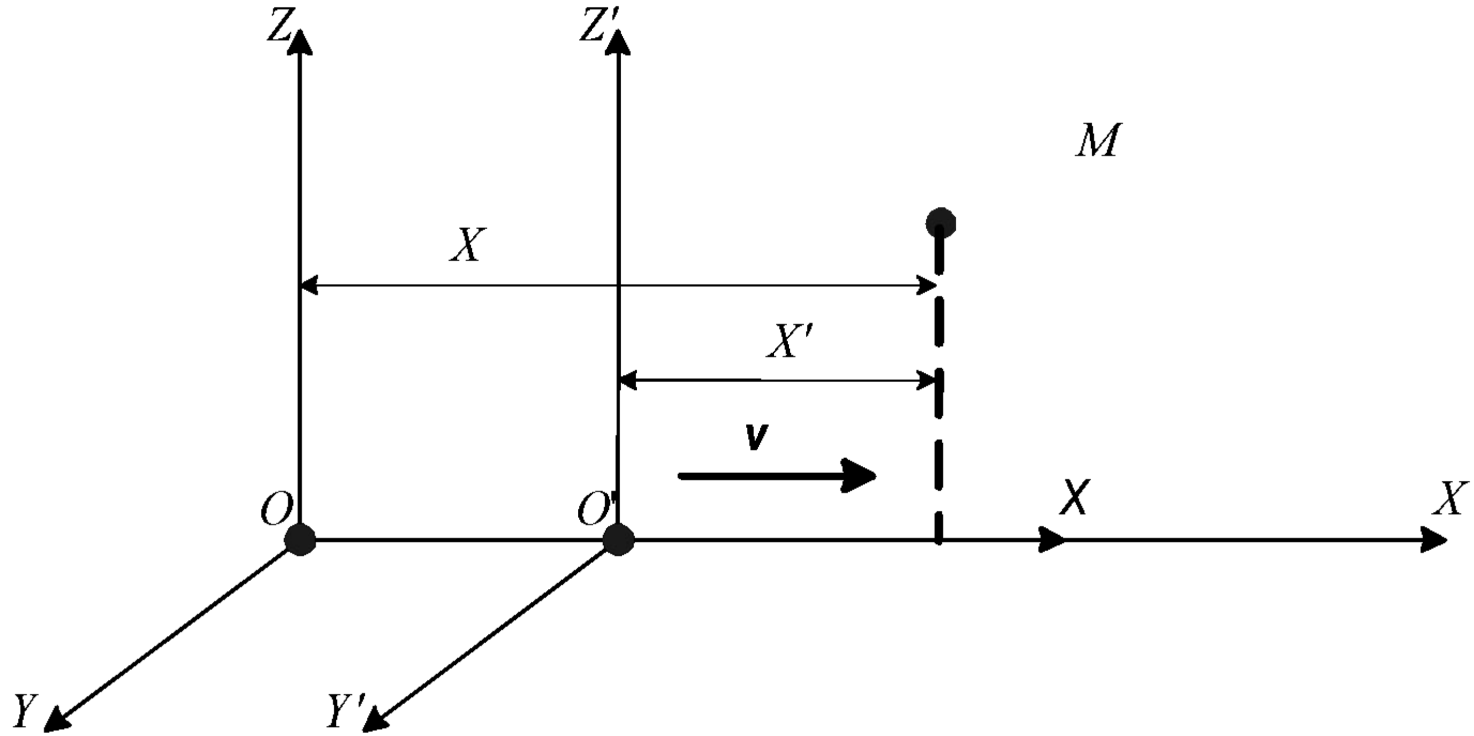
Кузьмин Юрий Ильич

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Принцип относительности Галилея

Принцип относительности движения был сформулирован в механике для инерциальных систем еще Галилеем. Однако в классической механике считалось, что время во всех таких системах течет одинаково, т. е. выступает как абсолютная величина. Из этого вытекало, что *инвариантными* (неизменными) относительно преобразований Галилея были лишь законы механики, а законы оптики и электродинамики уже оказывались *неинвариантными*.

В 1905 году Эйнштейном была сформулирована *специальная теория относительности*, по новому трактующая понятия о пространстве и времени, и были выведены новые формулы для преобра зования координат и времени, а также новые (*релятивистские*) законы движения быстрых частиц. Специальная теория относительности предполагает инвариантность в инерциальных системах отсчета не только законов механики, но всех законов физики вообще, в том числе законов электромагнетизма.



Под инерциальной системой отсчета в физике понимается такая система отсчета, в которой выполняются законы Ньютона.

Закон сложения скоростей

Будем считать также, что координаты (*y*, *x*) и (*y´*, *x´*) в этих системах не изменяются, т. е. возможные повороты систем отсутствуют и

.

$$y' = y, \quad z' = z.$$

$$\boldsymbol{x = x' + vt.} \qquad \boldsymbol{x' = x - vt.} \qquad \boldsymbol{t' = t.}$$

$$u_y = u'_y, \qquad u_z = u'_z,$$

$$u_x = u_x' + v$$

Закон сложения скоростей в классической механике также представляет собой линейную зависимость или линейное преобразование. Последнее говорит о том, что *величина относительной скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не будет изменяться*.

Инвариантность уравнений динамики

Установив связь между координатами и скоростями в двух любых инерциальных системах отсчета, можно определить для этих систем и соотношения между ускорениями и силами. Для этого продифференцируем по времени выражение (Сл.6) и учтем, что скорость *u* есть величина постоянная. В результате получим:

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} \qquad \frac{d\boldsymbol{u}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt},$$

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$$

Если теперь учесть также, что в классической механике постулируется независимость массы тела от скорости его движения, то в рассматриваемых инерциальных системах отсчета *O* и *O'* масса должна быть одинаковой (инвариантной), т. е.

$$m' = m. \qquad m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a}. \qquad \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}.$$

Из вышеизложенного следует вывод, что никакими механическими опытами, выполненными в данной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли эта система или движется равномерно, т. е. с постоянной скоростью.

С этим положением на опыте столкнулся еще Галилей, изучавший механические движения тел (свободное падение, колебание маятника и др.) в закрытой каюте покоящегося и равномерно движущегося корабля. Он пришел к выводу, что *механические движения тел в инерциальных системах не изменяются*, что теоретически подтверждается выражением (Сл.9).

Инвариантность законов физики в инерциальных системах

Покажем, что преобразования Галилея для законов электродинамики и оптики не являются инвариантными в инерциальных системах. Рассмотрим уравнение сферической волновой поверхности для электромагнитной волны в двух различных инерциальных системах отсчета в неподвижной системе O и в подвижной системе O'.

В системе O общее уравнение такой сферической поверхности радиуса R запишется в виде:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

используя преобразования Галилея (Сл.6), получим

$$\left(x - vt\right)^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0,$$

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2\right) - 2v\,xt + v^2 t^2 = 0$$

Из сравнения двух выражений видно, что *уравнение сферической волновой поверхности не инвариантно по отношению к преобразованию* Галилея.

Исторически волновая теория света вначале рассматривала световые волны как волны, распространяющиеся в некоей гипотетической идеально упругой среде, называемой *эфиром*.

При движении Земли по орбите вокруг Солнца должен был бы возникать "эфирный ветер ".

В 1881 г. Майкельсоном был осуществлен оптическими средствами весьма точный опыт с попыткой обнаружения движения Земли относительно эфира, т. е. опыт по установлению наличия эфирного ветра. Однако эфир он не смог обнаружить, т. е. *результат опыта был отрицательным.*

Постулаты специальной теории относительности и преобразования Лоренца

Эйнштейн предположил, что *все законы физики, в том числе и законы электродинамики и оптики, должны быть инвариантными по отношению к инерциальным системам отсчета.* Это предположение (постулат) считается основным в теории относительности Эйнштейна и называется *принципом относительности*.

Вторым постулатом специальной теории относительности является *принцип постоянства скорости света в вакууме*. Согласно этому принципу, *скорость света в вакууме не зависит от движения наблюдателей и источников и является величиной постоянной,* равной c = 3·108 м/с.

Этот второй постулат основан на *опыте Майкельсона*, которому не удалось обнаружить зависимость скорости света в вакууме от скорости движения источника или наблюдателя.

$$\alpha' x' = x - vt \qquad \alpha x = x' + vt'$$

Учитывая, что все инерциальные системы координат равноправны, необходимо предположить, что коэффициенты α и α' в выражениях и одинаковы, т. е. что

$$\alpha' = \alpha$$

$$\alpha x' = x - vt,$$

$$\alpha x = x' + vt'.$$

На основании второго постулата теории относительности, можно записать еще два уравнения:

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} = c$$

$$\alpha c t' = (c - v)t.$$

$$\alpha c t = (c + v)t'.$$

$$\frac{\alpha c}{c + v} = \frac{c - v}{\alpha c}$$

$$\alpha^2 c^2 = c^2 - v^2.$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad y' = y; \qquad z' = z.$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Полученные выражения , определяющие преобразования координат и времени в специальной теории относительности, называются *преобразованиями Лоренца.* Такое название объясняется тем, что еще до появления теории относительности Эйнштейна Лоренц из рассмотрения движения электрона получил формулу, определяющую сокращения его линейных размеров в направлении движения

Легко показать, что в случае медленного движения тел или частиц, когда *v* << *c,* преобразования Лоренца переходят в *преобразования Галилея*.

$$\frac{v^2}{c^2} << 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{v}{c^2} << 1$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1.$$

Поэтому *преобразования Лоренца в теории относительности справедливы для быстродвижущихся частиц или для частиц, движущихся со скоростью, близкой к скорости света.*

Преобразования интервалов длин и времени

Одновременность событий

Предположим, что в различных точках с координатами $x1$ и $x2$ неподвижной системы O (см. рис. Сл.5) происходят одновременно ($t2 = t1$) два события (например, вспышки света). Посмотрим, будут ли эти события одновременными, если рассматривать их в подвижной системе O'. Для этого используем выражения (Сл.18) и составим выражение для длительности интервала времени ($t2' - t1'$) в подвижной системе O:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' - t_1' = -\frac{v(x_2 - x_1)}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq 0$$

Следовательно, два события, которые в системе *O'* были одновременными, в системе *O* оказываются неодновременными.

Интервал времени между двумя событиями

На основании рассмотренного выше и исходя из преобразований Лоренца можно установить количественную связь между интервалами времени, описывающими одни и те же события в системах *O* и *O′*. Предположим, что в системе *O* в данной точке ($x2 – x1$) происходят последовательно два события, интервал времени между которыми равен:

$$\Delta t = t2 - t1. \qquad \Delta t' = t2' - t1'$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из формулы видно, что: **$\Delta t' > \Delta t$,**

так как $$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1.$$

Следовательно, *в движущейся системе координат интервал времени между событиями удлиняется*

Поэтому принято говорить, что *в движущейся системе отсчета часы идут медленнее, чем в неподвижной системе отсчета*.

Следует заметить, что указанный здесь эффект удлинения интервалов времени в движущейся системе отсчета имеет место лишь в том случае, когда величина

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

отлична от 1, т. е. когда скорость движения тела (системы отсчета) сравнима по порядку величины со скоростью света в вакууме.

Изменение длины при переходе к движущейся системе отсчета

Предположим теперь, что в неподвижной системе отсчета *O* длина стержня, координаты концов которого $x1$ и $x2$, равна $l = x2 - x1 = \Delta x$. При этом, как обычно, считается, что измерение координат происходит одновременно как в одной, так и в другой системах отсчета.

$$x_2' - x_1' = \Delta x' = l' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

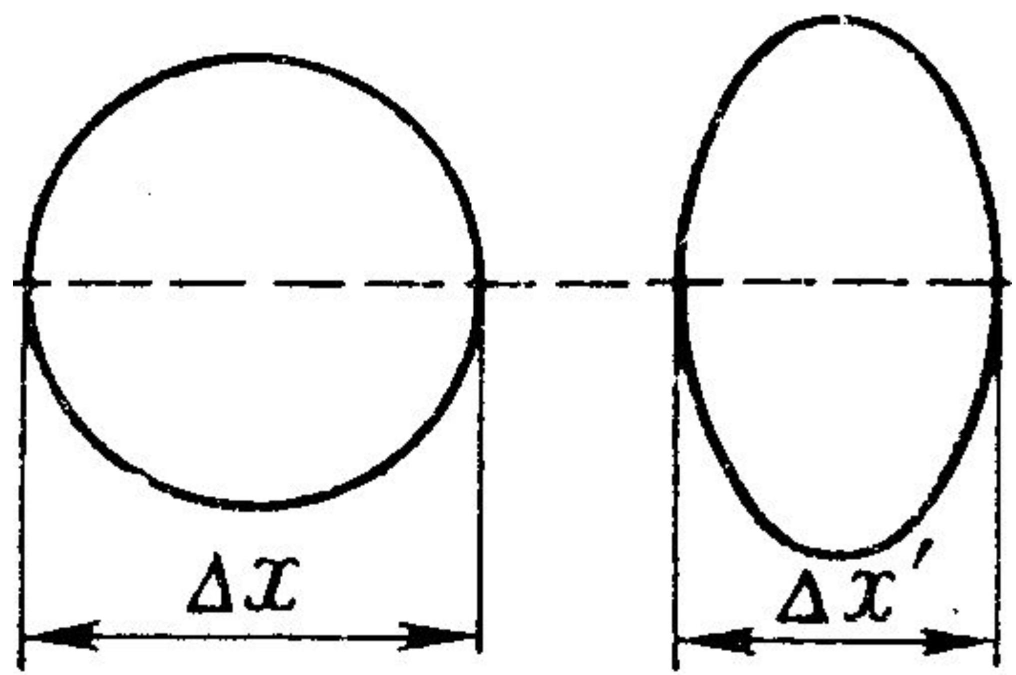
При этом условии из (Сл.25) имеем:

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)$$

$$l' = x_2' - x_1' = \Delta x' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Следовательно, в движущейся системе координат имеет место сокращение линейных размеров тела в направлении движения, причем это сокращение будет тем больше, чем больше скорость движения системы.



Таким образом, на основании преобразований координат и времени в специальной теории относительности можно заключить, что понятие одновременности событий, интервала длины и интервала времени есть понятия относительные, которыми можно воспользоваться только для данной системы отсчета.

Понятие о четырехмерном пространстве

В специальной теории относительности формально можно рассматривать четырехмерное пространство с координатами (*x*1, *x*2, *x*3, *x*4), равными:

$$x_1 = x; \qquad x_2 = y; \qquad x_3 = z; \qquad x_4 = ict,$$

где *c* — скорость света в вакууме

Здесь мнимая координата *ict* выступает как четвертая координата, пропорциональная времени *t.* В таком гипотетическом (воображаемом) четырехмерном пространстве (реальным является обычное трехмерное пространство) событие, которое происходит в данный момент времени в данной точке, соответствует так называемой *мировой точке*. Совокупность таких точек определяет *мировую линию*.

$$\Delta S^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$\Delta S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

$$\Delta S'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Можно утверждать, что квадраты интервалов длины будут одинаковы:

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2$$

Это доказывает, что такое уравнение для сферической волновой поверхности (световой волны) также будет инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Механика элементарных частиц. Релятивистская механика

Закон сложения скоростей в релятивистской механике

Предположим, что в системе *O* связь между координатой и скоростью будет:

$$x = u_x t,$$

а в системе *O'*:

$$x' = u_x' t$$

$$\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = u_x' \cdot \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x - vt = u_x'\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

$$x = \frac{v + u_x'}{1 + \dfrac{vu_x'}{c^2}} \cdot t \qquad\qquad u_x = \frac{v + u_x'}{1 + \dfrac{vu_x'}{c^2}}.$$

Последнее выражение определяет закон сложения продольных составляющих скоростей в релятивистской механике.

Импульс и энергия в релятивистской механике

В соответствии с первым постулатом специальной теории относительности этот закон остается инвариантным и в релятивистской механике, если правильно определить импульс. Импульс тела (частицы) в релятивистской механике определяется по формуле:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

где *m*0 – масса частицы, которая остается инвариантной во всех инерциальных системах отсчета (иногда ее называют *массой покоя* частицы).

Для малых скоростей движения ($v \ll c$) импульс (Сл.37) принимает обычное выражение, известное из классической механики:

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$dW = (\boldsymbol{F}\mathbf{v})dt = \mathbf{v}\,d\left(\frac{m_0 \mathrm{v}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right)$$

Дифференцируя правую часть выражения по скорости, получим

$$dW = \frac{m_0 \mathbf{v}\, d\mathrm{v}}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$dW = \frac{m_0 c^2 d\left(\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + \mathrm{const.}$$

Если константу , следуя Эйнштейну, принять равной нулю, то формула для энергии быстро движущейся частицы (тела) запишется так:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

, Из (4.62) следует, что при v=0 энергия частицы будет равна:

$$W_0 = m_0 c^2$$

Энергию *W*0 можно, очевидно, трактовать как некоторую *внутреннюю энергию частицы (энергию покоя)*.

Кинетическая энергия *Wk* частицы по смыслу должна быть равна разности этих энергий:

$$W_k = W - W_0$$

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

При малых скоростях движения формула (Сл.42) переходит в обычную формулу для кинетической энергии, известную из классической механики. В самом деле, при $v \ll c$ получим:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

$$\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

$$W_k \approx m_0 c^2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}-1\right)$$

$$W_k \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

Кроме того, в релятивистской механике часто используется формула, непосредственно связывающая энергию и импульс частицы.

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2$$

$$W = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

Формула взаимосвязи массы и энергии

Используя формулы предыдущего пункта, можно установить связь между изменениями энергии покоя и массы тела.

$$\Delta W = \Delta m c2.$$

Эта формула называется *законом взаимосвязи энергии и массы*.

Эта формула, как известно, имеет большое значение для атомной и ядерной физики, и она подтверждается на опыте.

Точно так же известно, что при реакции деления ядра урана ($^{92}_{235}\mathrm{U}$) под воздействием медленных нейтронов суммарная масса продуктов деления оказывается меньше суммарной массы исходных продуктов на определенную величину Δm. Если это изменение массы пересчитать по формуле (Сл.45) на изменение энергии ΔW, то получается энергия, которая и соответствует энергии связи (атомной энергии), которая выделяется при протекании данной реакции.