

Радиотехнические цепи и сигналы

Кафедра радиотехники СФУ

Проф. Кашкин В.Б.

Радиотехнические цепи и сигналы

Целью курса является изучение **фундаментальных закономерностей**, связанных с анализом и синтезом сигналов, передачей информации, обработкой и преобразованием сигналов в различных цепях, применительно к различным радиотехническим системам. Студент должен правильно выбирать математический аппарат при анализе/синтезе различных сигналов и цепей; выявлять связь математической модели и реального процесса/цепи.

Программа

1. Канал связи, его составные части.
2. Свойства сигналов: длительность, динамический диапазон, энергия, мощность, ортогональность и когерентность сигналов.
3. Разложение произвольного сигнала по заданной системе базисных функций.
4. Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье. Ряд Фурье-Уолша.
5. Периодические сигналы. Тригонометрический ряд Фурье.
6. Гармонический анализ непериодических сигналов. Интеграл Фурье.
7. Свойства преобразования Фурье (сдвиг во времени, изменение масштаба, свойство линейности, дифференцирование и интегрирование, смещение спектра, спектр произведения и др.).
8. Энергетические характеристики периодических и непериодических сигналов.
9. Эффективная длительность и ширина спектра сигнала.
10. Общая характеристика радиосигналов. Радиосигналы с амплитудной модуляцией (АМ).
11. Спектральные характеристики сигналов при гармонической угловой модуляции.
12. Радиосигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ).
13. Сигналы с амплитудной импульсной модуляцией (АИМ) и их свойства.
14. Линейные цепи с постоянными параметрами. Импульсная характеристика. Коэффициент передачи. АЧХ и ФЧХ.
15. Временной и спектральный методы анализа передачи сигналов через линейные цепи с постоянными параметрами.

16. Дискретизация непрерывных сигналов. Теорема Котельникова во временной и частотной областях.
17. Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразования.
18. Дискретное преобразование Фурье и его свойства.
19. Узкополосные сигналы (огибающая, фаза и частота узкополосного сигнала).
20. Дискретизация узкополосных сигналов.
21. Аналитический сигнал. Огибающая и фаза аналитического сигнала. Преобразование Гильберта, его свойства.
22. Тепловой шум. Формула Найквиста.
23. Стационарные случайные процессы. Плотность вероятности. Физический смысл математического ожидания и дисперсии.
24. По каким формулам вычисляются на компьютере среднее значение, дисперсия и функция автокорреляции случайного процесса?
25. Стационарные случайные процессы. Спектр мощности и его свойства.
26. Функция корреляции стационарного случайного процесса и ее свойства.
27. Авторегрессионная модель стационарного случайного процесса.
25. Корреляционный анализ детерминированных сигналов.
26. Белый шум. Спектр мощности случайного процесса на выходе линейной цепи при воздействии на вход белого шума.
27. Теорема Винера-Хинчина.
28. Шум квантования. Вычисление среднего и дисперсии.

Литература

1. Иванов М.Т., Сергиенко А.Б., Ушаков В.Н. Теоретические основы радиотехники. – М.: Высшая школа, 2008. – 306 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1983 г., 1988 г, 2000 г. – 462 с.
3. Васильев В., Гуров И. Компьютерная обработка сигналов. СПб: БХВ –Санкт-Петербург, 1998 г.
4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1977 г, 1986 г, 1994 г. – 512 с.

М.Т. ИВАНОВ А.Б. СЕРГИЕНКО
В.Н. УШАКОВ


ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ



С.И.Баскаков

Радио/ технические цепи и сигналы



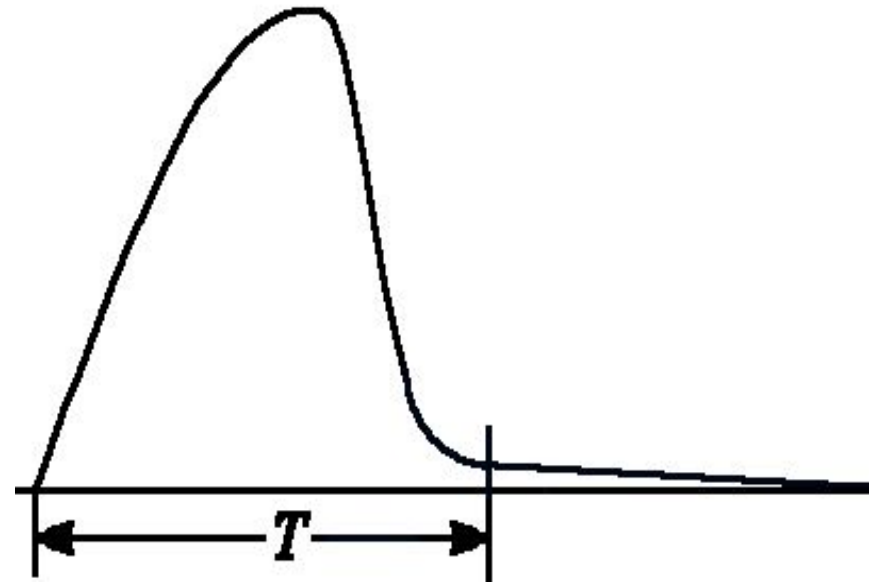
 ВШ ВЫСШАЯ ШКОЛА

Наименование частотного диапазона	Границы диапазона	Наименование волнового диапазона	Границы диапазона
Крайние низкие, КНЧ	3 - 30 Гц	Декамегаметровые	100 - 10 Мм
Сверхнизкие, СНЧ	30 - 300 Гц	Мегаметровые	10 - 1 Мм
Инфранизкие, ИНЧ	0,3 - 3 кГц	Гектокилометровые	1000 - 100 км
Очень низкие, ОНЧ	3 - 30 кГц	Мириаметровые	100 - 10 км
Низкие частоты, НЧ	30 - 300 кГц	Километровые	10 - 1 км
Средние, СЧ	0,3 - 3 МГц	Гектометровые	1 - 0,1 км
Высокие частоты, ВЧ	3 - 30 МГц	Декаметровые	100 - 10 м
Очень высокие, ОВЧ	30 - 300 МГц	Метровые	10 - 1 м
Ультравысокие, УВЧ	0,3 - 3 ГГц	Дециметровые	1 - 0,1 м
Сверхвысокие, СВЧ	3 - 30 ГГц	Сантиметровые	10 - 1 см
Крайне высокие, КВЧ	30 - 300 ГГц	Миллиметровые	10 - 1 мм
Гипервысокие, ГВЧ	300 - 3000 ГГц	Децимиллиметровые	1 - 0,1 мм

Важнейшие физические характеристики сигнала:
длительность, энергия, динамический диапазон

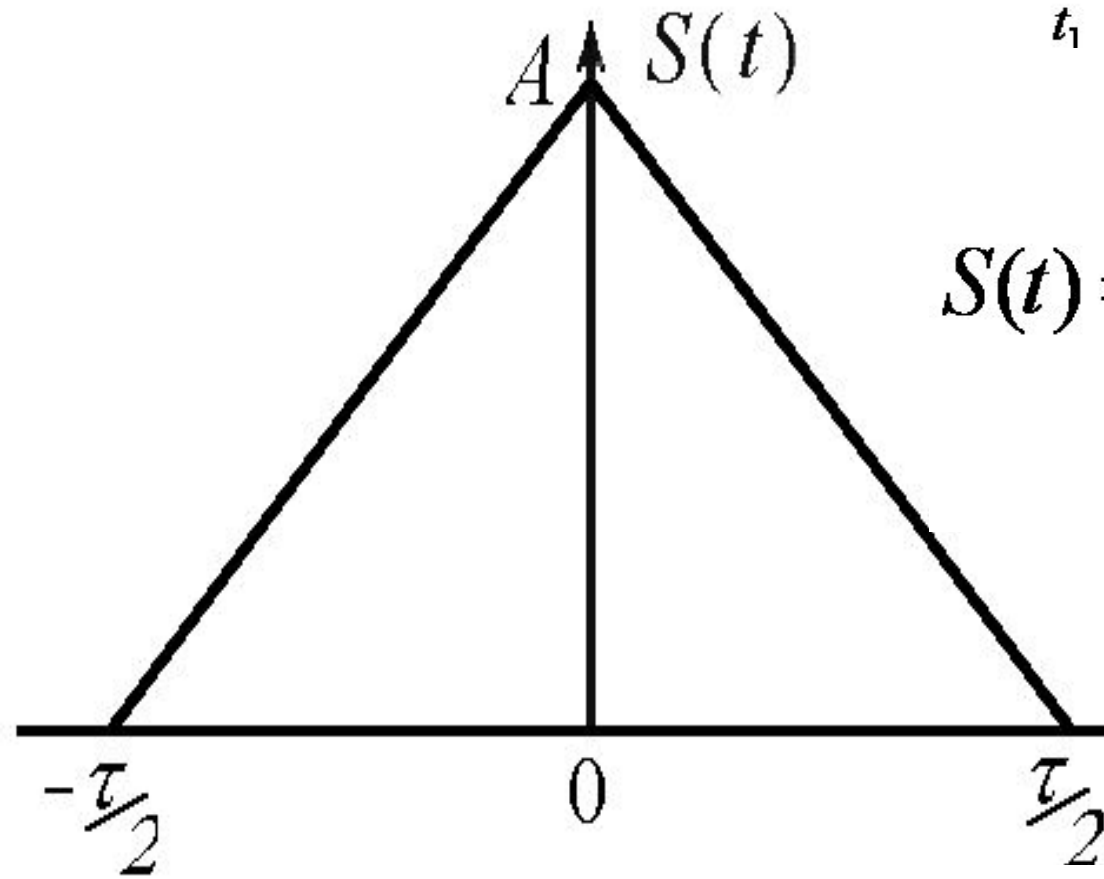
Реальные сигналы обладают конечной длительностью $(t_2 - t_1)$. Однако в качестве математических моделей сигнала можно использовать функции, заданные на интервале времени $[0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$, лишь бы энергия сигнала оставалась конечной. Длительность можно определить как промежуток времени, в пределах которого сосредоточена основная доля энергии, например, ее 90 % или 95 %. При $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$ длительность T может быть найдена как решение уравнения:

$$\int_0^T S^2(t) dt = 0,95 \int_0^{\infty} S^2(t) dt.$$



Энергия сигнала определяется как

$$E = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt,$$



$$S(t) = \begin{cases} At, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0 \\ A\left(1 - \frac{2t}{\tau}\right), & 0 < t \leq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$E = 2 \int_0^{\tau/2} A^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt$$

Если $T = \tau$, то $E = \frac{7}{12} A^2 \tau$

Допустимы *линейные операции* над сигналами:

1. Для всех $S_i(t), S_j(t)$ существует сумма $S(t) = S_i(t) + S_j(t)$, равенство должно выполняться для всего динамического диапазона сигналов $S_i(t), S_j(t)$. Это отражает реальную ситуацию, когда, например, сигналы от различных радиостанций складываются в антенне, к тому же добавляются помехи.

2. Для любого сигнала $S_i(t)$ и любого вещественного числа α определен сигнал $S = \alpha S_i(t)$. Это отражает реальную ситуацию: возможность усиления или ослабления сигнала.

3. Возможно задерживать сигнал: $S_1(t) = S(t - t_0)$
Говорят, что сигналы с конечной энергией, для которых определены линейные операции, относятся к пространству L^2 .

Расстояние между сигналами $S_i(t)$ и $S_j(t)$

$$\rho(S_i, S_j) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} [S_i(t) - S_j(t)]^2 dt},$$

Скалярное
сигналов

$$(S_i, S_j) = \int_{t_1}^{t_2} S_i(t) S_j(t) dt.$$

Скалярное произведение комплексных сигналов

$$(S_i, S_j) = \int_{t_1}^{t_2} S_i(t) S_j^*(t) dt,$$

Скалярное произведение двух ортогональных сигналов равно

$$\begin{aligned}(f_i, f_j) &= 0, \text{ если } i \neq j; \\ (f_i, f_j) &= E_i, \text{ если } i = j.\end{aligned}$$

Система ортогональных функций $\{f_i(t)\}$ из L^2 может быть использована как *координатный базис* в линейном пространстве, если эти функции являются линейно независимыми. Это означает, что

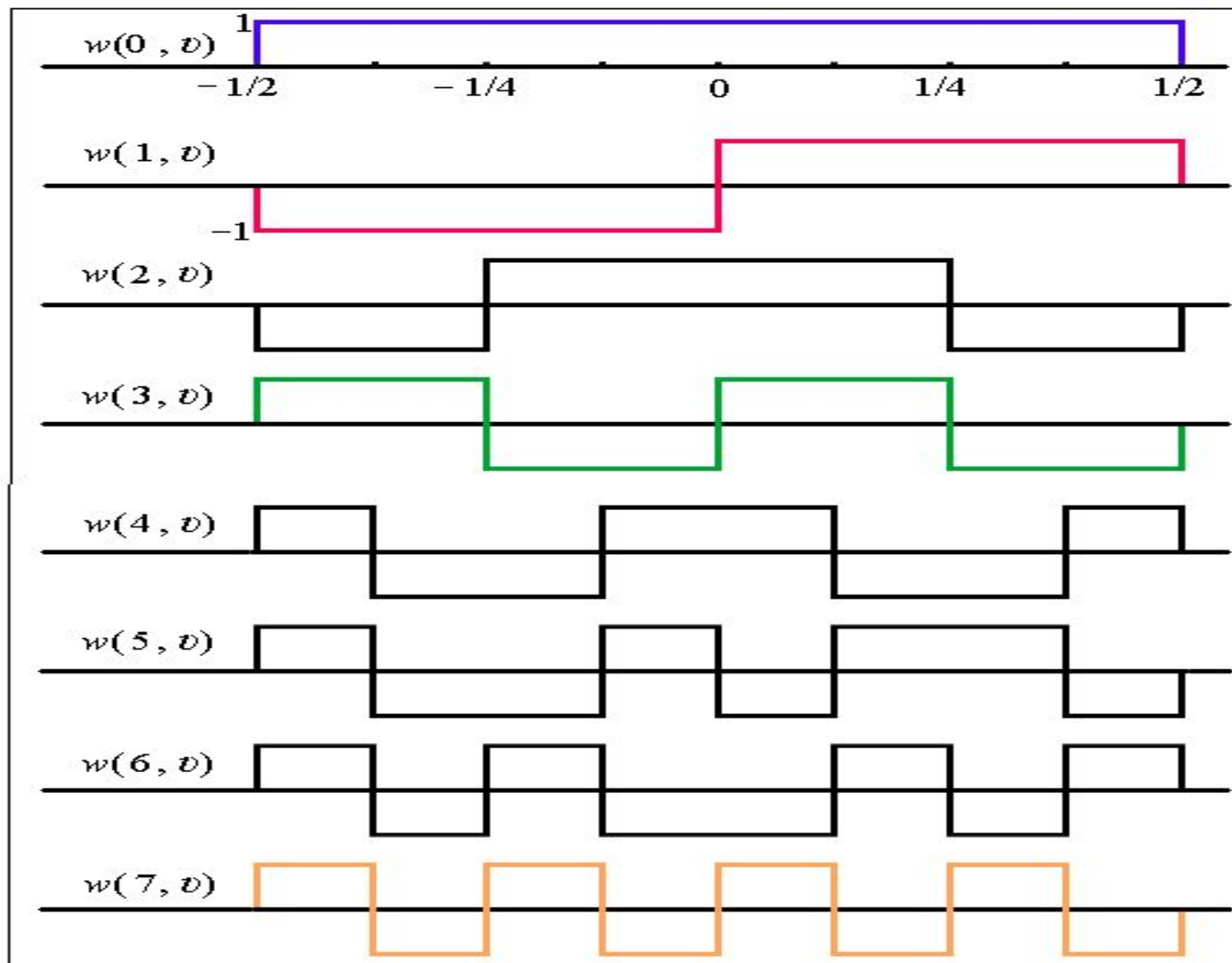
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i = 0$$

тогда и только тогда, когда все числа $a_i \equiv 0$.

Любой сигнал $s(t)$ из L^2 может быть разложен в ряд

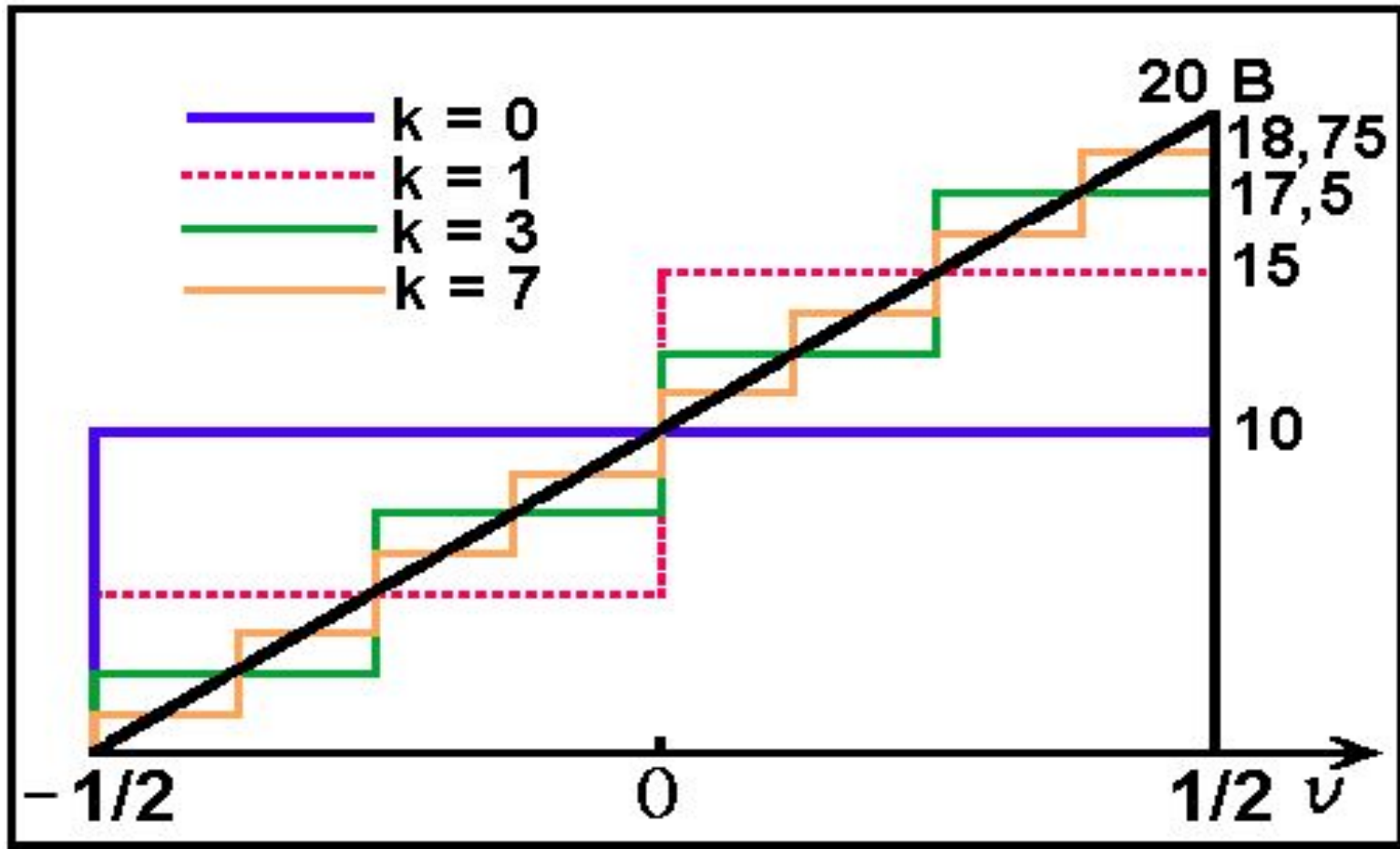
$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i. \quad \text{Обобщенный ряд Фурье по системе функций } \{f_i(t)\}.$$

Ортогональная система *функций Уолша* $wal(n, u)$ которая на отрезке $[-1/2, 1/2]$ принимает значения ± 1 . Здесь u – безразмерный аргумент.



Разложение пилообразного импульса $A = 20$ В в ряд по функциям Уолша, сигнал аппроксимирован ступенчатой кривой. Первое приближение $k = 0$, погрешность аппроксимации $\delta = 50\%$. Второе $k = 1$, погрешность $\delta = 25\%$. Третье $k = 3$, погрешность $\delta = 12,5\%$.

Четвертое $k = 7$, $\delta =$ $C_0 = 10; C_1 = 5; C_3 = -2,5; C_7 = -1,25$



Наиболее распространена система ортогональных тригонометрических функций. Любая периодическая функция $s(t)$ с периодом T , с конечной энергией интервале $[0, T]$, может быть разложена в ряд по системе функций в *ряд Фурье*

$$f_0(t) = \frac{1}{T};$$

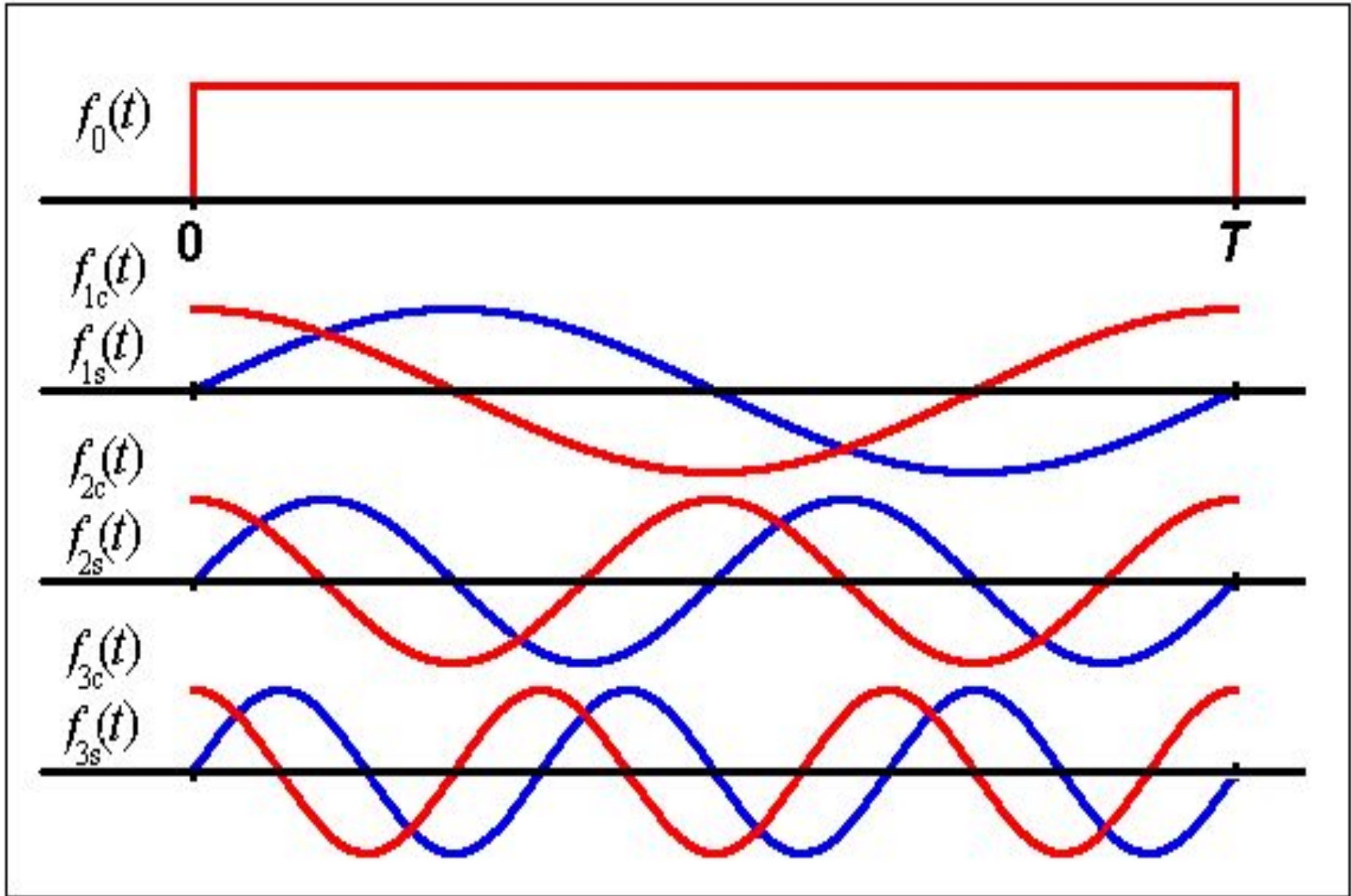
$$f_{1s}(t) = \frac{2}{T} * \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right);$$

$$f_{1c}(t) = \frac{2}{T} * \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

.....

$$f_{ns}(t) = \frac{2}{T} * \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right);$$

$$f_{nc}(t) = \frac{2}{T} * \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$



Система тригонометрических функций

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad c_0 - \text{«постоянная составляющая»}$$

сигнала

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega_0 t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega_0 t) dt;$$

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)].$$

$$a_n = c_n \cos \varphi_n, \quad b_n = c_n \sin \varphi_n, \quad \varphi_n = \arcsin(b_n / a_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n).$$

c_n – амплитуда n -ой гармонической составляющей с частотой $\omega_n = n\omega_0$ и фазой φ_n . Частота первой гармоники $\omega_1 = \omega_0 = 2\pi/T$ – это частота повторения

Экспоненциальная форма тригонометрического ряда Фурье

По формулам Эйлера $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

где j – мнимая единица. Положим $\varphi_{-n} = -\varphi_n$

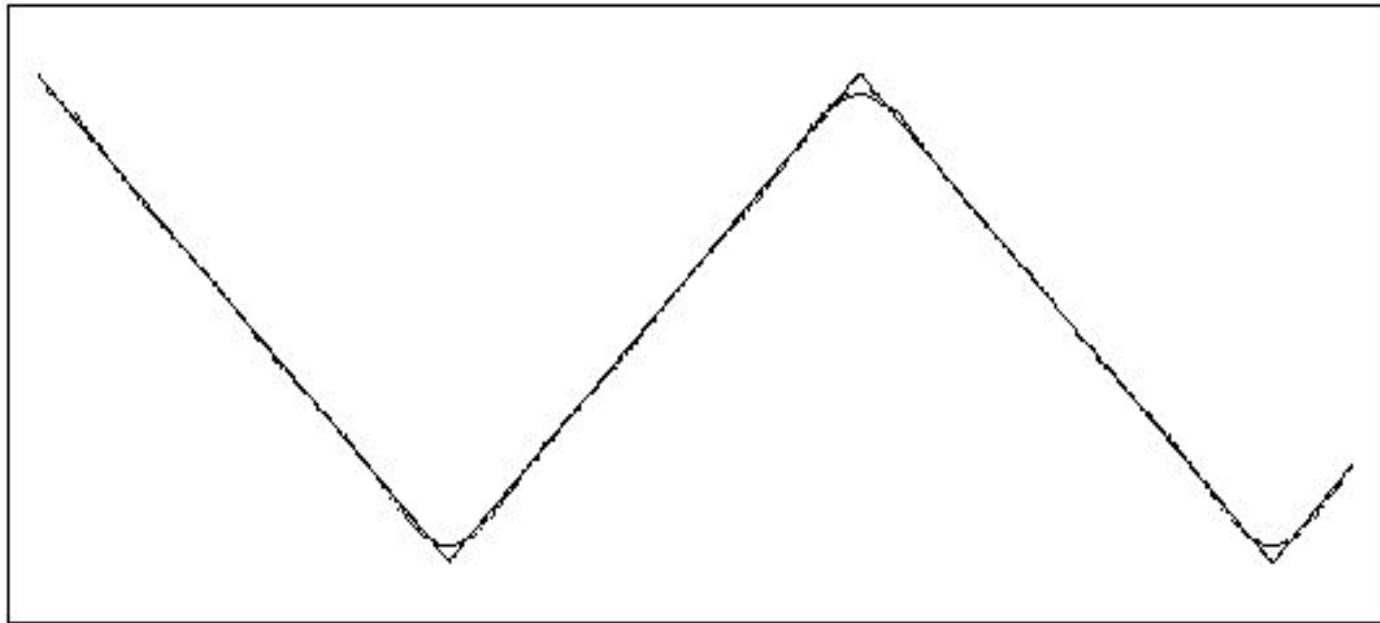
$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jn\omega_0 t)$, $C_n = c_n \exp(j\varphi_n)$ – это комплексные

амплитуды

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt.$$

$a_n = 2\operatorname{Re}C_n$, $b_n = 2\operatorname{Im}C_n$. a_n – действительная часть спектра,

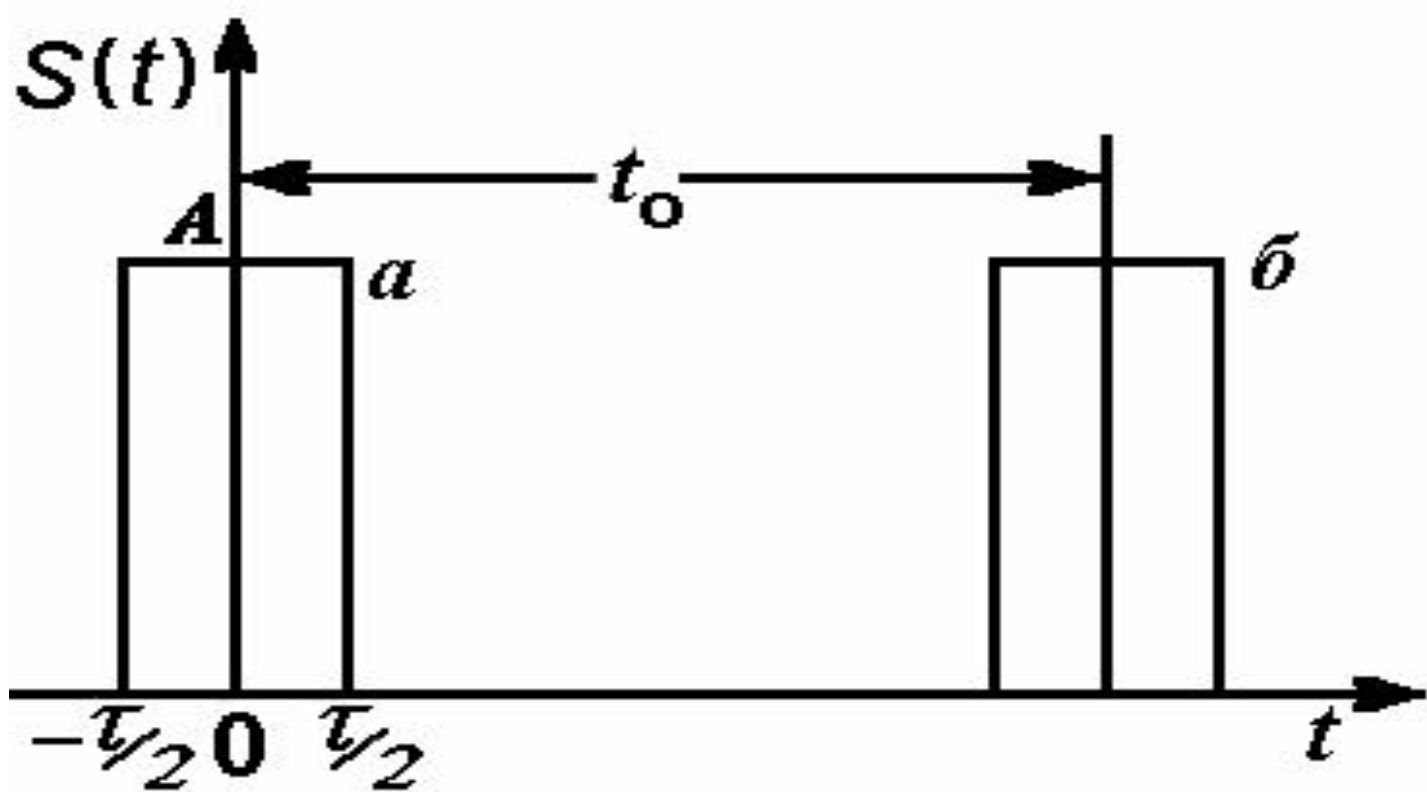
b_n – мнимая часть спектра



Разложение треугольного импульса амплитудой A в тригонометрический ряд, содержащий 4 члена

$$S(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \cos(2\pi t / T) + \frac{4A}{9\pi^2} \cos(6\pi t / T) + \frac{4A}{25\pi^2} \cos(10\pi t / T).$$

Погрешность аппроксимации импульса $s(t)$ рядом с 4 членами составляет $\delta = 2,72 \%$, при 20 членах $\delta = 0,29 \%$.

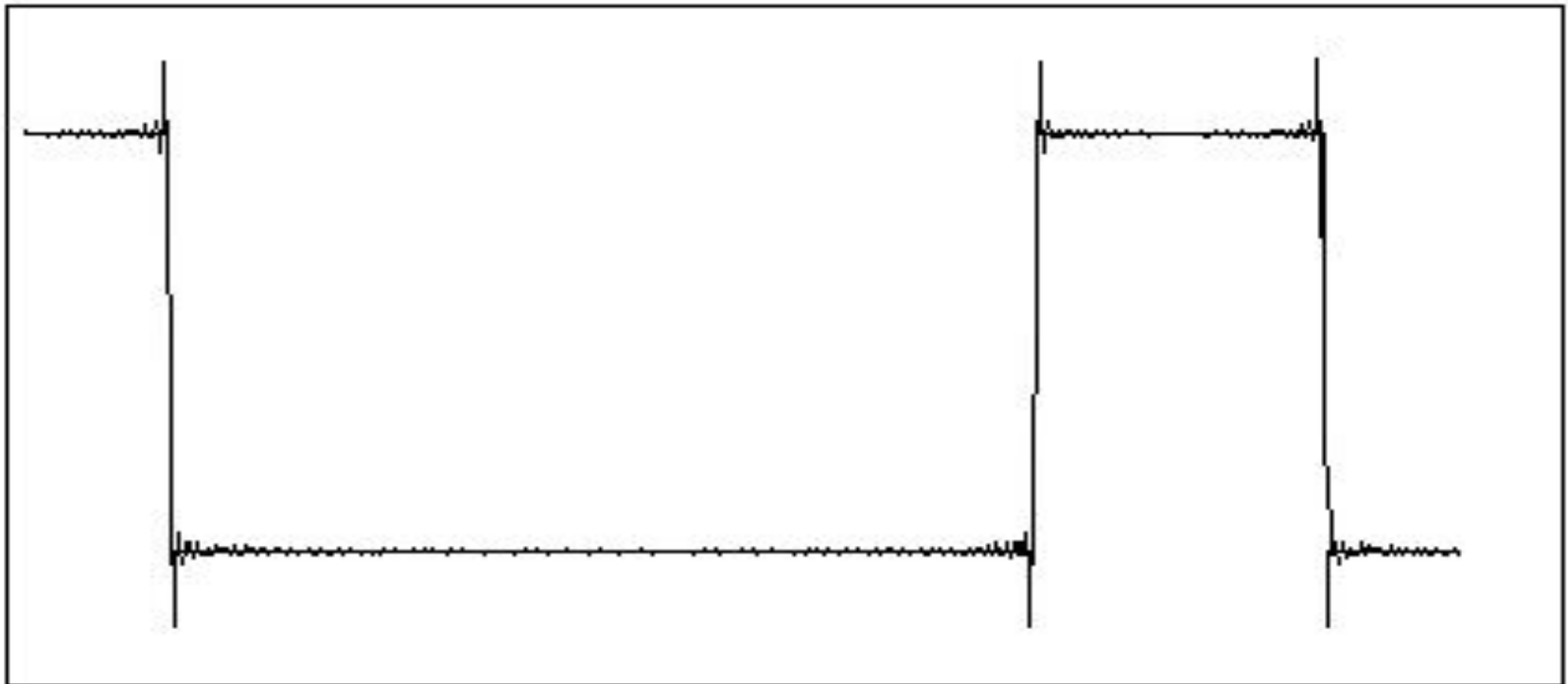


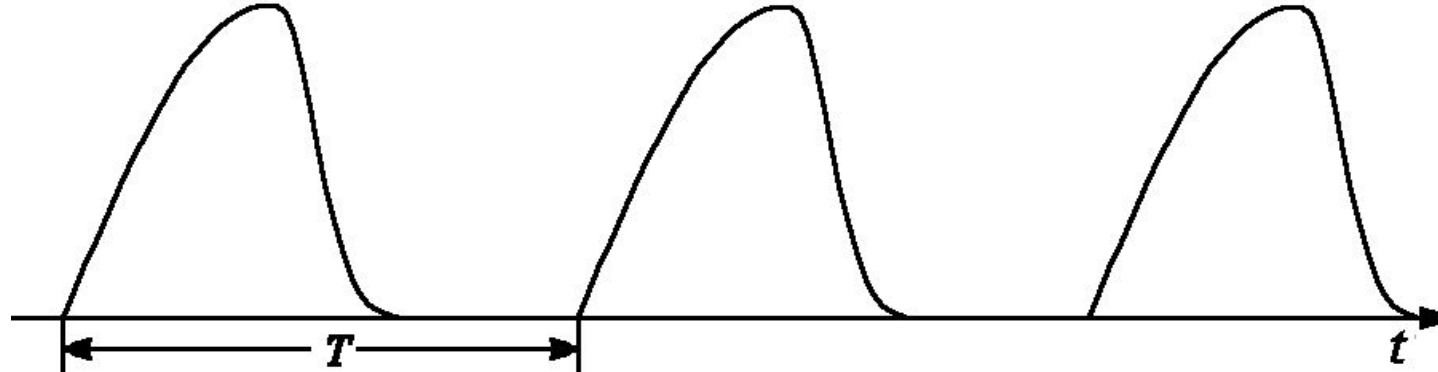
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi jn} \left[\exp\left(jn \frac{2\pi \tau}{T} \frac{1}{2}\right) - \exp\left(-jn \frac{2\pi \tau}{T} \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$C_n = \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{q}\right).$$

Тригонометрический ряд для разрывных функций, сходится значительно медленнее.

Разложение периодической последовательности прямоугольных импульсов со скважностью $q = 4$ при 140 членах ряда, погрешность аппроксимации составляет $\delta = 6,38\%$ (скважность q – это отношение периода к длительности импульса).





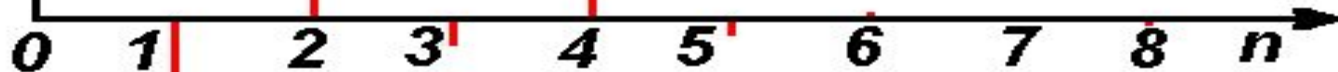
a_n ↑ c_0

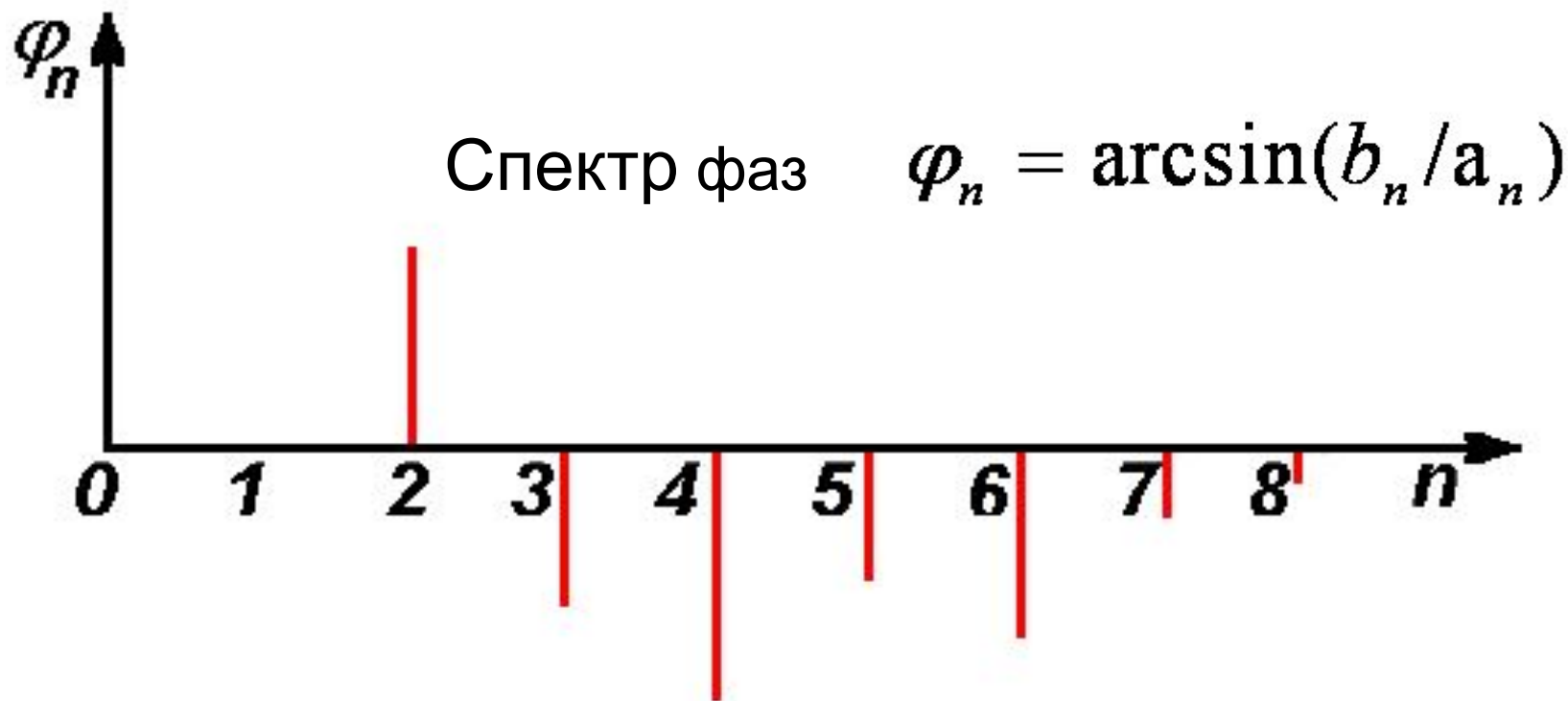
Действительная часть спектра a_n



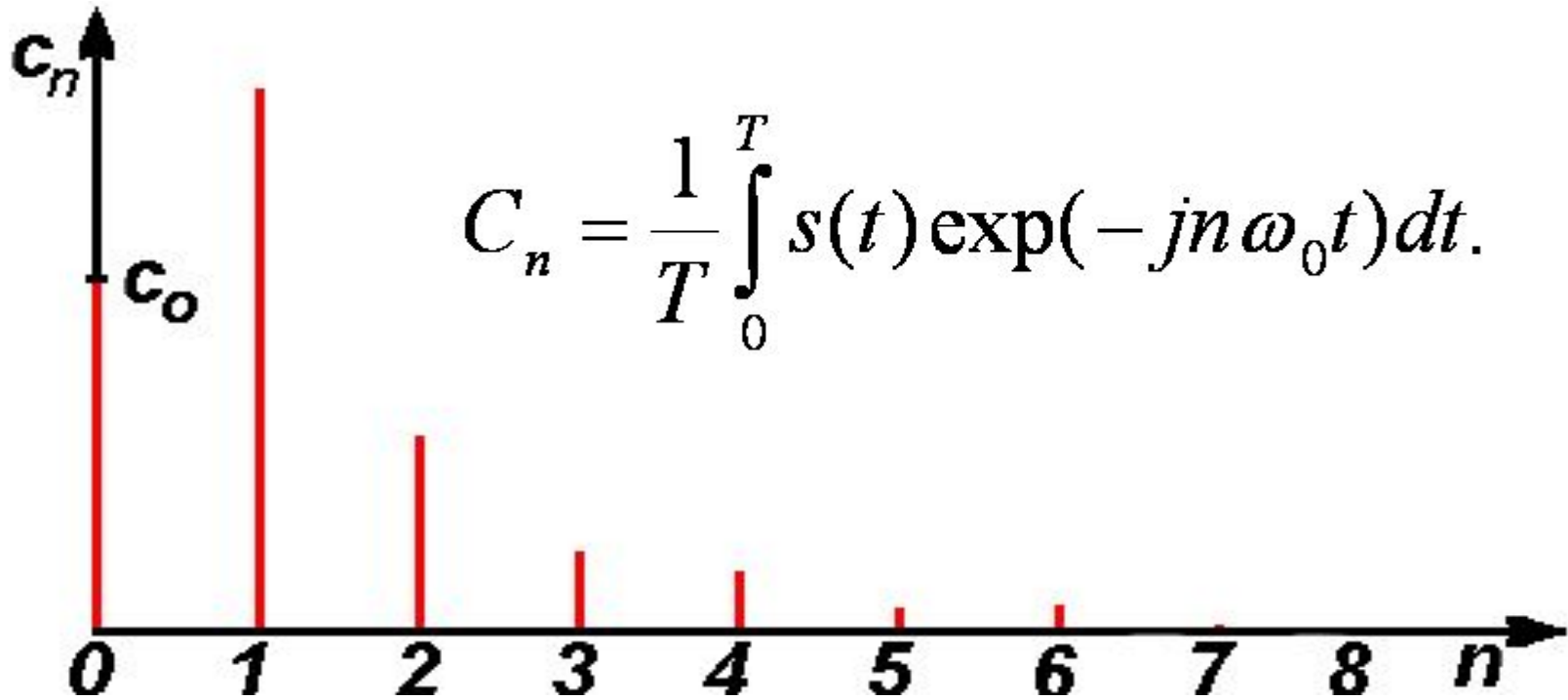
b_n ↑

Мнимая часть спектра b_n





Обобщение на непериодические сигналы. Интеграл Фурье



Интервал в Гц между соседними спектральными компонентами составляет $\Delta f = n/T - (n - 1)/T = 1/T$.

$$TC_n = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt. \quad \frac{C_n}{\Delta f} = F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt.$$

$$\Delta f \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$$

При $T \rightarrow \infty$ $n \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega$, $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt$.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{\Delta f} \exp(jn\omega_0 t) \Delta f.$$

Устремим $\Delta f \rightarrow 0$. Предельный переход имеет смысл, так как

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty, \text{ или даже } \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

$$\Delta f \rightarrow df, s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) \frac{2\pi df}{2\pi}.$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}, F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Свойства преобразования Фурье

1. Преобразование Фурье – линейное, так как интегралы Фурье – это предел суммы.

$S(t) = s_1(t) + s_2(t)$, $F_1(j\omega)$ спектр сигнала $s_1(t)$, $F_2(j\omega)$ спектр $s_2(t)$, спектр суммы $F(j\omega) = F_1(j\omega) + F_2(j\omega)$. Если $S(t) = ks(t)$, то при $G(j\omega) = kF(j\omega)$.

$$S(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(j\omega) \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

$$S(t) = \int s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \frac{1}{j\omega} \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0) \exp(j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(z) \exp[j\omega(z+t_0)] dz = F(\omega) \exp(j\omega t_0).$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) + jB(\omega)] \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Из равенства нулю мнимой части и ортогональности функций $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \frac{d\omega}{2\pi} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \frac{d\omega}{2\pi} = 0.$$

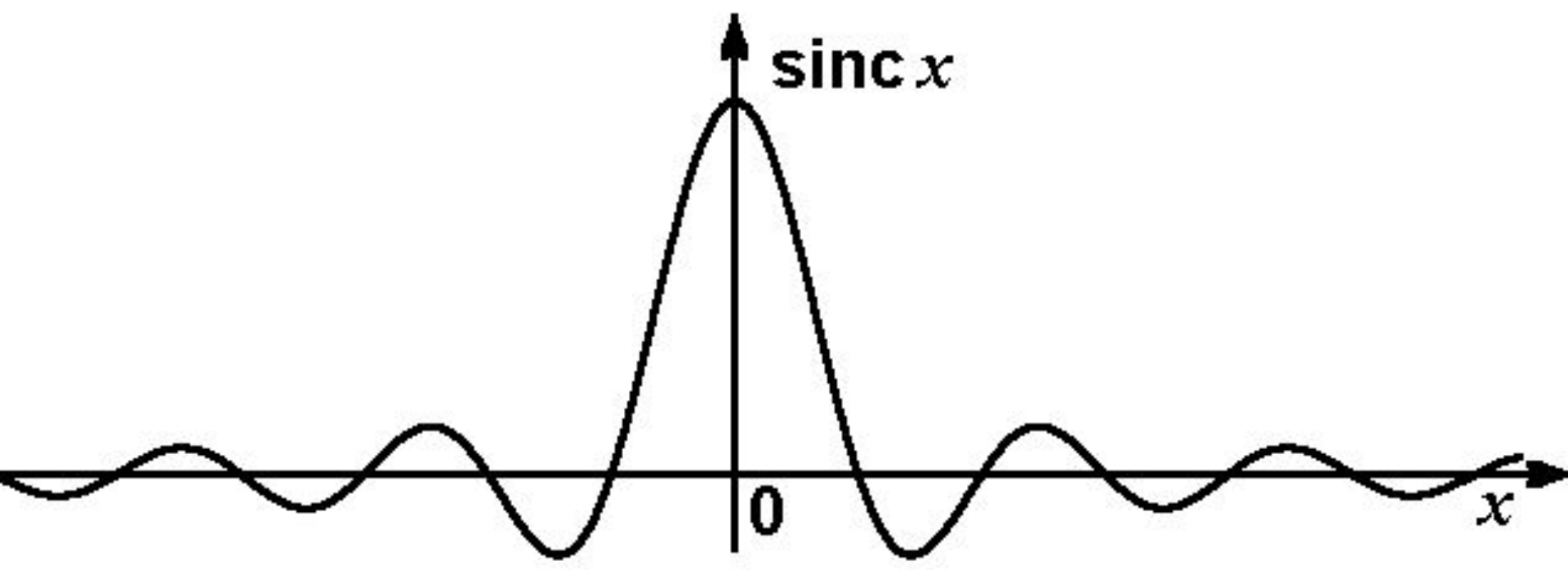
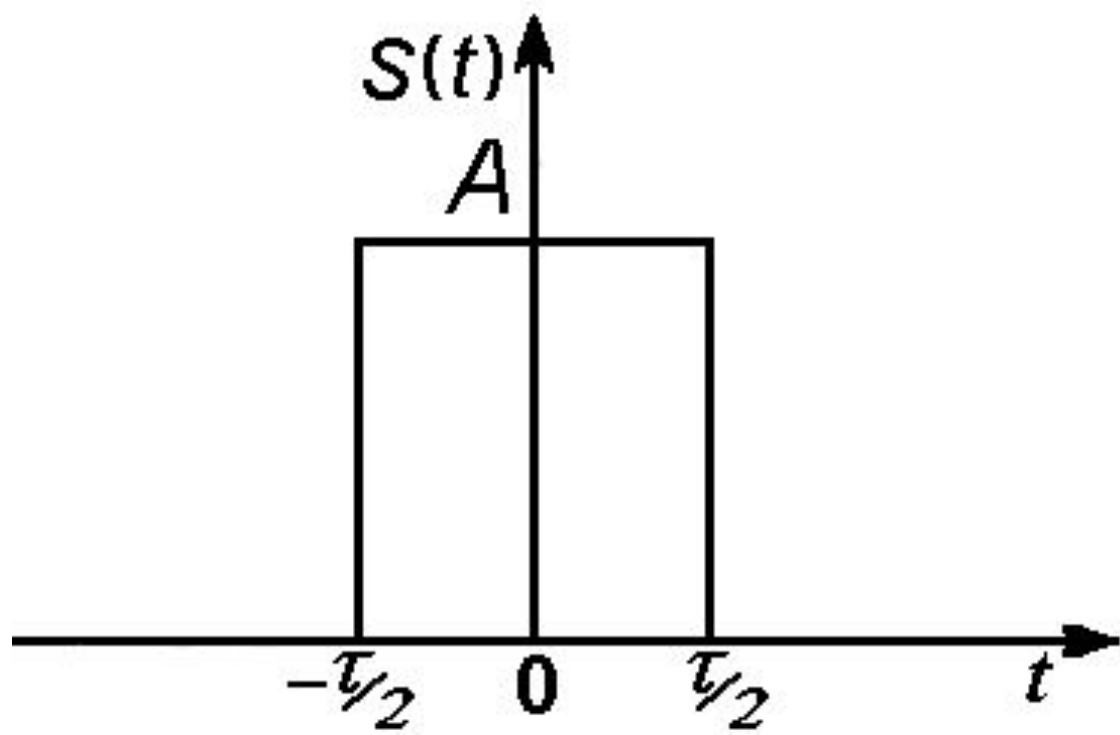
$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(-\omega) = -B(\omega).$$

$$3. (s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega_1) F_2(\omega_2) \exp[j(\omega_1 + \omega_2)t] dt d\omega_1 / 2\pi d\omega_2 / 2\pi$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

$$\int_{\Delta\Omega_1}^{\Delta\Omega_2} |F(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 0,95 \int_{\tilde{\omega}} |F(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

$$4. F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(kt) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(y) \exp(-j\omega y/k) dy = \frac{1}{k} F_1(\omega/k).$$



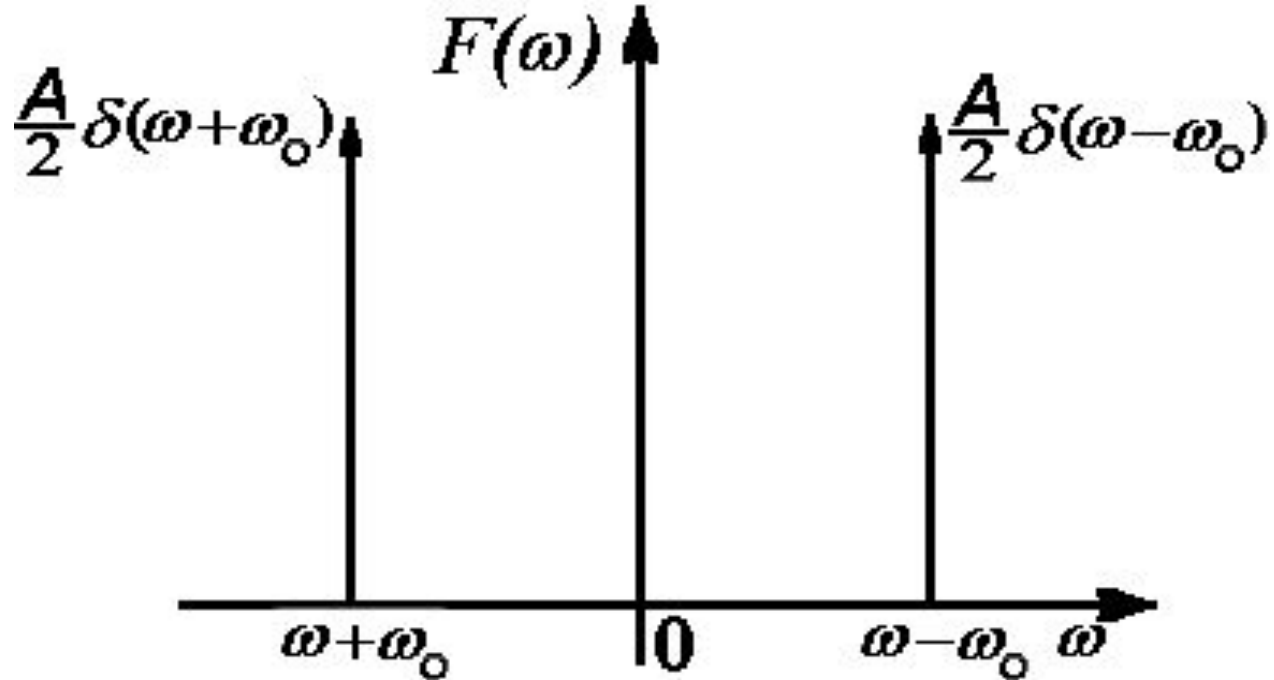
5. Из п.4 следует, что длительность сигнала и ширина спектра связаны между собой. Произведение $\Delta\Omega \cdot \Delta T = B$ носит название базы сигнала. Для обычных сигналов, у которых отсутствуют быстрые изменения величины сигнала в пределах длительности, $B \sim 1$. Таким образом, импульс длительностью 1 мксек = 10^{-6} с имеет ширину спектра порядка 10^6 Гц = 1 МГц.

Для финитных сигналов (т.е. конечной длительности) полная ширина спектра, если подходить строго, всегда величина бесконечная, и наоборот.

6. Спектральную плотность косинусоиды $s(t) = A \cos \omega_0 t$. Строго говоря, это не вполне законная операция, так как такой сигнал не принадлежит пространству H^2 , он имеет бесконечно большую энергию. По формуле Эйлера:

$$A \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [(\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t))].$$

$$F(\omega) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(\omega - \omega_0)t] dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(\omega + \omega_0)t] dt = \frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

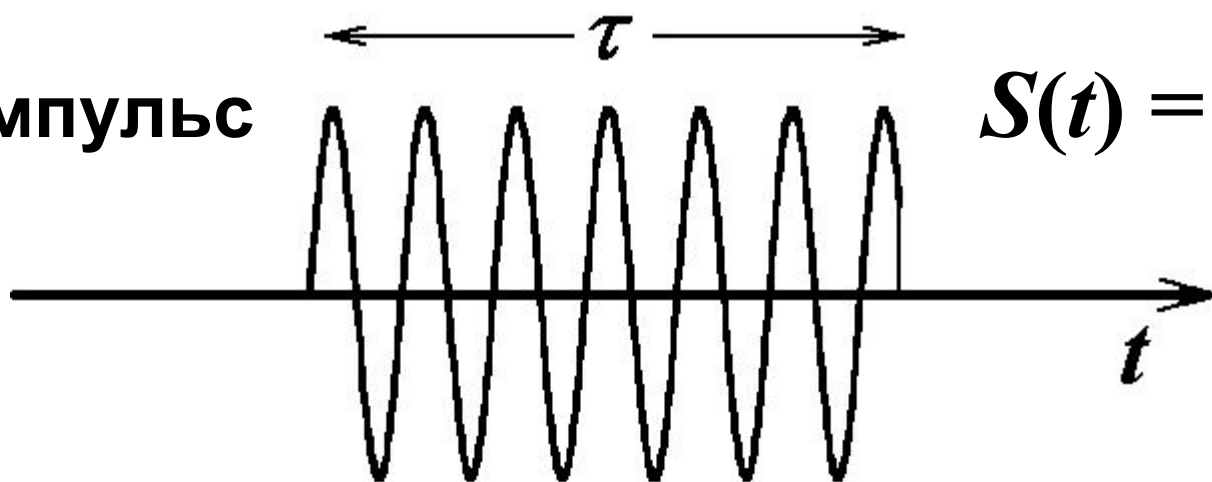


Наличие пиков указывает на периодичность. Одна из причин применения ряда Фурье и интеграла Фурье – необходимость выявления периодичности

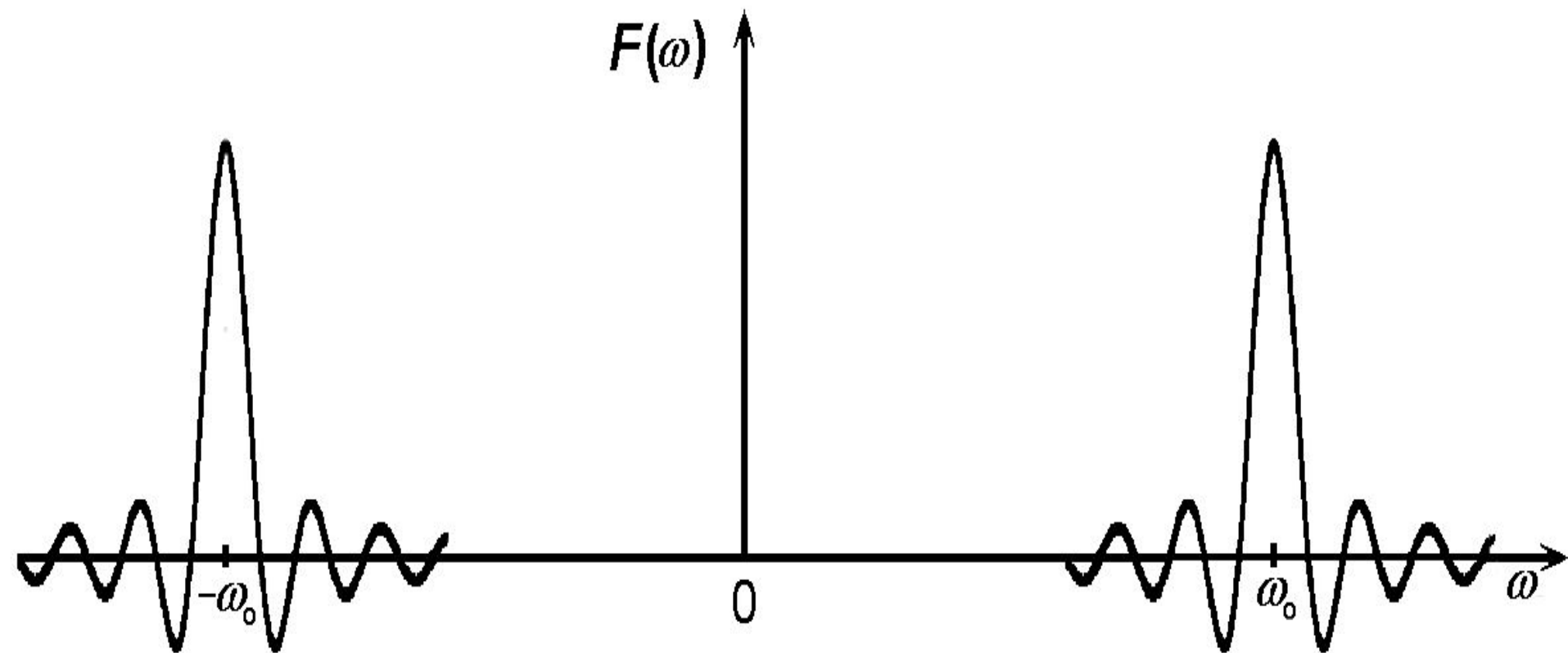
7. $S(t) = s_1(t) \cdot s_2(t);$ $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega_1) F_2(\omega - \omega_1) d\omega / 2\pi.$
Свертка

$G(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$ $S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t_1) s_2(t - t_1) dt_1$

Радиоимпульс



$$S(t) = A \cos \omega_0 t$$

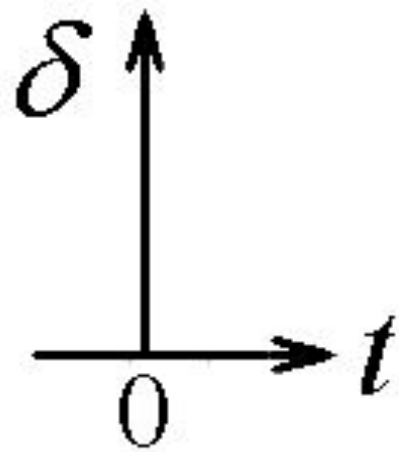


Линейные цепи



$$S_2(t) = \mathbf{T}S_1(t)$$

Какими свойствами
обладает оператор
линейной цепи?



$$h(t) = \mathbf{T}\delta(t)$$

$$S_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_1) S_1(t - t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) S_1(t_1) dt_1$$

$$S_2(t) = \mathbf{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_1) S_1(t - t_1) dt_1 = \mathbf{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) S_1(t_1) dt_1$$

$$S_2(t) = \int_{-\infty}^t h(t_1) S_1(t - t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^t h(t - t_1) S_1(t_1) dt_1$$

$$S(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad S_1 = e^{j\omega_0 t}$$

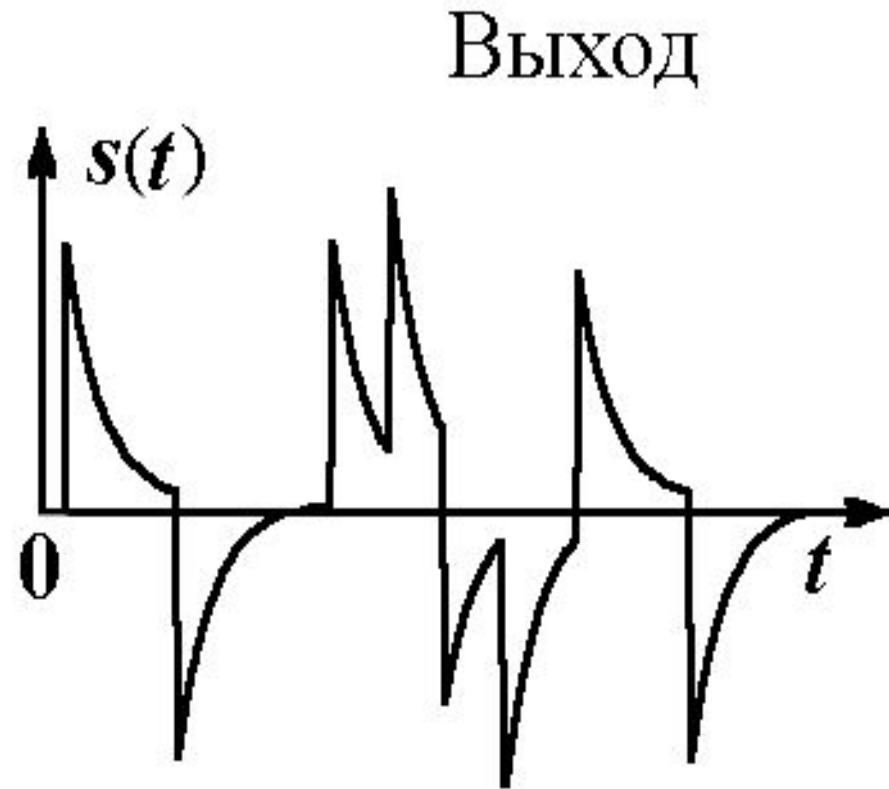
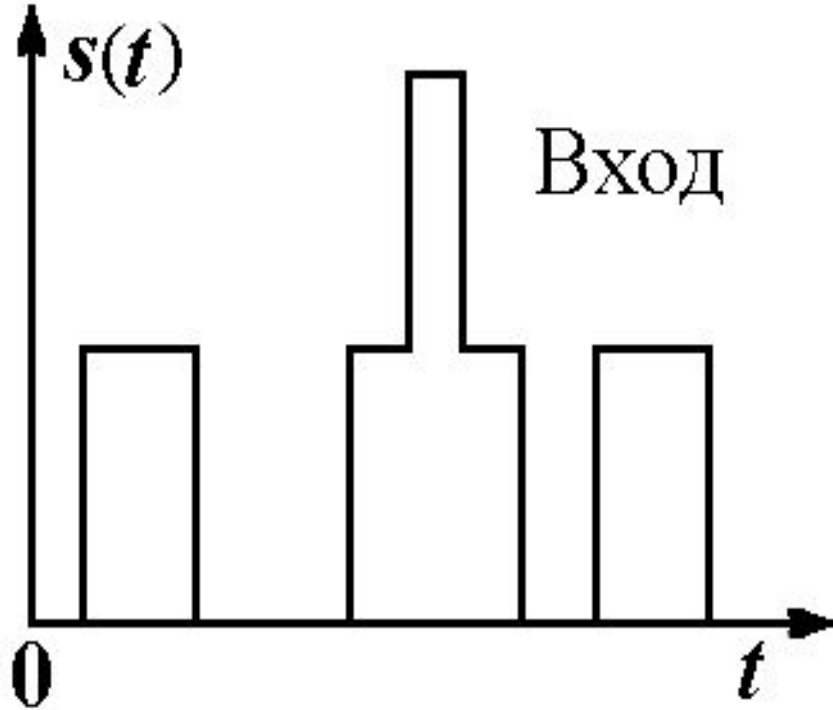
$$S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) e^{j\omega_0(t-t_1)} dt_1 = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) e^{-j\omega_0 t_1} dt_1$$

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega_0 t} dt \quad K(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

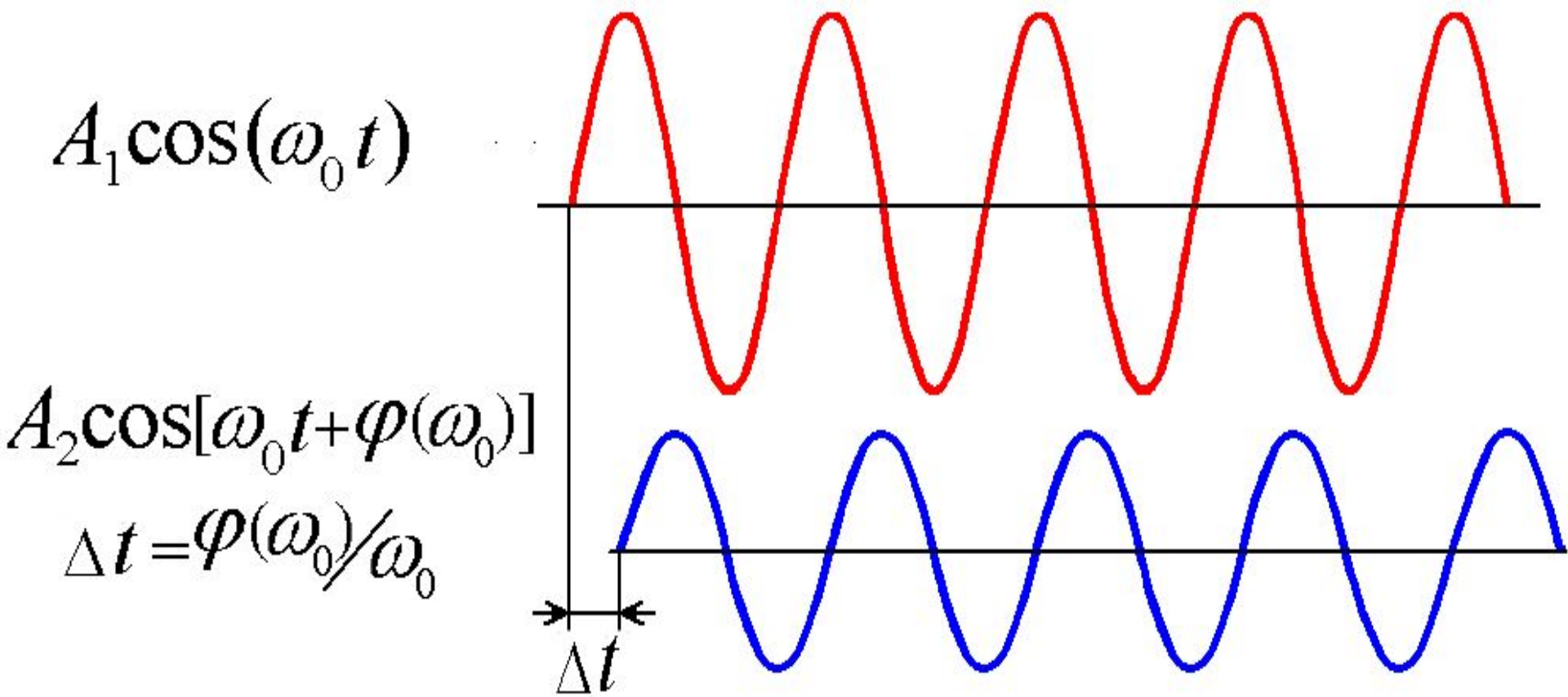
$$\text{АЧХ} \quad |K(j\omega)| = K(\omega) \quad \text{ФЧХ} \quad \varphi(\omega)$$

Амплитудно-частотная характеристика показывает, как изменилась амплитуда

Фазо-частотная характеристика показывает величину задержки фазы на выходе



Сигналы несинусоидальной формы искажаются линейными цепями. У сигналов синусоидальной формы изменяется амплитуда, происходит задержка по фазе, но форма не меняется. Синусоидальные сигналы – собственные функции линейных систем.

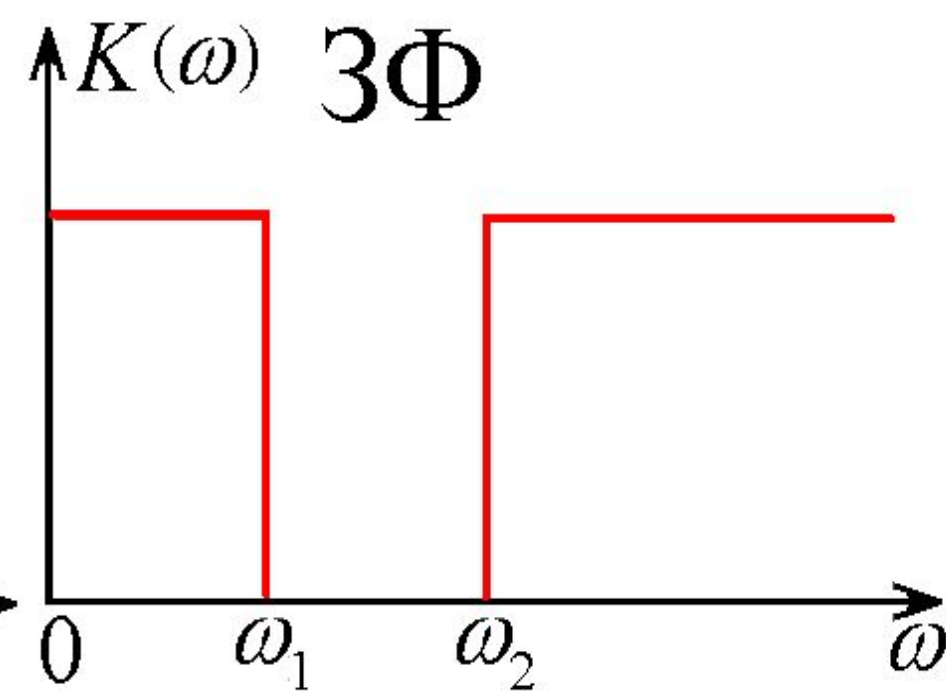
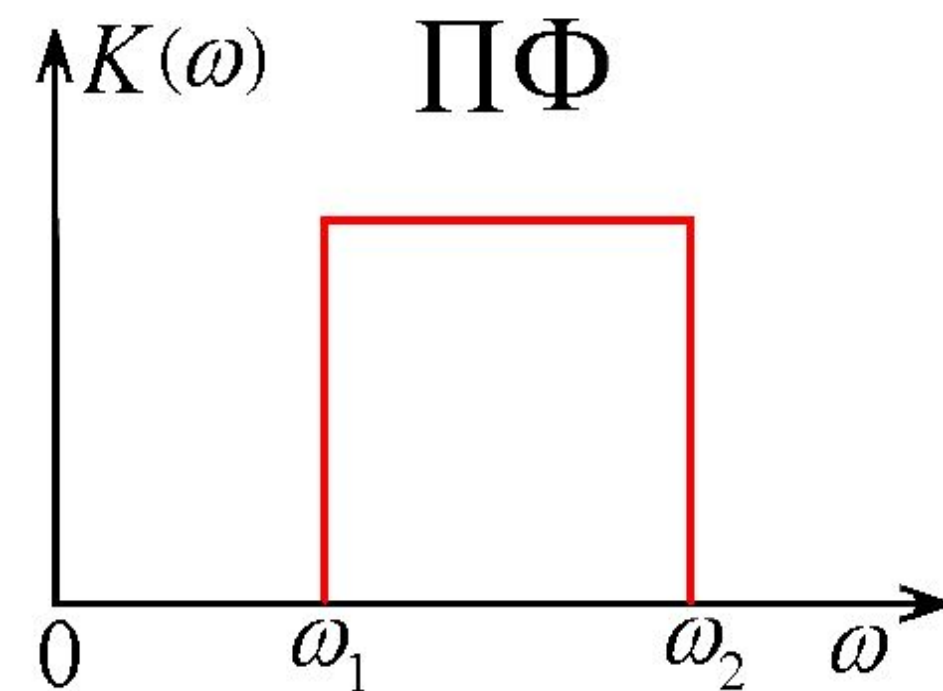
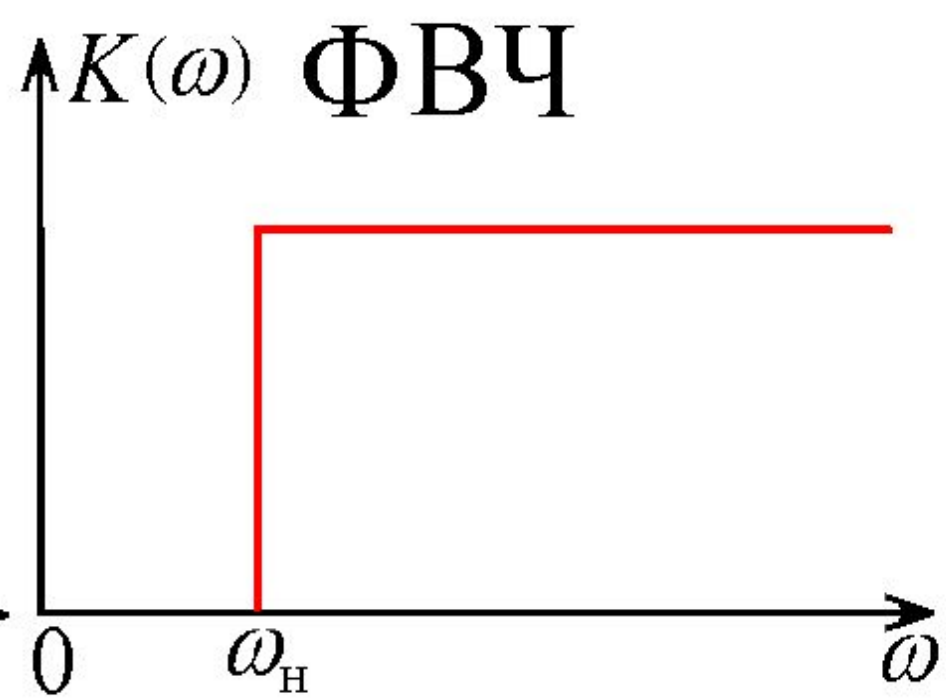
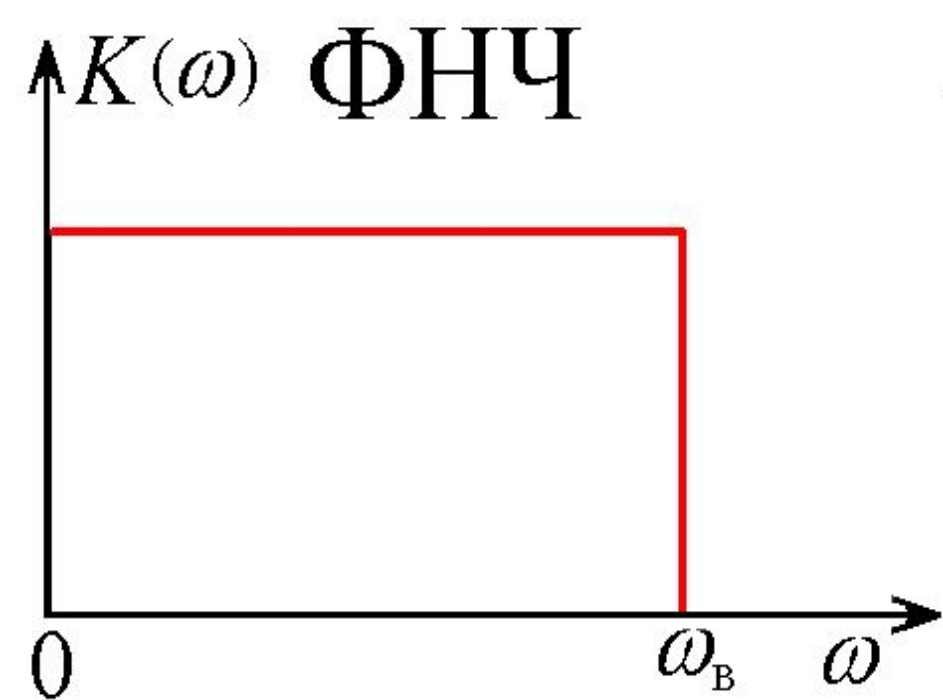


Вход $A_1 \cos \omega_0 t$

Выход $A_2 \cos [\omega_0 t - \varphi(\omega_0)]$

**Измерение амплитудно-
частотной характеристики**

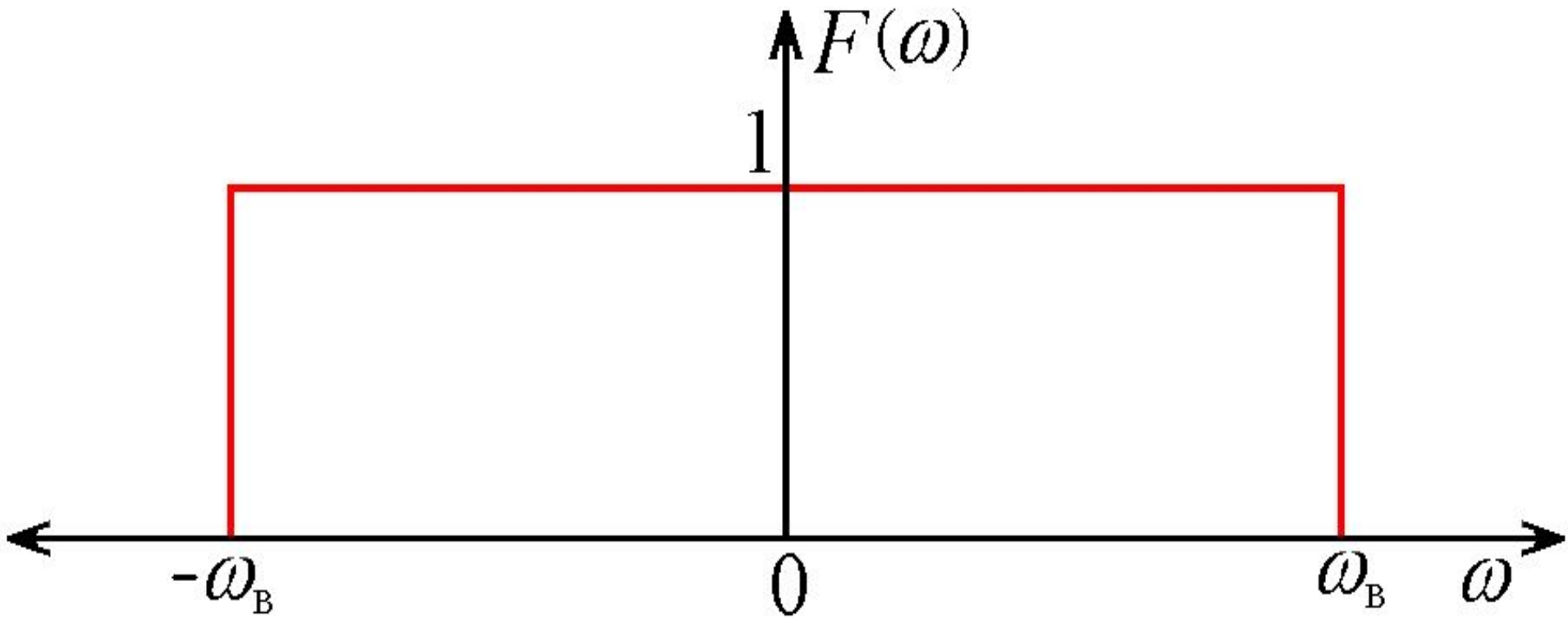
$$K(\omega_0) = \frac{A_2}{A_1}$$



$$s(t-t_0) \longrightarrow F(\omega)\exp(j\omega t_0)$$

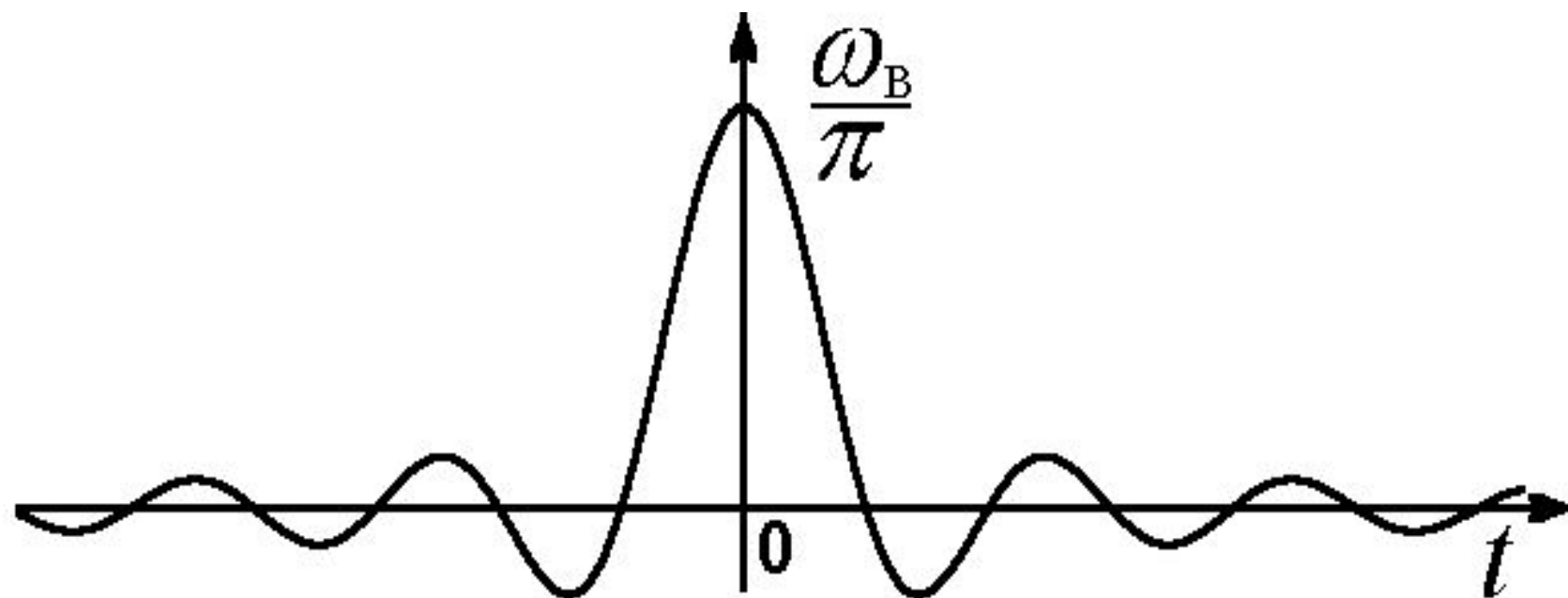
$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega/2\pi$$

Дискретизация сигналов по Котельникову



Спектр идеального низкочастотного сигнала

$$S_{\text{инч}}(t) = 1 \cdot \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}$$

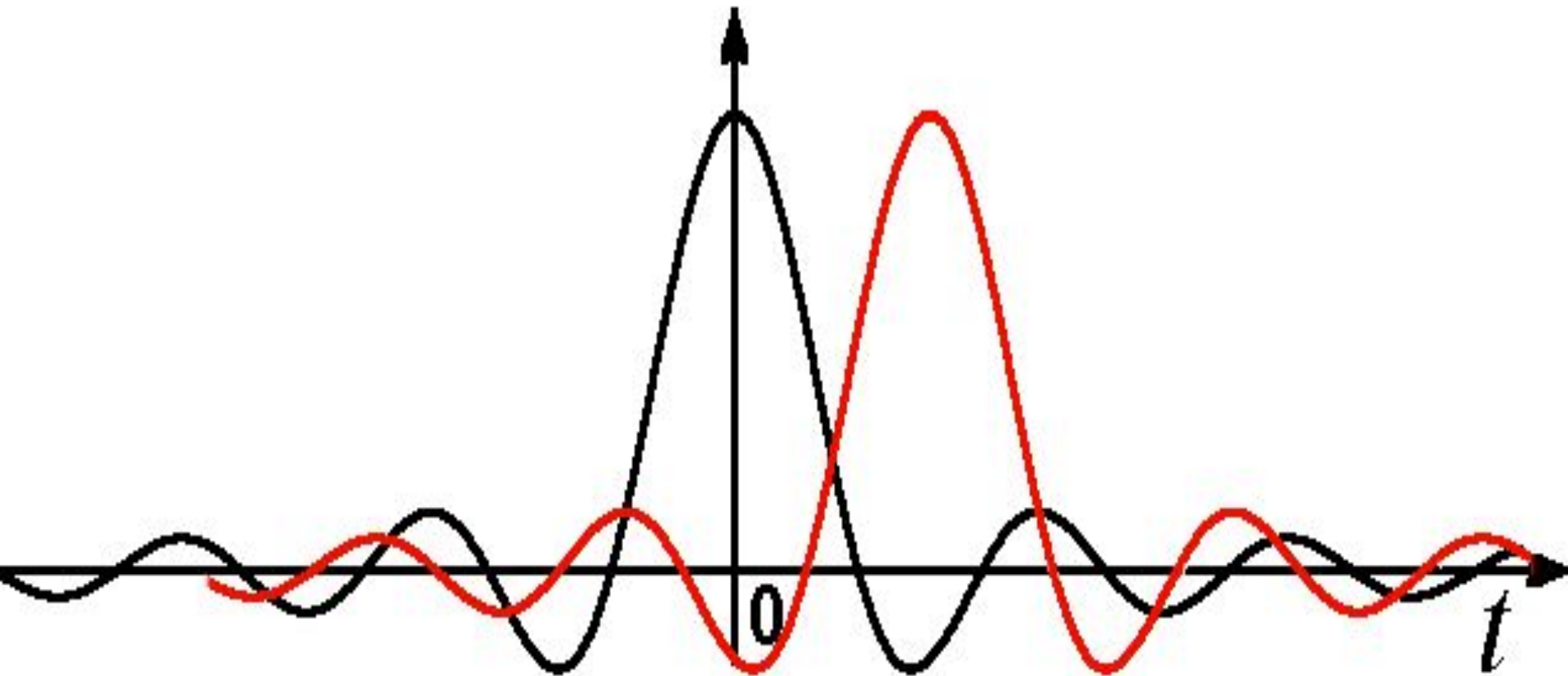


Идеальный низкочастотный сигнал

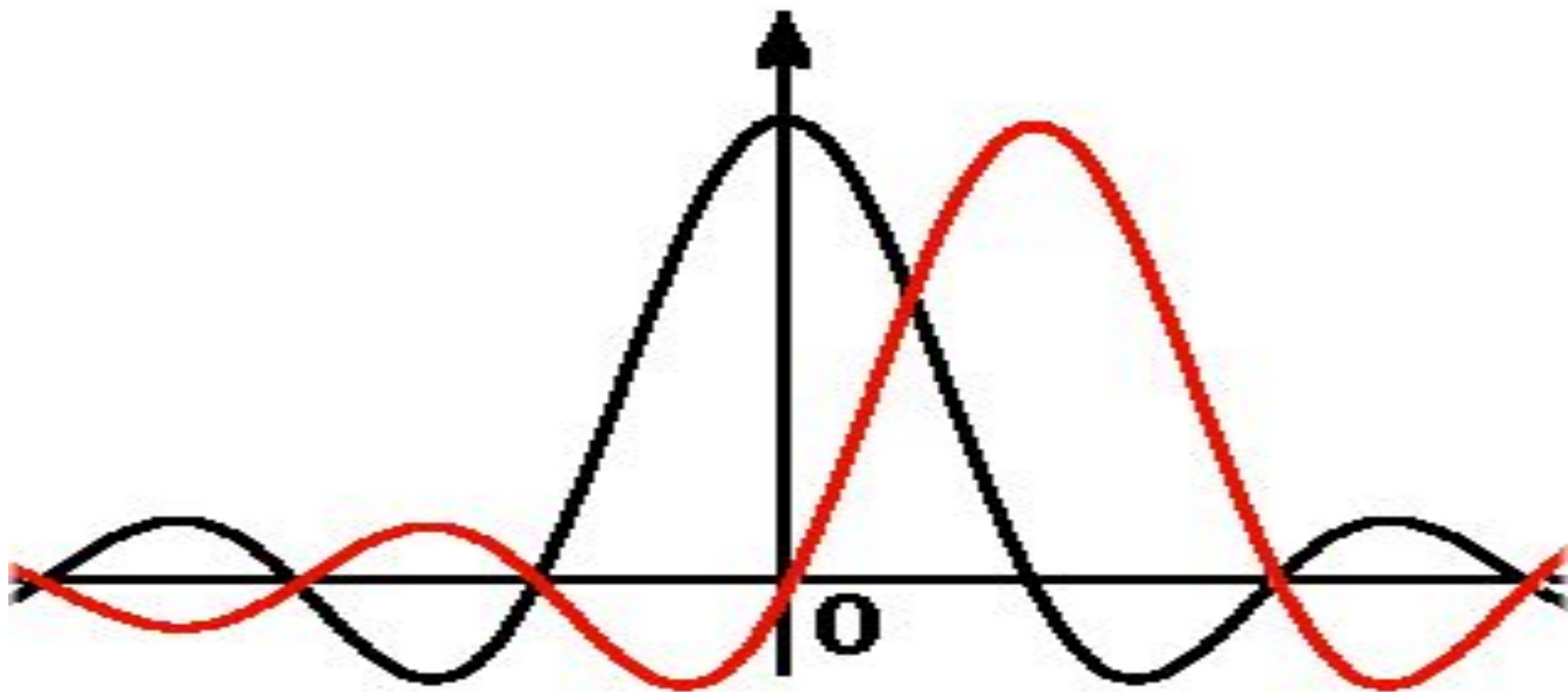
$$S_{\text{инч}}(t) = \frac{\omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}.$$

Скалярное произведение:

$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{\varepsilon}}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_{\varepsilon} t)}{\omega_{\varepsilon} t} \cdot \frac{\omega_{\varepsilon}}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_{\varepsilon} (t - t_0)}{\omega_{\varepsilon} (t - t_0)} dt$$



$$(s_1, s_2) = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} F(\omega) \cdot F^*(\omega) \exp(j\omega t_0) \frac{d\omega}{2\pi}$$
$$(s_1, s_2) = \frac{\omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_B t_0)}{\omega_B t_0}, \quad (s_1, s_2) = 0, \text{ если } \omega_B t_0 = n \cdot \pi$$

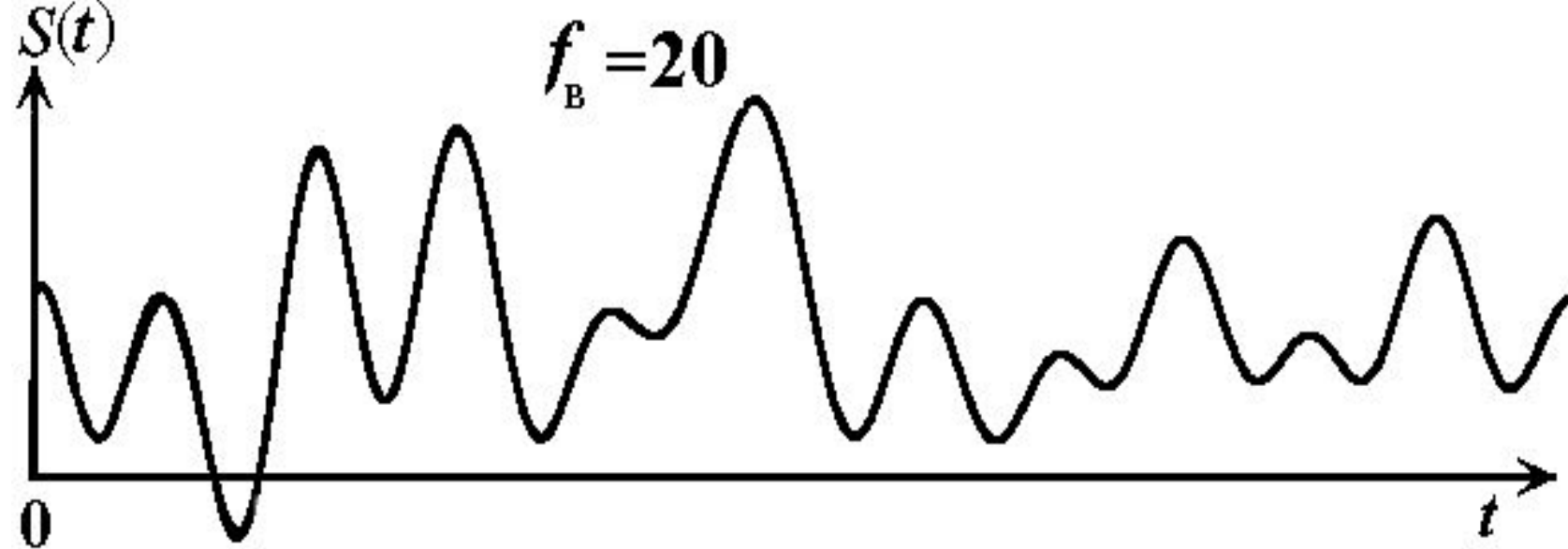


Эти сигналы ортогональные

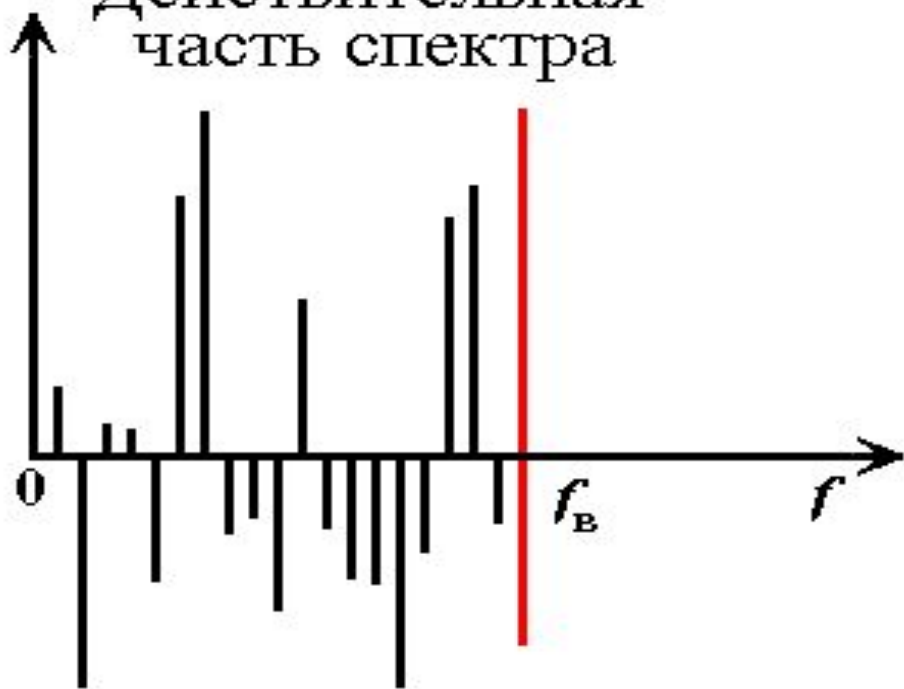
$$\omega_B t_0 = n \cdot \pi, \text{ T.e. } t_0 = \frac{n \cdot \pi}{2\pi f_B} \cdot \Delta t = \frac{1}{2f_B}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n K_n \quad K_n(t) = \frac{\omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin[\omega_B(t - n\Delta t)]}{\omega_B(t - n\Delta t)}$$

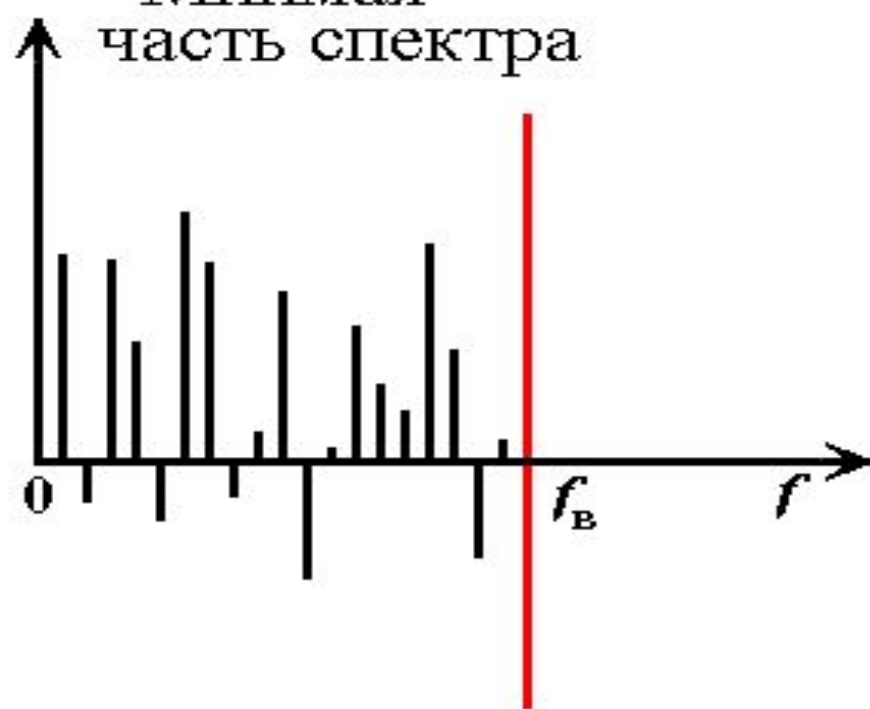
$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) K_n(t)$$

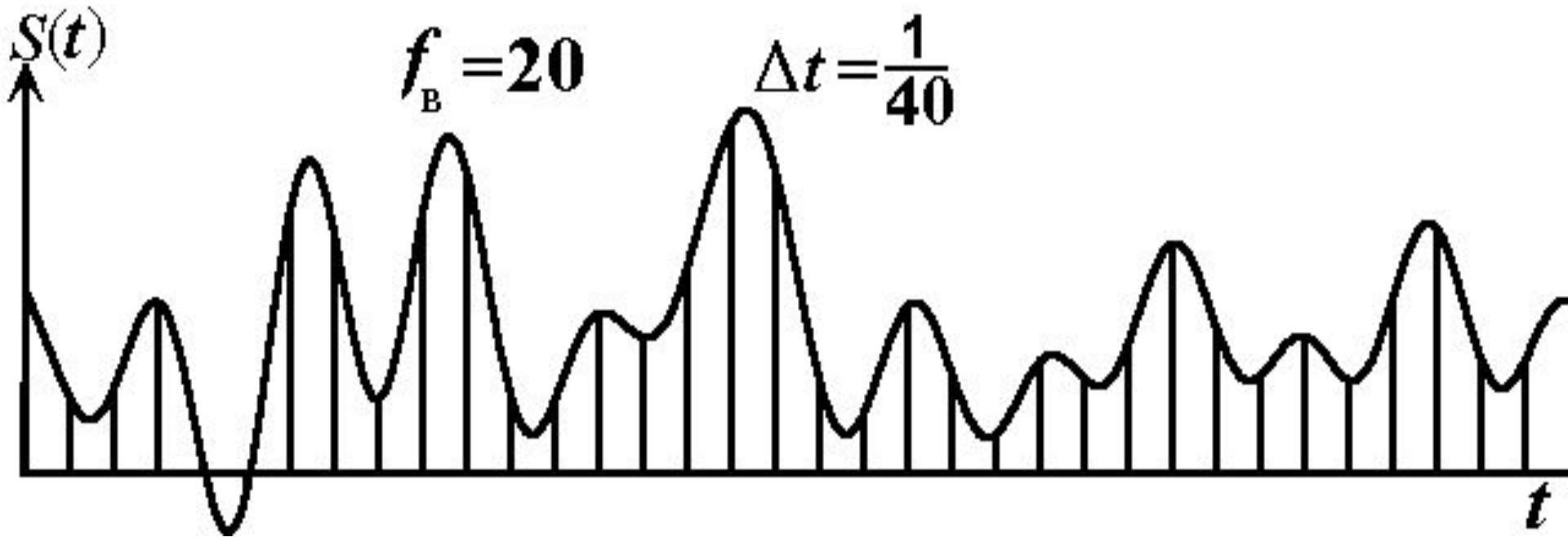
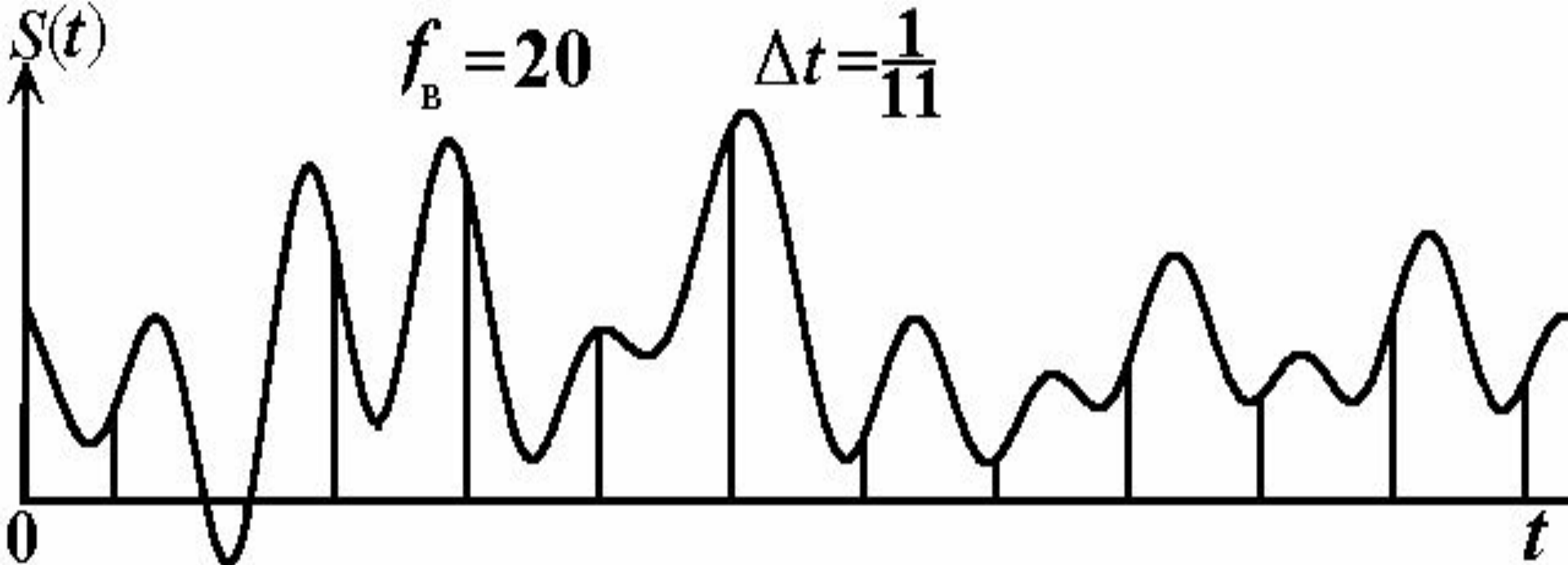


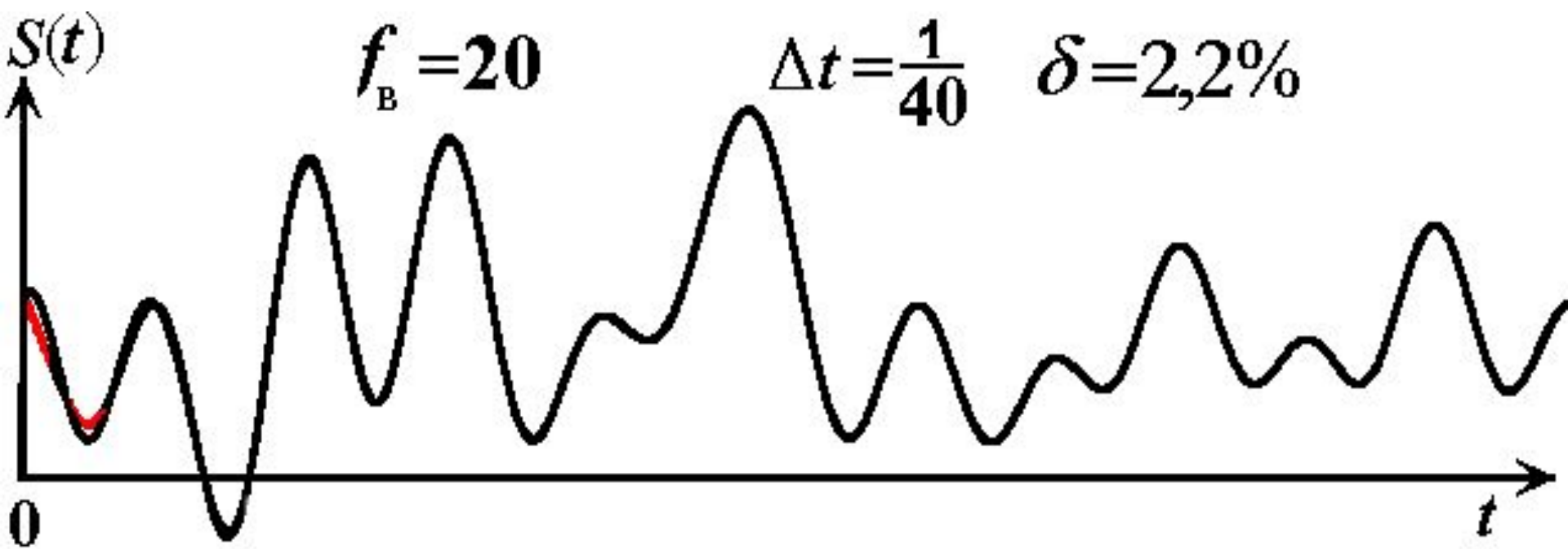
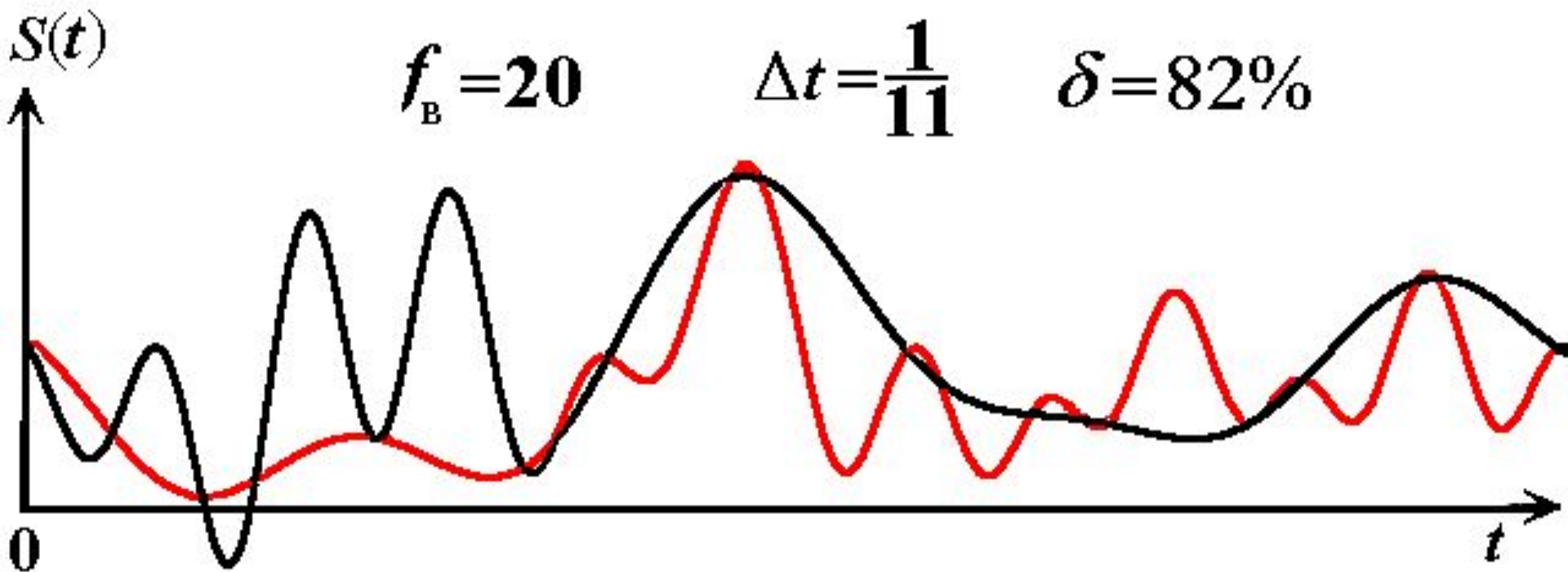
Действительная
часть спектра

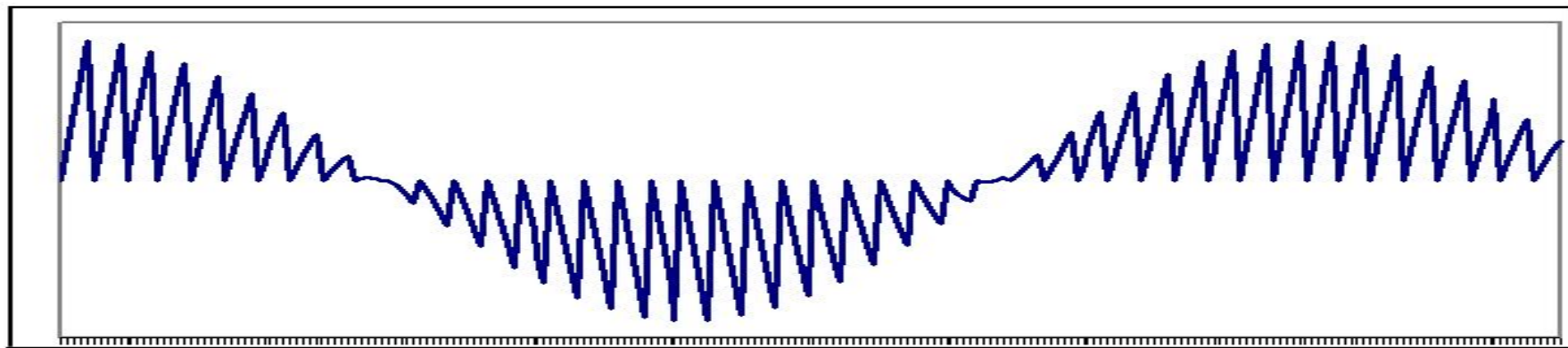


Мнимая
часть спектра









$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \cos \Omega t),$$

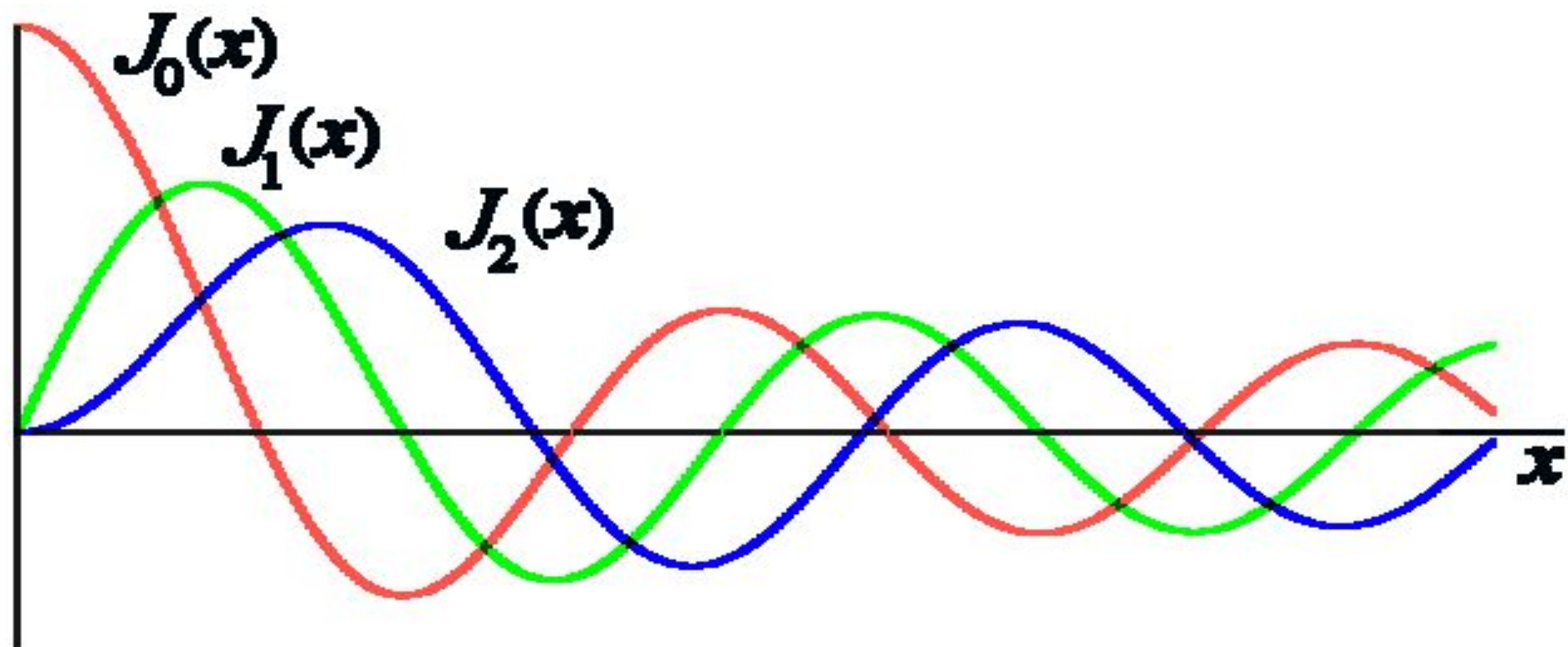
Полная фаза: $\Psi(t) = \omega_0 t + \int \Delta\omega \cos \Omega t dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t.$

$\frac{\Delta\omega}{\Omega} = \beta$ — индекс угловой модуляции

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \operatorname{Re}[\exp(j\omega_0 t) \cdot \exp(j\beta \sin \Omega t)],$$

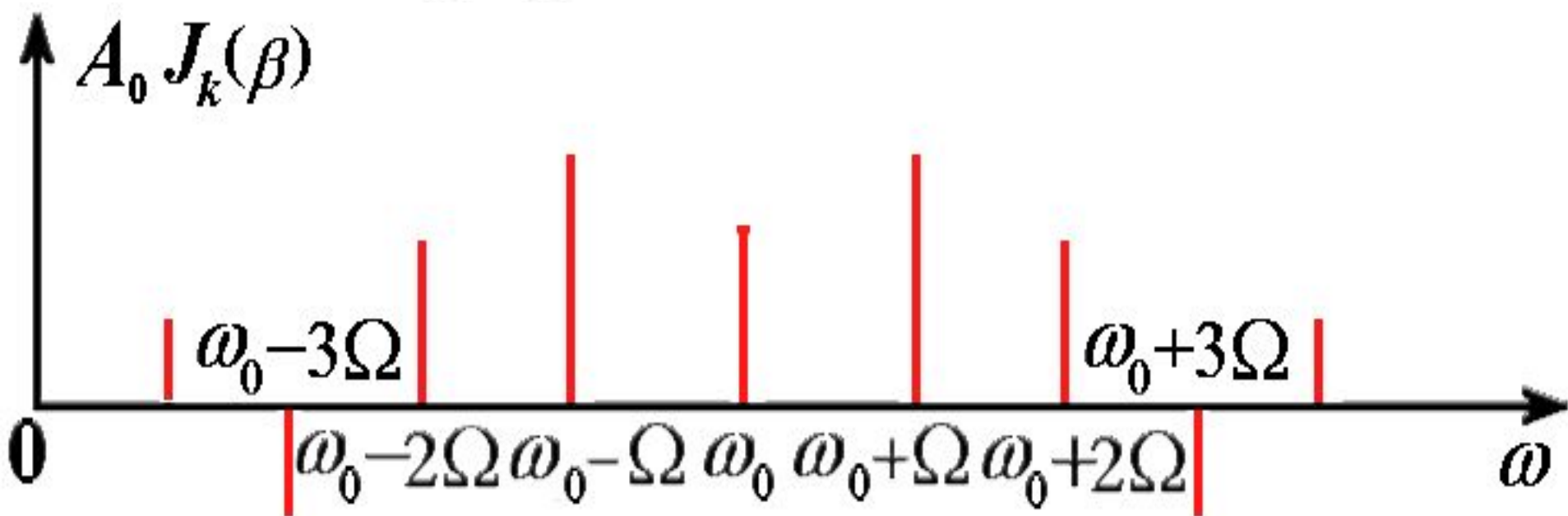
$$\exp(j\beta \sin \Omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \exp(jk\Omega t),$$

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cdot \cos[(\omega_0 + k\Omega)t]$$



$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x/2)^{2m+k}}{m!(m+k)!}$$

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cdot \cos[(\omega_0 + k\Omega)t]$$



При $k \leq \beta + 1$ $J_k(\beta) \approx 0$, ширина спектра

$\Delta\omega_{\text{УМ}} \approx 2\Omega(\beta + 1)$, при $\beta \gg 1$ $\Delta\omega_{\text{УМ}} \approx 2\beta\Omega = 2\Delta\omega$.

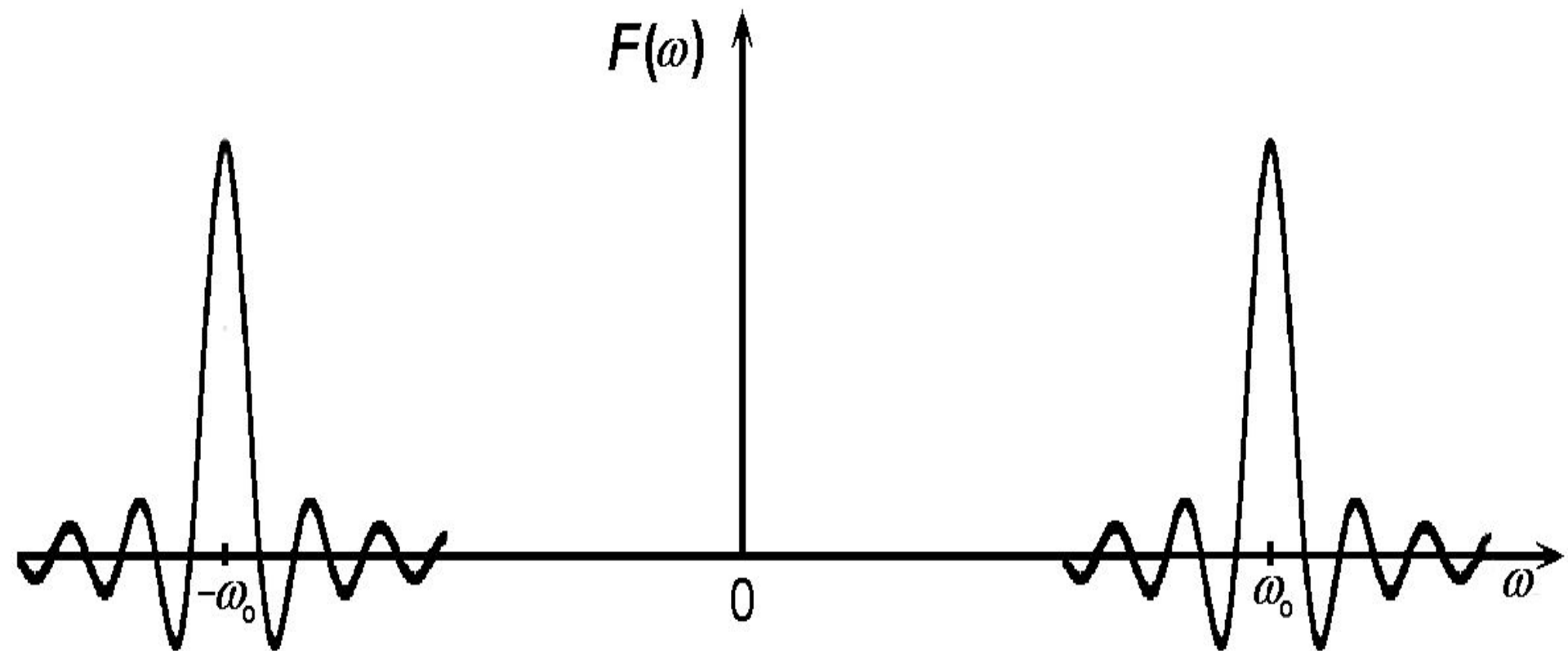
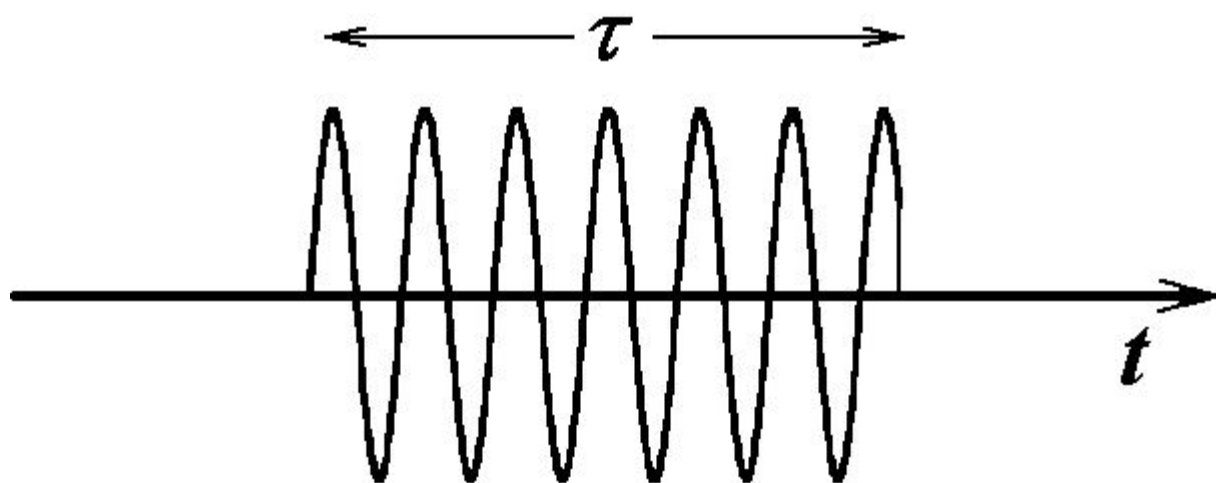
$$S_{\text{FM}} = A_0 \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t), \beta \ll 1,$$

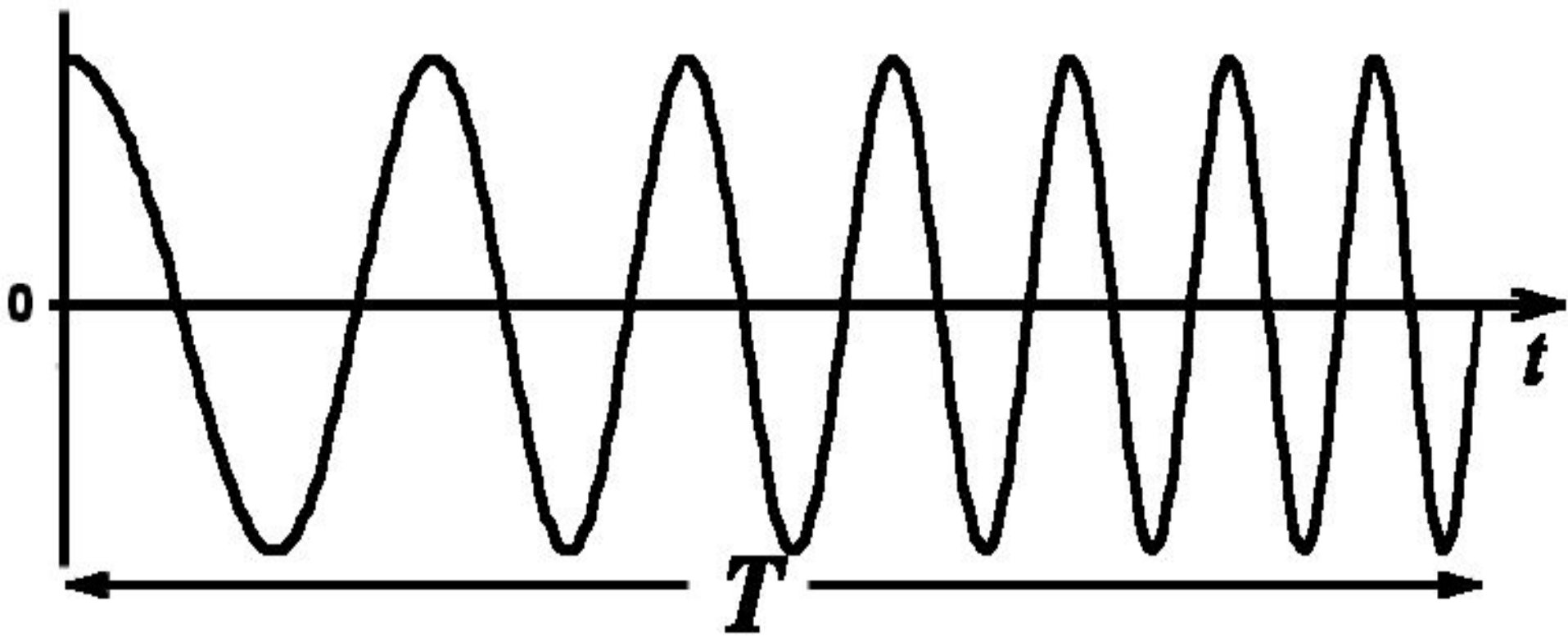
$$S_{\text{FM}} = A_0 \cos(\beta \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - A_0 \sin(\beta \sin \Omega t) \sin \omega_0 t$$

$$\cos(\beta \sin \Omega t) \approx 1, \quad \sin(\beta \sin \Omega t) \approx \beta \sin \Omega t$$

$$S_{\text{FM}} \approx A_0 \cos \omega_0 t + \frac{\beta A_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t - \frac{\beta A_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t$$

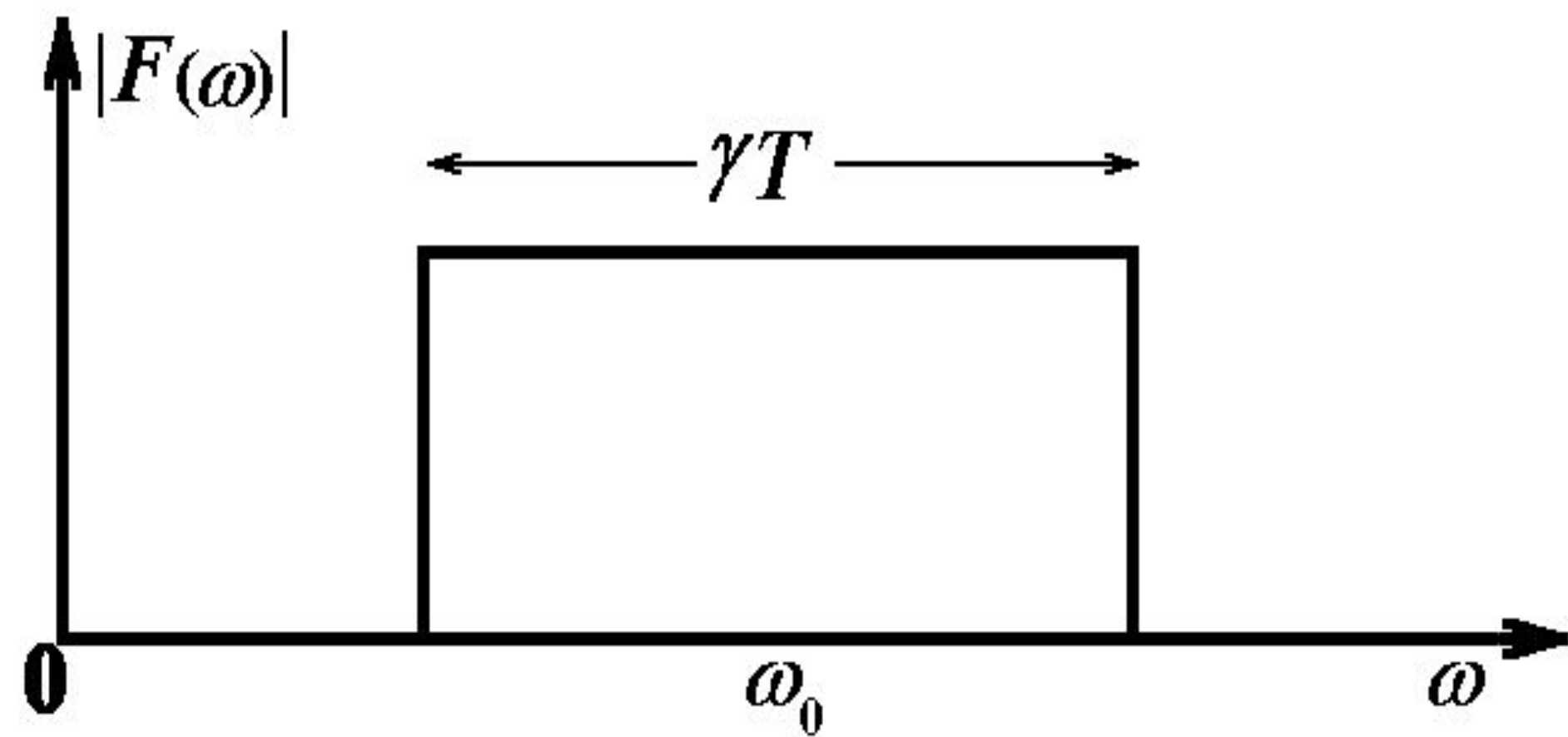
$$S_{\text{AM}} \approx A_0 \cos \omega_0 t + \frac{\beta A_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{\beta A_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t$$



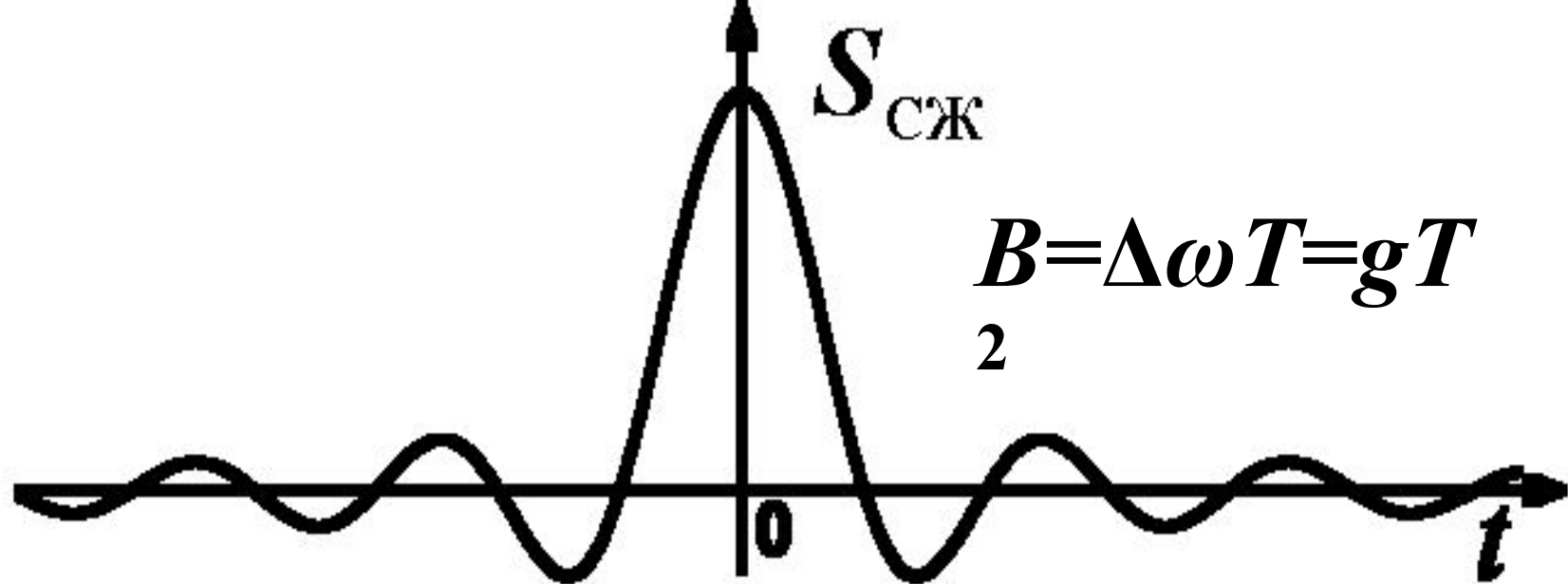


$$S(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}\right), \text{ девиация } \Delta\omega = \frac{\gamma T}{2}$$

Сигнал с линейной частотной модуляцией

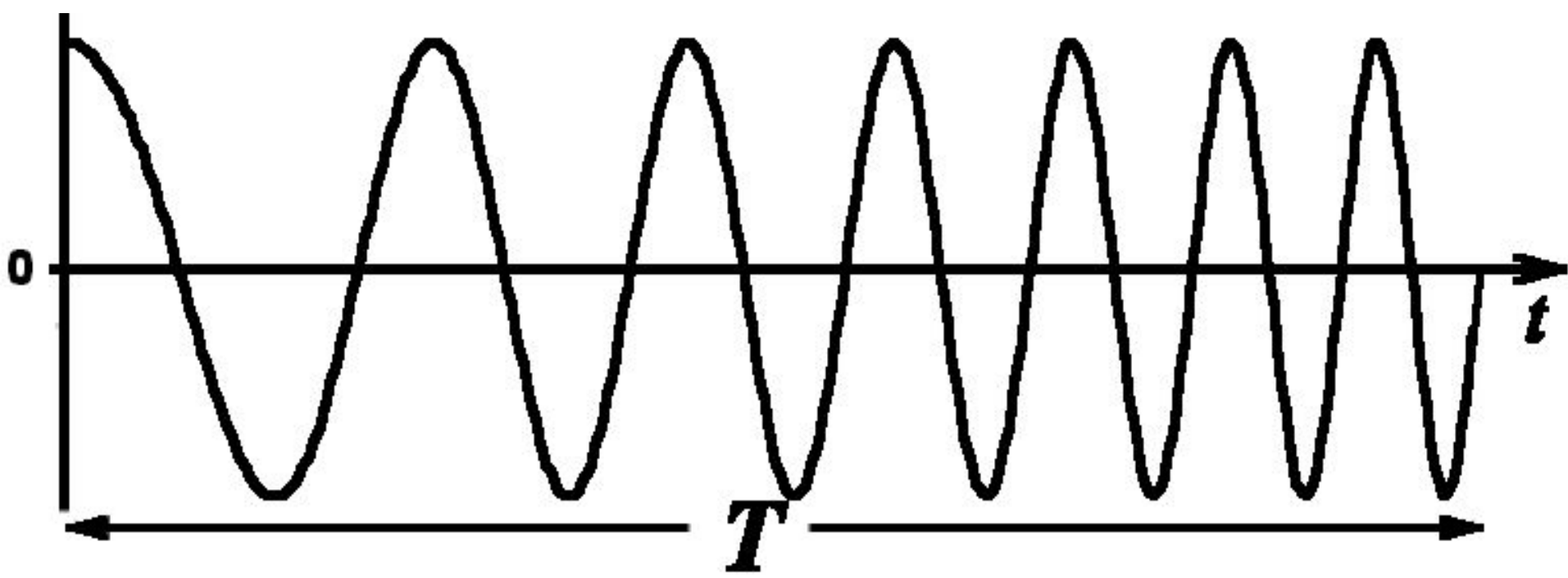
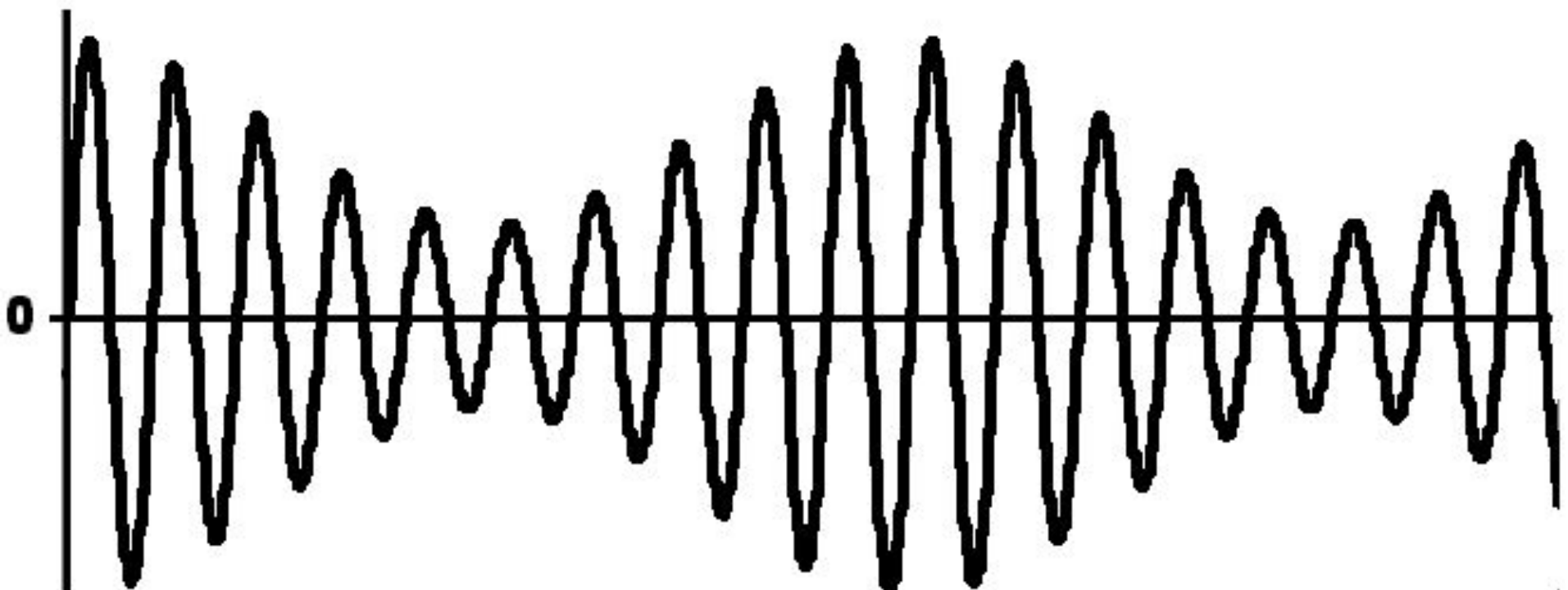


$$|F(\omega)| = A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}$$



$$S_{\text{CЖ}}(t) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_0 \cos \left[\omega_0 t_1 + \frac{\gamma t_1^2}{2} \right] A_0 \cos \left[\omega_0 (t - t_1) + \frac{\gamma (t - t_1)^2}{2} \right] dt_1$$

$$S_{\text{CЖ}}(t) = \frac{A_0^2 T}{2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\gamma T}{2} t \right)}{\left(\frac{\gamma T}{2} t \right)} \cos \omega_0 t, \quad \Delta\tau = \frac{2\pi}{\gamma T}$$



ОГИБАЮЩАЯ $U(t)$

1. $U(t) \geq 0$

2. $U(t) \geq |s(t)|$

3. Если $U(t) = |s(t)|$, то $\frac{dU(t)}{dt} = \frac{d|s(t)|}{dt}$

4. Малым вариациям $s(t)$ соответствуют малые вариации $U(t)$

5. Если $s(t) = A_0 \cos \omega_0 t$, то $U = A_0$

6. Частота и фаза не зависят от U .

$$s(t) = U(t) \cdot \exp[j\varphi(t)]; \quad Z(t) = s(t) + j\tilde{s}(t);$$

$$U(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}; \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)}.$$

Преобразование Гильберта: $\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t_1)}{t - t_1} dt_1.$

Сравним: $s_1(t) = \int_{-\infty}^t s(t) h(t - t_1) dt_1$

Импульсная характеристика, соответствующая преобразованию Гильберта: $h_T(t) = \frac{1}{\pi t}.$

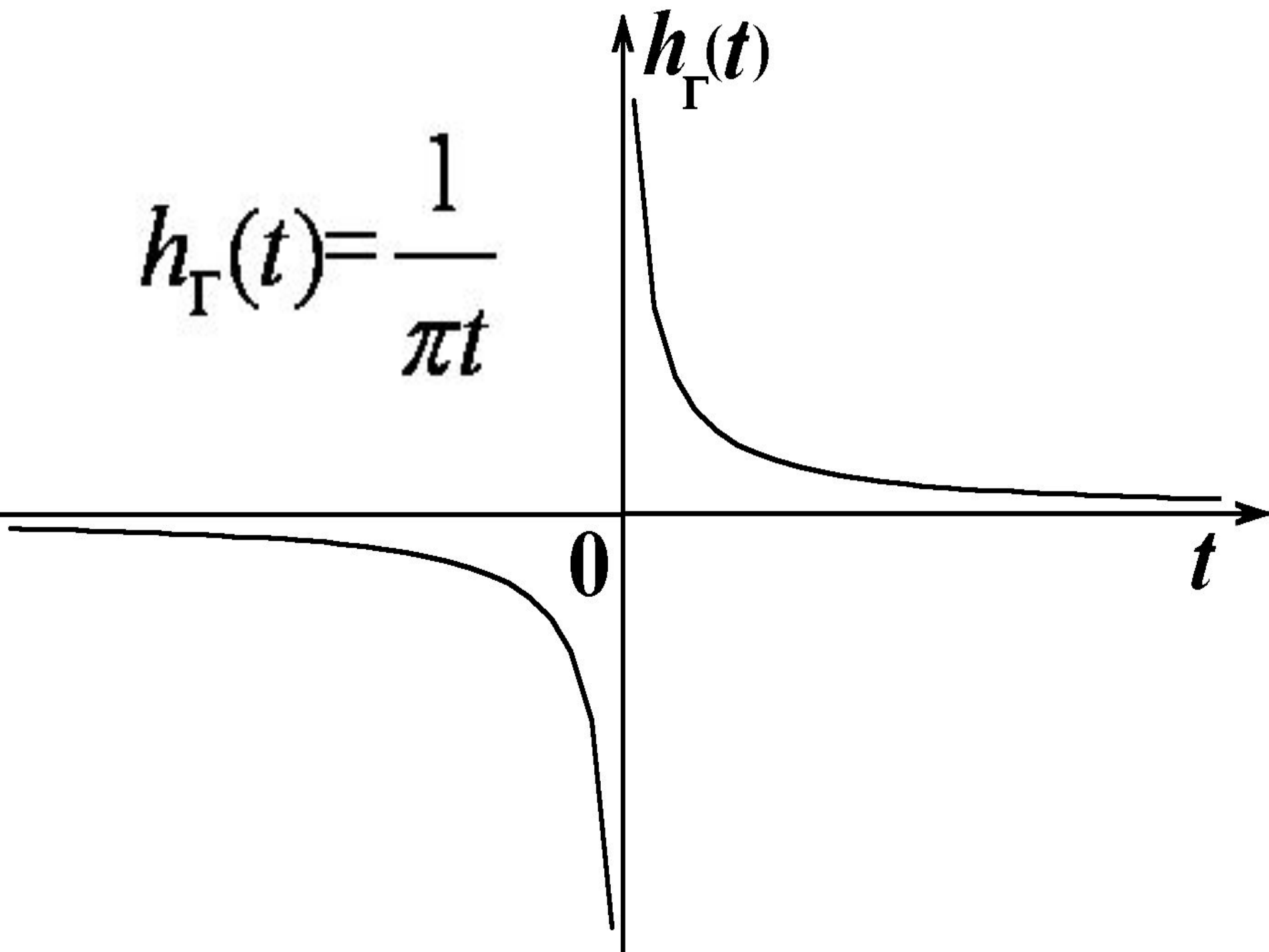
$$K_{\Gamma}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} \cdot \exp(-j\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{t} dt - \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = -\frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt.$$

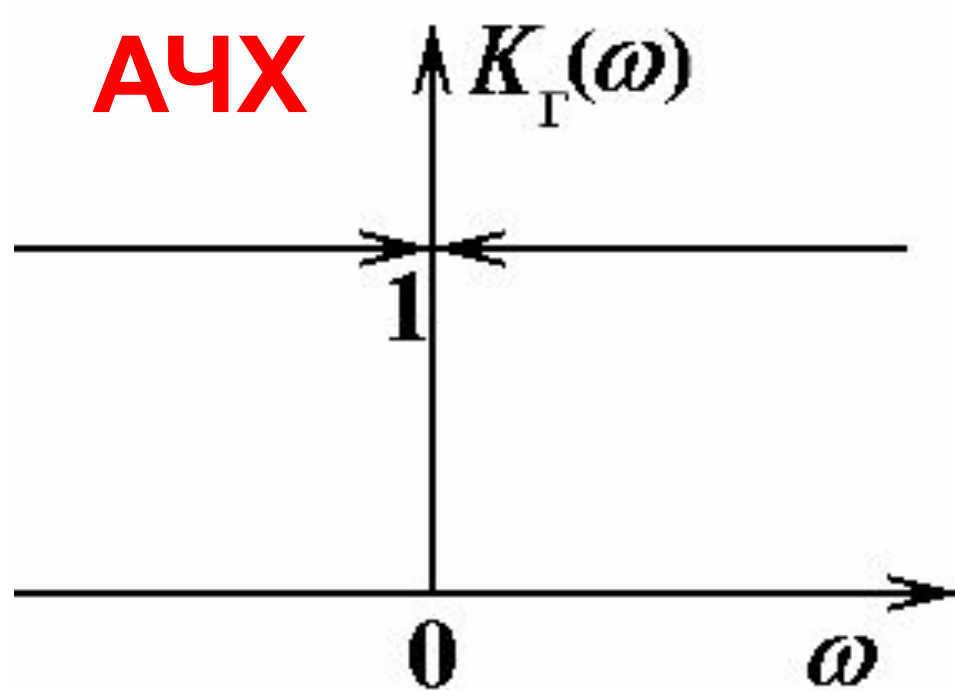
$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \begin{cases} \pi, & \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ -\pi, & \omega > 0. \end{cases}$$

$$K_{\Gamma}(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ -j, & \omega > 0. \end{cases}$$

$$h_{\Gamma}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

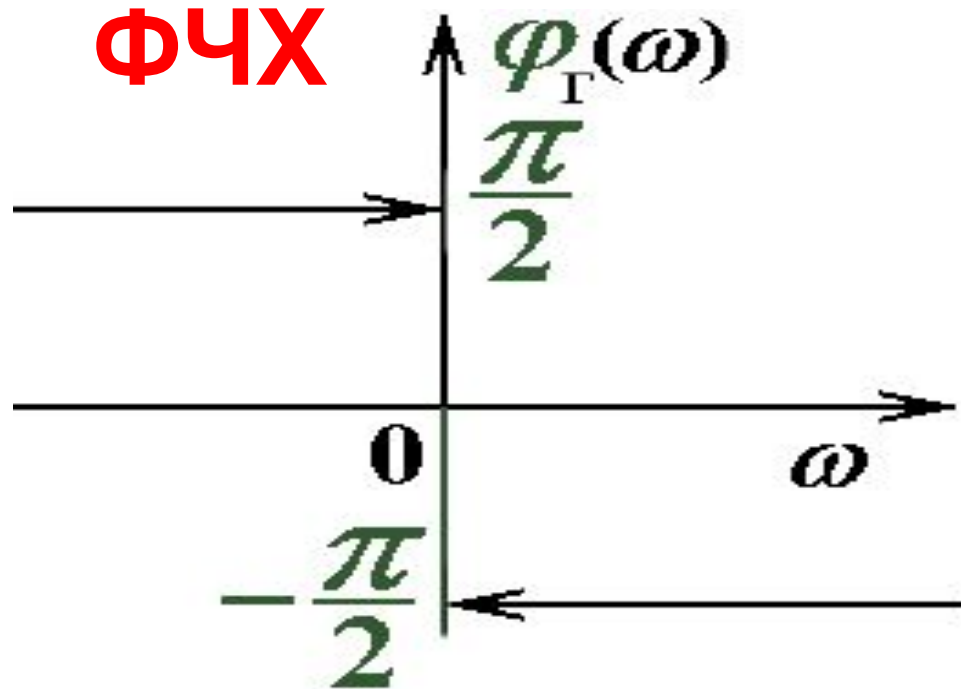


АЧХ



$$K_{\Gamma}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ 1, & \omega > 0. \end{cases}$$

ФЧХ



$$\varphi_{\Gamma}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0. \end{cases}$$

Функция, сопряженная по Гильберту с

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0):$$

$$\tilde{s}(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Функция, сопряженная по Гильберту
с рядом Фурье:

$$\tilde{s}(t) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(n \omega_0 t + \varphi_n).$$

Обратное преобразование Гильберта:

$$s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(t_1)}{t - t_1} dt_1.$$

Импульсная характеристика:

$$\tilde{h}_\Gamma(t) = -\frac{1}{\pi t}.$$

$$\tilde{K}_\Gamma(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ j, & \omega > 0. \end{cases}$$

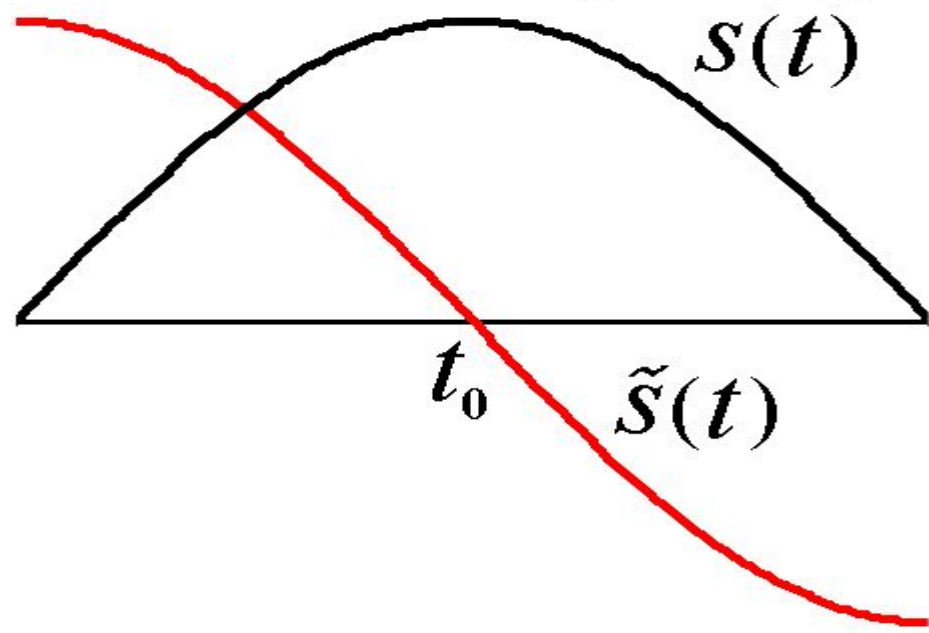
Свойства преобразования Гильберта:

1. Это линейное преобразование:

$$\mathcal{H}[p \cdot s_1(t) + q \cdot s_2(t)] = p \cdot \tilde{s}_1(t) + q \cdot \tilde{s}_2(t).$$

2. Ядро преобразования Гильберта $\frac{1}{\pi t}$ — нечетная функция, если $s = \text{const}$, то $\tilde{s} = 0$.

3. Если $s(t)$ имеет максимум в t_0 , то $\tilde{s}(t_0) = 0$.



Аналитический сигнал: $Z(t) = s(t) + j \cdot \tilde{s}(t)$.

$$U(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)},$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\tilde{s}'(t)s(t) - \tilde{s}(t)s'(t)}{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}.$$

Эти формулы справедливы и для узкополосных, и для широкополосных сигналов.

Для сигнала $s(t) = A_0 \cos \omega t$ представление в виде $s(t) = A_0 e^{j\omega t}$ и $Z(t)$ совпадают.

Спектр аналитического сигнала

$F(\omega)$ – спектр сигнала $s(t)$. $\tilde{s}(t)$ получен с помощью линейного преобразования

$$K_{\Gamma}(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ -j, & \omega > 0. \end{cases}$$

При $\omega > 0$ $\tilde{F}(\omega) = -jF(\omega)$, при $\omega < 0$

$$\tilde{F}(\omega) = jF(\omega).$$

$$F_Z(\omega) = \begin{cases} F(\omega) + j(-j)F(\omega) = 2F(\omega), & \omega > 0 \\ F(\omega) + j \cdot jF(\omega) = 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Спектр аналитического сигнала существует только при положительных частотах.

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ДЕТЕКТИРОВАНИИ

Помехоустойчивость – способность противостоять вредному влиянию помех



$$u(t) = s(t) + x(t)$$

Мера

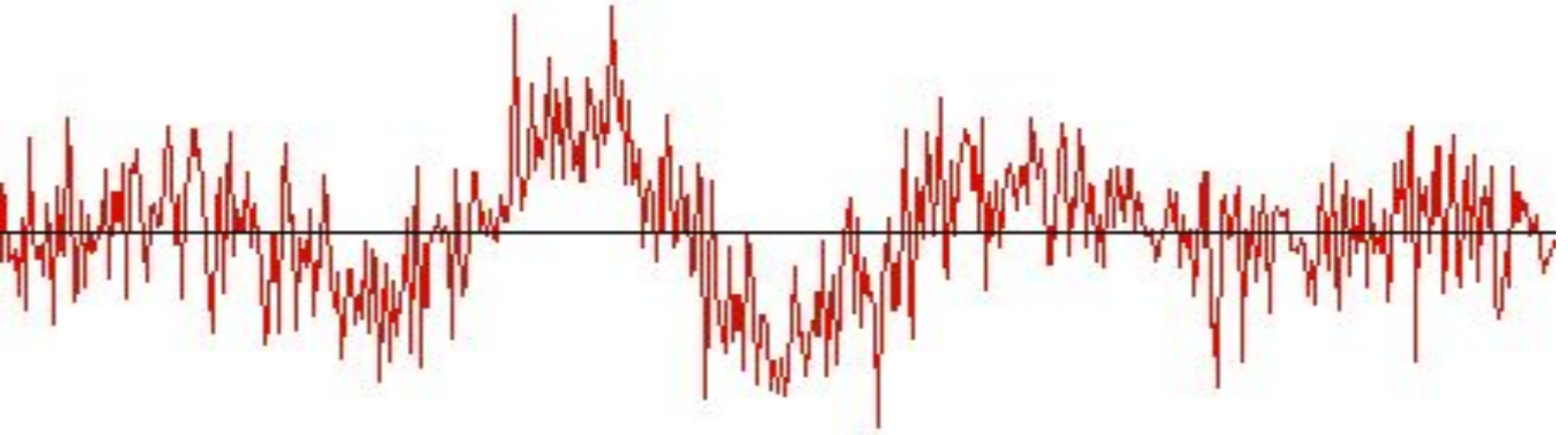
Помехоустойчивости:
отношение сигнал/шум

усилитель
промежуточной
частоты
(УПЧ) $\Delta\omega$

детектор

усилитель
низкой
частоты
(УНЧ) $\Delta\Omega$

Помеха (шум)



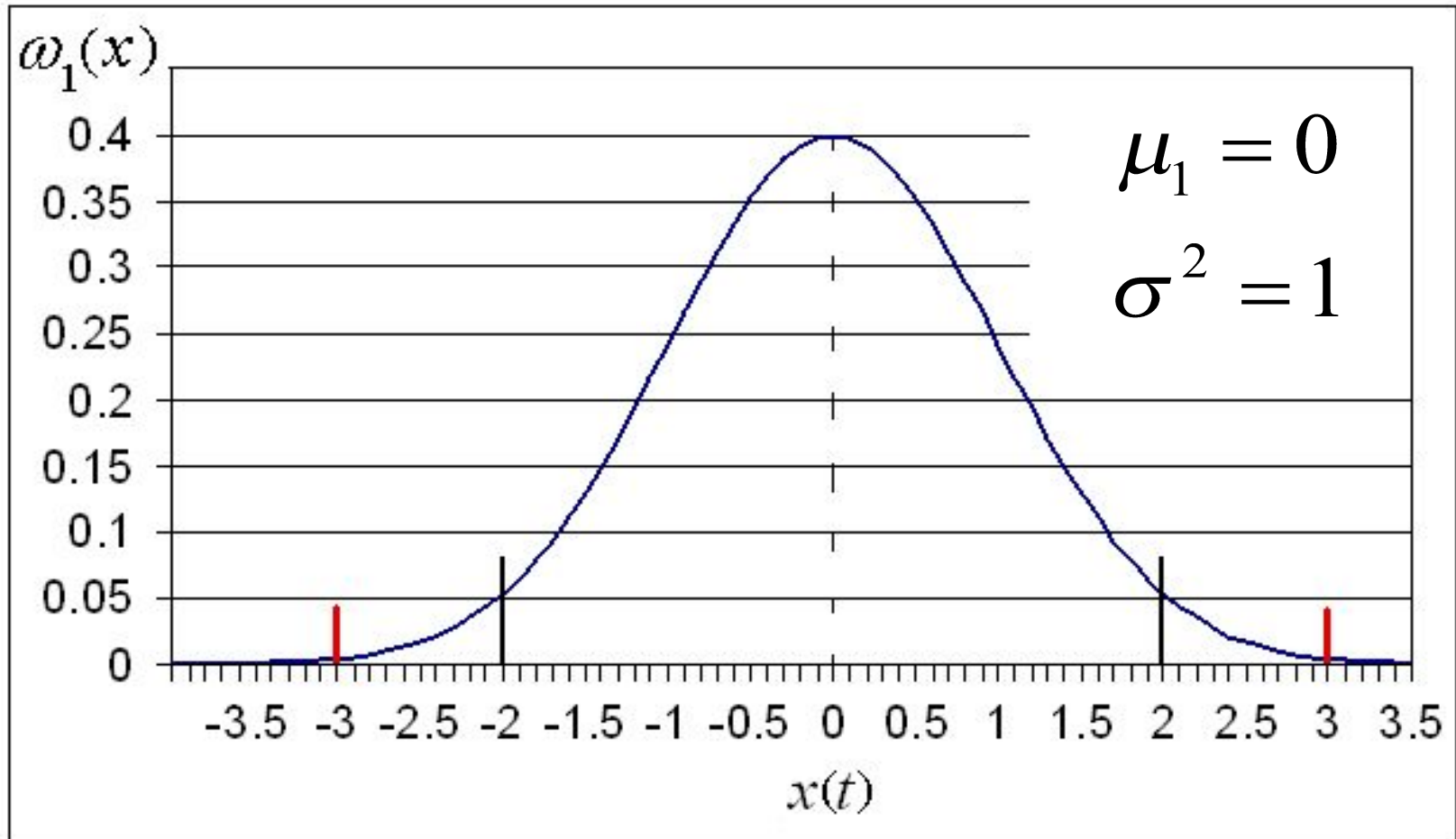
Считаем, что шум $x(t)$ – стационарный случайный процесс с нормальным (гауссовским) законом распределения, нулевым средним. На входе УПЧ спектр мощности шума равен $W_0 = const$, т.е. это *белый шум*. Спектр мощности на выходе УПЧ

$$G(\omega) = W_0 K^2(\omega), \quad K^2(\omega) \text{ – квадрат АЧХ}$$

УПЧ

Нормальный (гауссовский) ССП

$$\omega_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu_1)^2 \right],$$



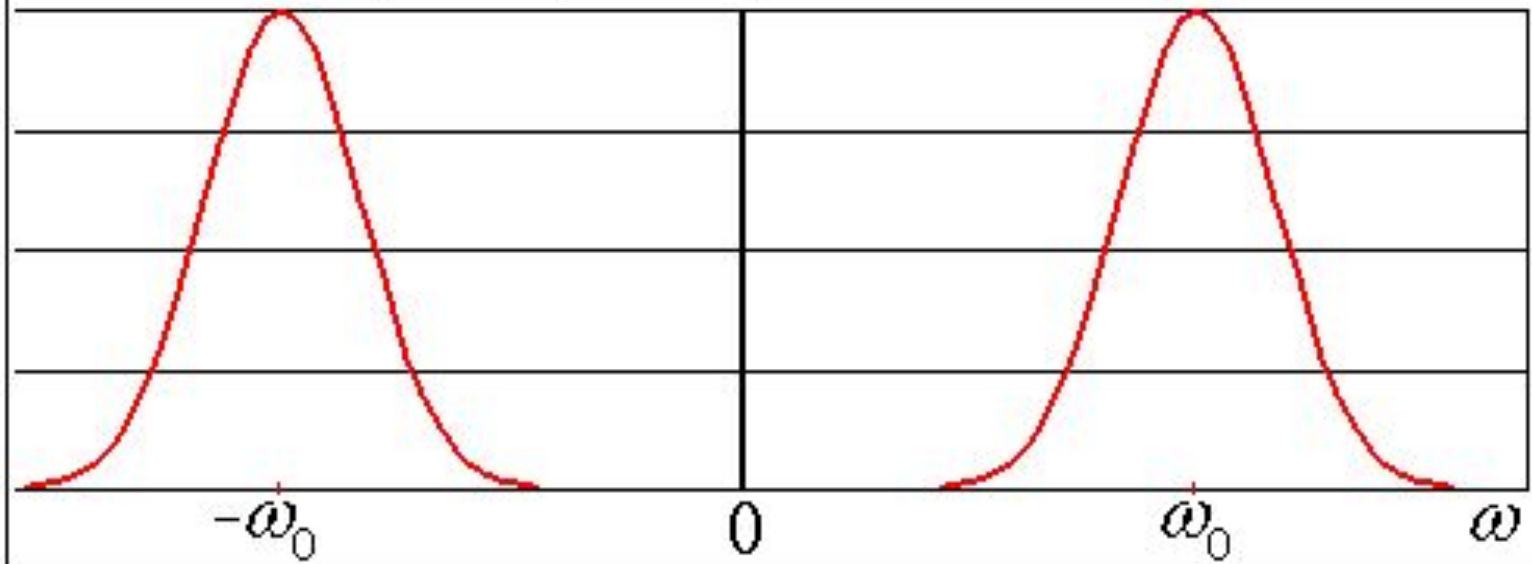
μ_1 — среднее, σ^2 — дисперсия (средняя мощность) шума

$$\mu_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \omega_1(x) dx, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \mu_1]^2 \omega_1(x) dx.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \mu_1]^4 \omega_1(x) dx = 3\sigma^4$$

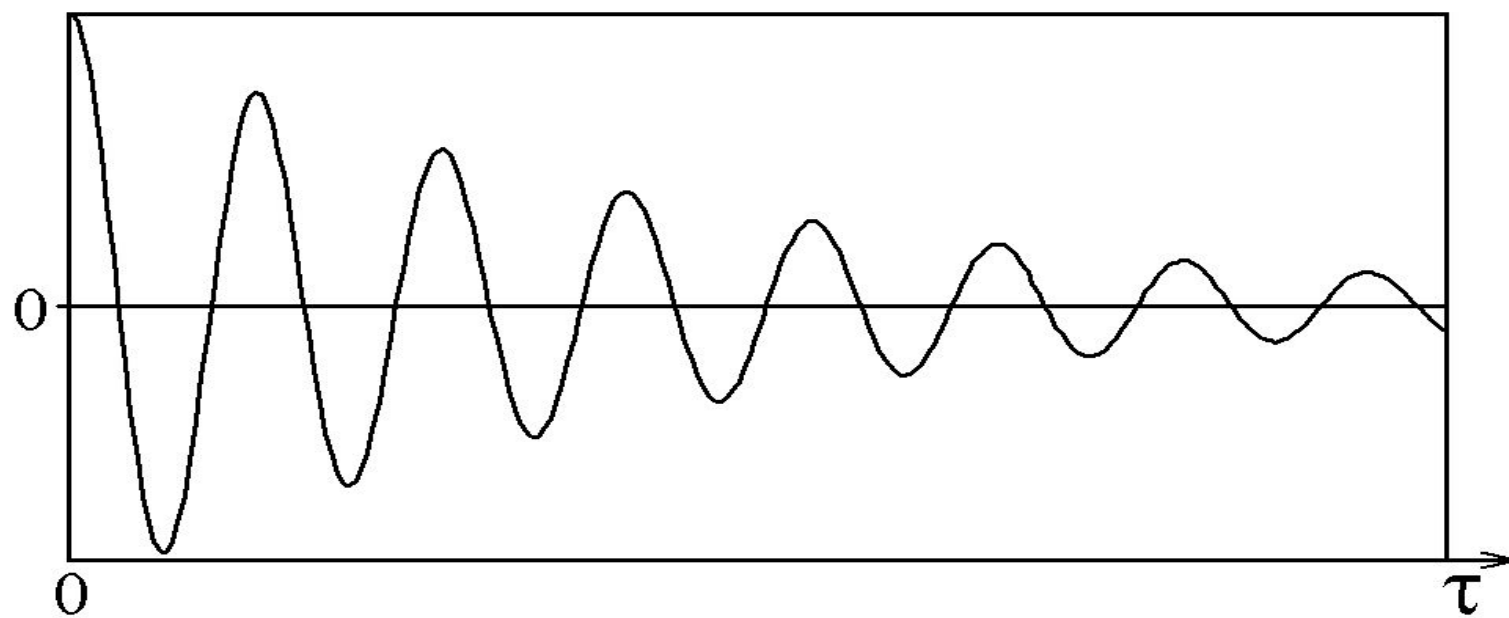
По теореме Винера-Хинчина

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi},$$
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau.$$

$G(\omega)$ спектр мощности узкополосного СП $x(t)$



$R(\tau)$ функция автокорреляции



Для белого шума

$$G(\omega) = W_0 K^2(\omega),$$

$$R(\tau) = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) \exp(j\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$\sigma^2 = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Фазовый детектор

$$s(t) = V \cos[\omega_0 t + \beta \cos \Omega t]$$

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

$$u(t) = s(t) + x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Вход: отношение несущая/шум $h_{\text{ВХ}}^2 = \frac{V^2}{2\sigma^2}$

Полосовой
фильтр УПЧ

Амплитудный
ограничитель

Фазовый
детектор

$$U(t) = \sqrt{V^2 + A^2(t) + 2VA(t) \cos(\beta \cos \Omega t - \theta(t))},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi(t)) = \frac{V \sin(\beta \cos \Omega t) + A(t) \sin \theta(t)}{V \cos(\beta \cos \Omega t) + A(t) \cos \theta(t)}.$$

После ограничителя $U(t) = U_0 = \text{const}$

$$u_0(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Сильный сигнал: $h_{\text{ВХ}}^2 \gg 1$

$$h_{\text{ВХ}}^2 = \frac{V^2}{2\sigma^2} - \text{отношение несущей к шуму}$$

На выходе детектора: $s_{\text{вых}}(t) = S\beta \cos \Omega t$.

$$\varphi(t) \approx \operatorname{arctg} \frac{V \sin(\beta \cos \Omega t) + A(t) \sin \theta(t)}{V \cos(\beta \cos \Omega t)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \operatorname{tg} \frac{\beta \cos \Omega t}{\beta \cos \Omega t} + \frac{A(t) \sin \theta(t)}{V \cos(\beta \cos \Omega t)}$$

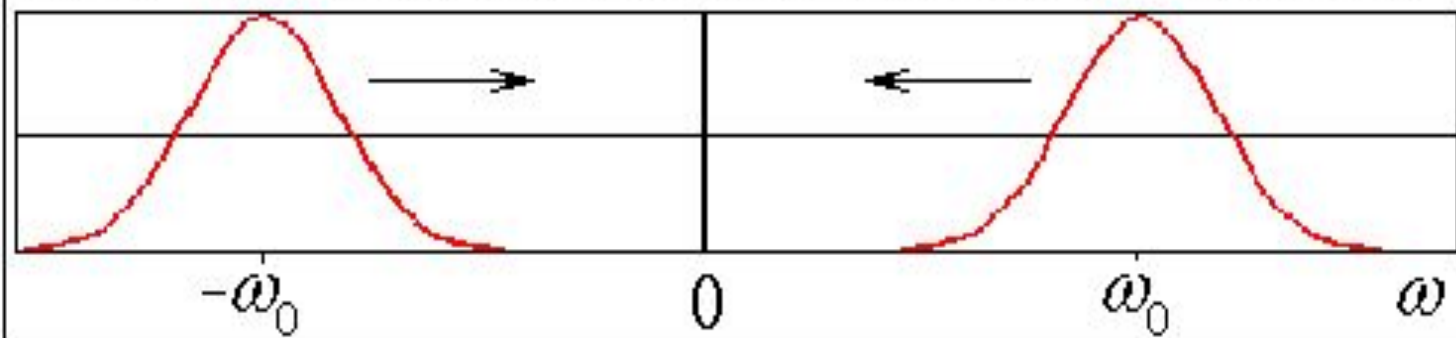
$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{A(t) \sin \theta(t)}{V \cos(\beta \cos \Omega t)}$$

$$\varphi_{\Pi}(t) \approx \operatorname{arctg} \frac{A(t) \sin \theta(t)}{V} \approx \frac{A(t) \sin \theta(t)}{V}.$$

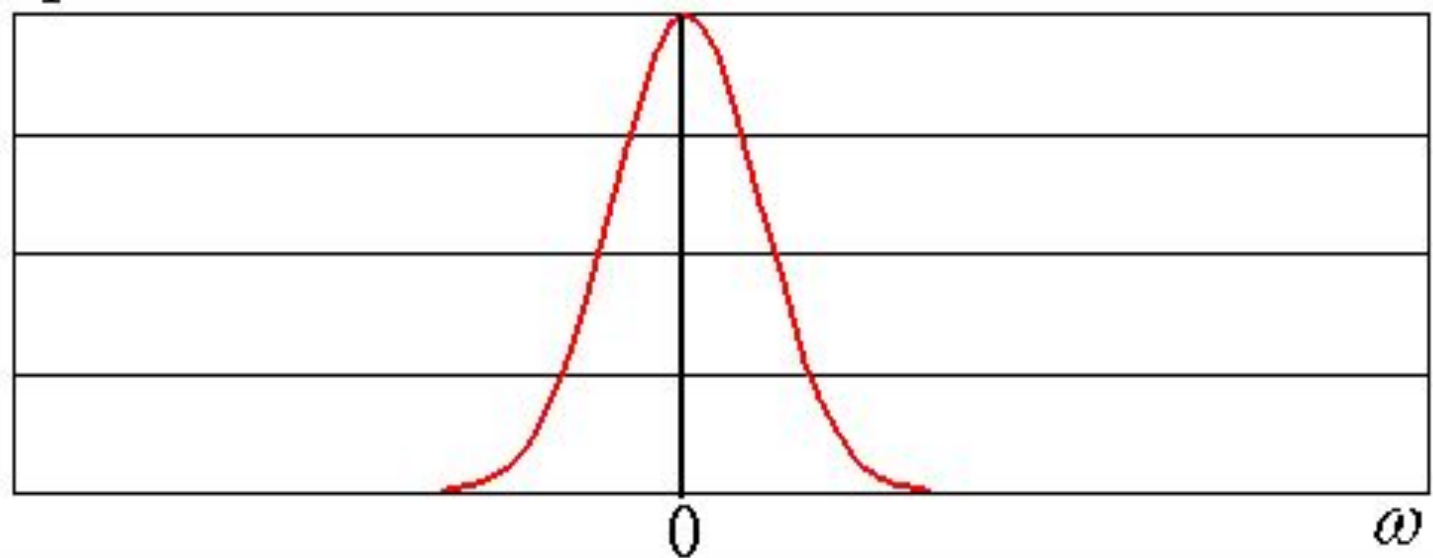
$$x(t) = A(t)\sin\theta(t)\cos\omega_0 t - A(t)\cos\theta(t)\sin\omega_0 t$$

$$A_s(t) = A(t)\sin\theta(t)$$

$G(\omega)$ спектр мощности узкополосного СП $x(t)$



$G_1(\omega)$ спектр мощности $A_s(t) = A(t)\sin\theta(t)$



Квадратурная компонента $A_s(t) = A(t) \sin \theta(t)$
имеет тот же з.р. и параметры, что и $x(t)$

$$\langle [A(t) \sin \theta(t)]^2 \rangle = \langle x^2(t) \rangle = \sigma^2. \quad S=1 \text{ В/рад}$$

Шум на выходе $x_{\text{ВЫХ}}(t) = S \varphi_{\Pi}(t)$, $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = S^2 \frac{\sigma^2}{V^2}$.

$$h_{\text{ВХ}}^2 = \frac{V^2}{2\sigma^2}, \quad h_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{S^2 \beta^2 V^2}{2S^2 \sigma^2} = \beta^2 h_{\text{ВХ}}^2.$$

Частотный детектор: $\beta = \frac{\omega_{\text{Д}}}{\Omega}$, $h_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \Omega^2} h_{\text{ВХ}}^2$.

Сигнал

амплитудная импульсная модуляция

$$s(t) = V(t) m \cos \omega_0 t, \quad m=1 \text{ или } m=0$$

частотная модуляция $\omega_d = \frac{\Delta\omega}{2}$, $\Omega = \frac{\Delta\Omega}{2}$

$$s(t) = V[\cos(\omega_0 + \omega_d \cos \Omega t)t] = V[\cos \omega_0 t + \frac{\omega_d}{\Omega} \cos \Omega t]$$

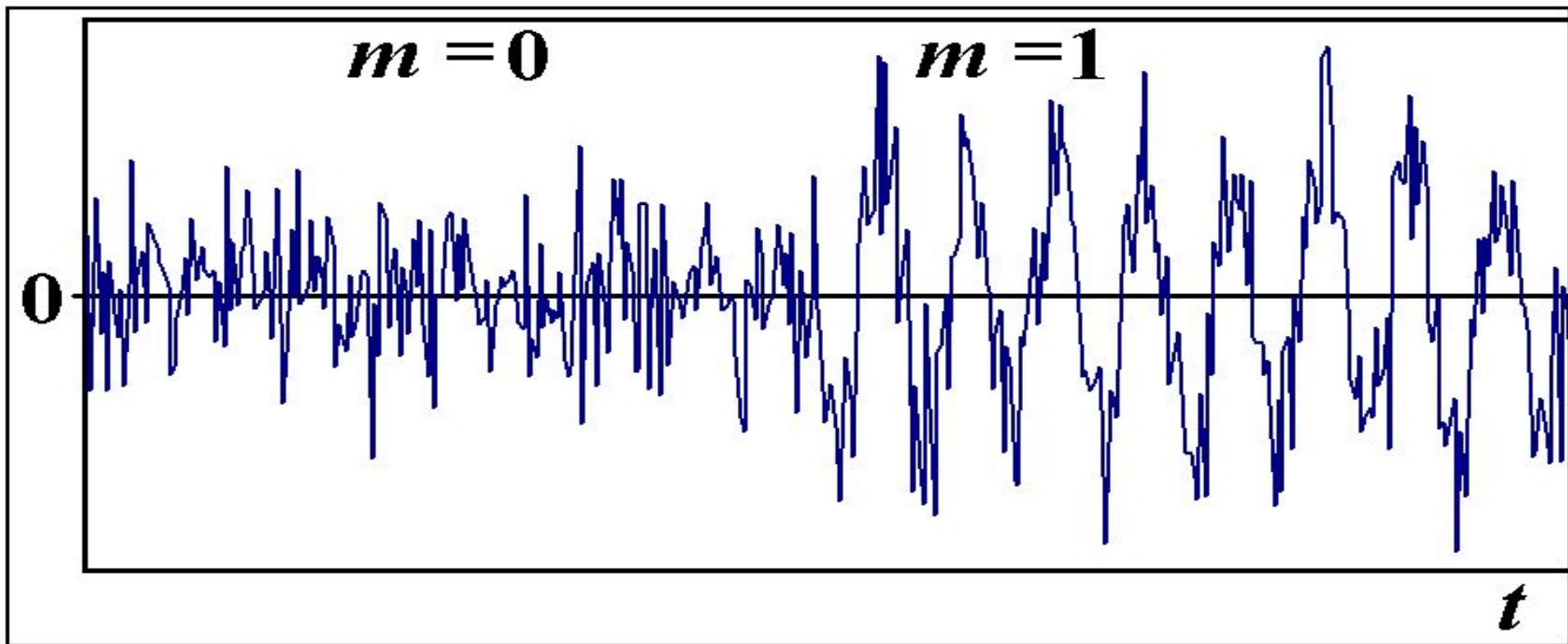
фазовая модуляция $\beta = \frac{\omega_d}{\Omega}$

$$s(t) = V \cos[\omega_0 t + \beta \cos \Omega t]$$

V – амплитуда несущей

Амплитудный линейный детектор

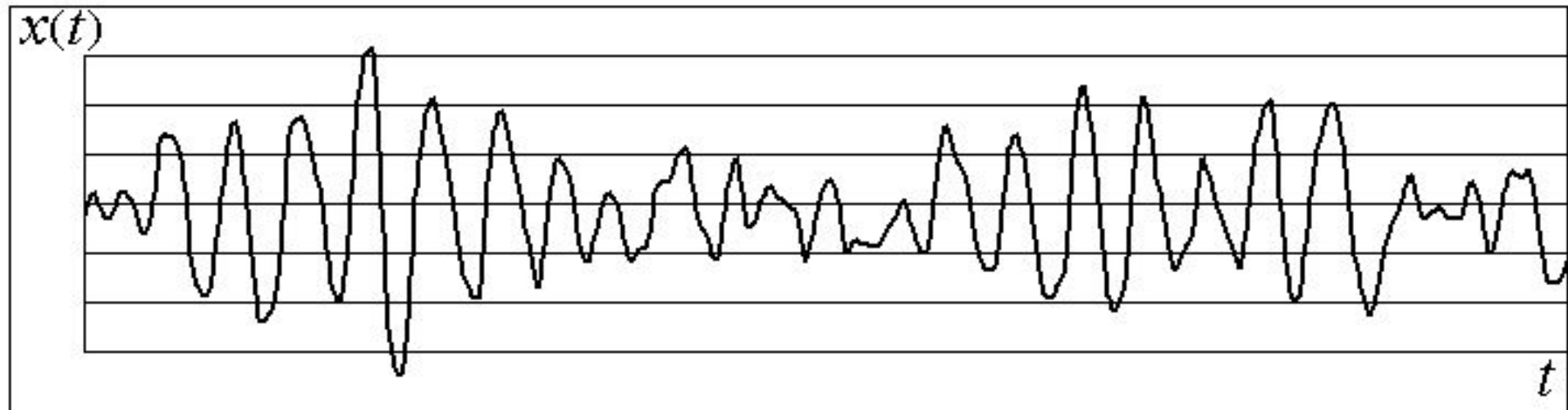
$$z(t) = ms(t) + x(t)$$



усилитель
промежуточной
частоты (УПЧ)

амплитудный
детектор

усилитель
низкой
частоты (УНЧ)



Реализации узкополосного ССП – это квазигармонические колебания: $x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$, A и θ случайные
Функция автокорреляции $R(\tau) = R_0(\tau) \cos \omega_0 \tau$.



$$\begin{aligned}u(t) &= s(t) + x(t) = V \cos \omega_0 t + A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] = \\&= [V + A(t) \cos \theta(t)] \cos \omega_0 t - A(t) \sin \theta(t) \sin \omega_0 t = \\&= U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].\end{aligned}$$

$$U(t) = \sqrt{V^2 + A^2(t) + 2VA(t) \cos \theta(t)},$$

$$\varphi_{\Pi}(t) = \operatorname{arctg} \frac{A(t) \sin \theta(t)}{V + A(t) \cos \theta(t)}.$$

Совместная плотность вероятности огибающей и фазы

$$\omega_2(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right),$$

плотность вероятности огибающей

$$\omega_1(A) = \int_0^{2\pi} \omega_2(A, \varphi) d\varphi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right),$$

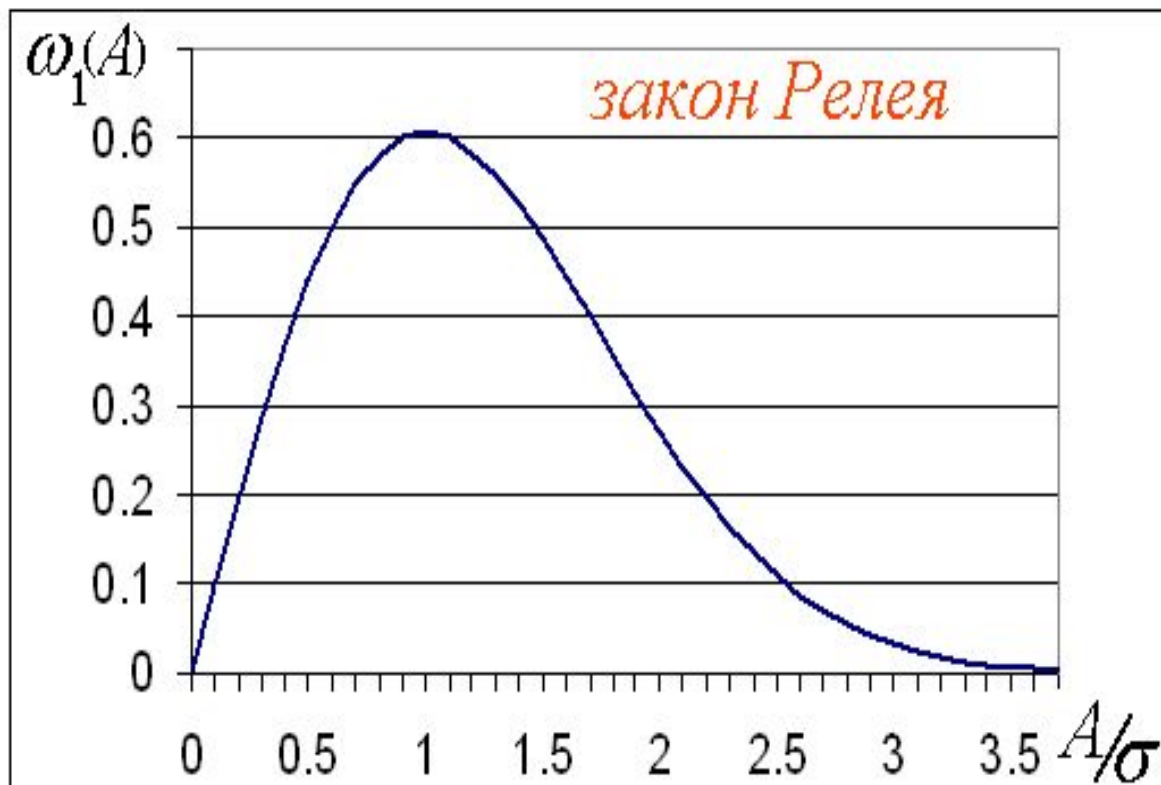
это закон распределения Релея.

Плотность вероятности фазы

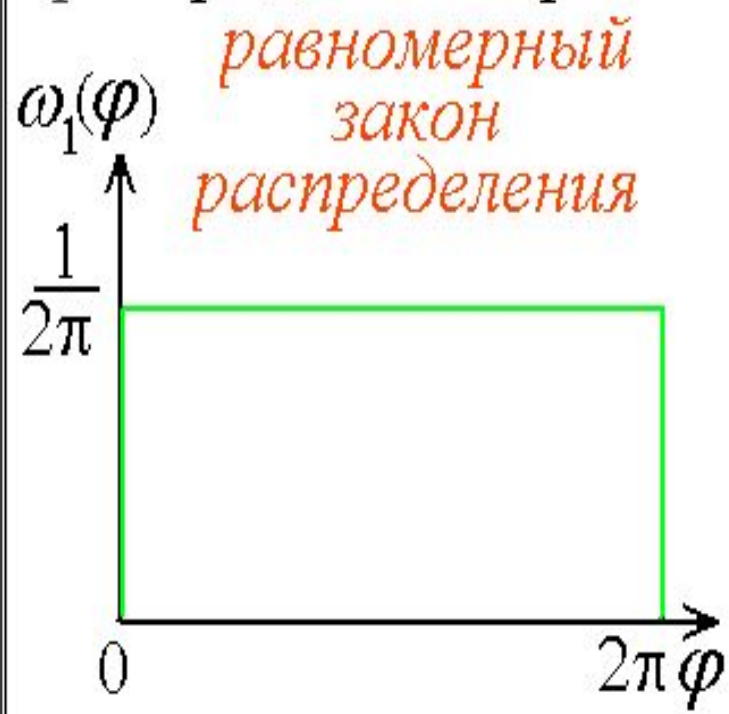
$$\omega_1(\varphi) = \int_0^{\infty} \omega_2(A, \varphi) dA = \frac{1}{2\pi}, \text{ фаза распределена}$$

равномерно в интервале $(0, 2\pi)$.

Плотность распределения огибающей



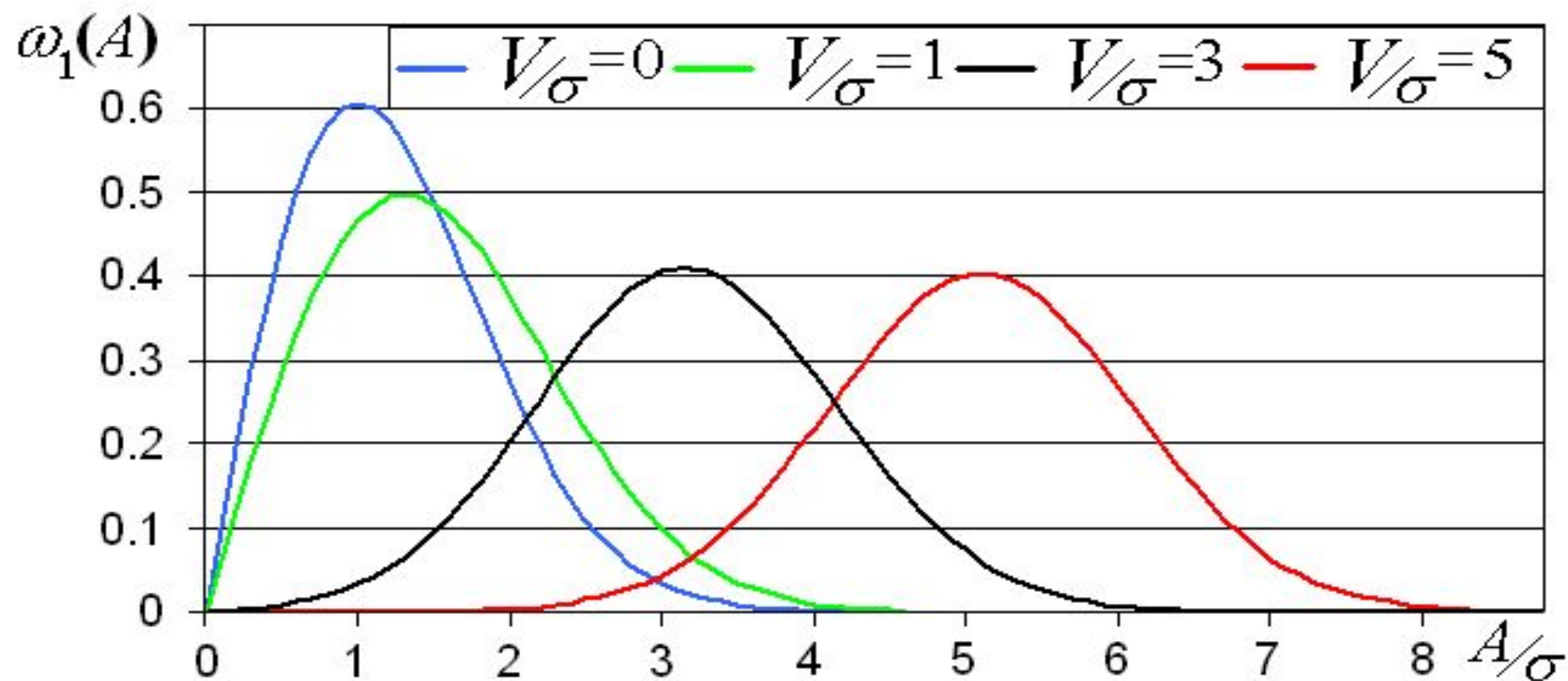
Плотность распределения фазы



$$\langle A \rangle = \int_0^{\infty} A w_1(A) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma, \quad \langle A^2 \rangle = \int_0^{\infty} A^2 w_1(A) dA = 2\sigma^2$$

$$\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - (\langle A \rangle)^2, \quad \sigma_A^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2.$$

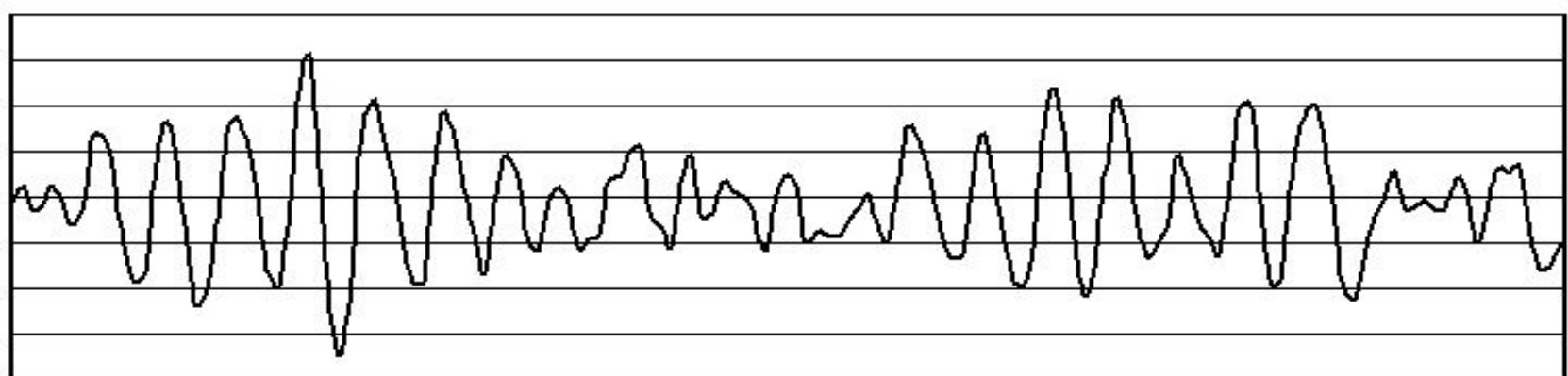
Плотность вероятности Релея-Райса



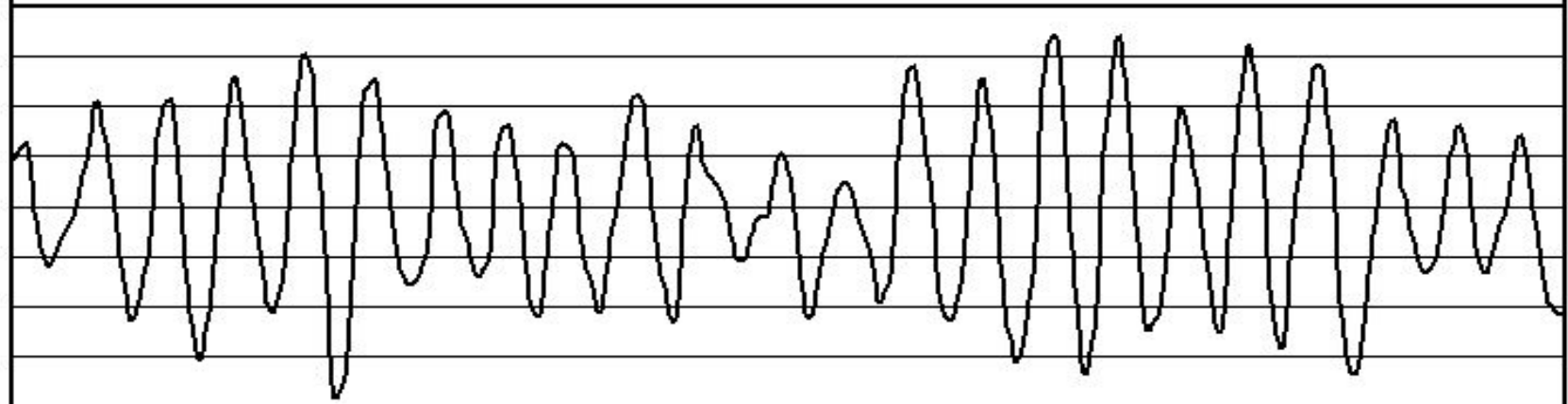
$$\langle A \rangle = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[(1 - h^2) I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + h^2 I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \right] \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right), \quad h^2 = \frac{V^2}{2\sigma^2}$$

$$h^2 = h_{\text{BX}}^2, \quad \langle A^2 \rangle = 2\sigma^2 + \frac{V^2}{2}, \quad \sigma_A^2 = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{h_{\text{BX}}^2}{2}\right) - (\langle A \rangle)^2$$

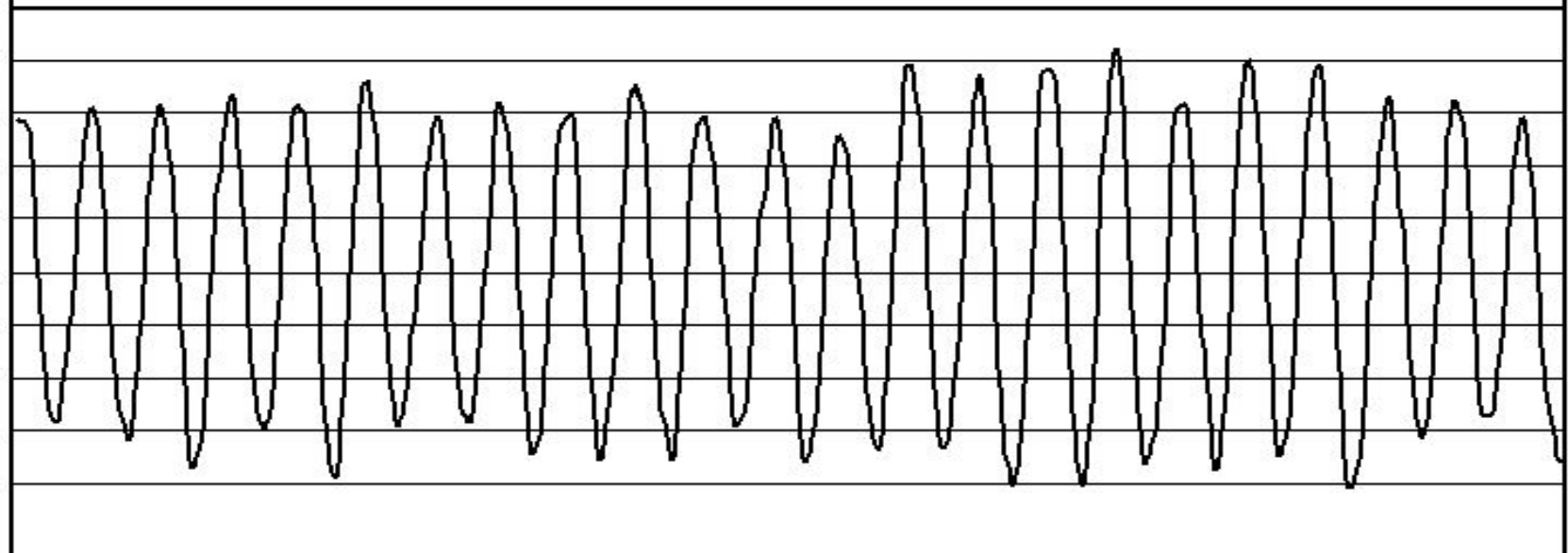
$$\frac{A_0}{\sigma} = 0$$



$$\frac{A_0}{\sigma} = 1$$



$$\frac{A_0}{\sigma} = 5$$



Функция Бесселя от
мнимого аргумента

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z \cos \varphi} d\varphi$$

Функция Бесселя от
действительного
аргумента

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jz \cos \varphi} d\varphi$$

Отношение сигнала к
шуму на выходе
линейного детектора

$$h_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{(\langle A \rangle - \sigma \sqrt{\pi/2})^2}{2\sigma^2 + V^2 - \langle A \rangle^2}$$

Функция корреляции шума на входе

$$r(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 t$$

Функция корреляции шума на выходе

$$R_{\text{ВЫХ}}(\tau)$$

1. Слабый сигнал: $h^2 \ll 1$,

$$R_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \frac{\pi}{8} \sigma^2 [\rho^2(\tau) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 2h^2 \rho(\tau)]$$

$$I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx 1, \quad I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{h^2}{4}, \quad e^{-\frac{h^2}{2}} \approx 1 - \frac{h^2}{2}, \quad \langle A \rangle \approx \sqrt{\pi/2} \sigma \left(1 + \frac{h^2}{2}\right),$$

$$S_{\text{ВЫХ}} \approx \sqrt{\pi/2} \sigma \frac{h^2}{2}, \quad \sigma_{\text{ВЫХ}}^2 \approx \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2, \quad h_{\text{ВЫХ}}^2 \approx \frac{\frac{\pi h^4}{2 \cdot 4}}{2 - \frac{\pi}{2}} \approx \frac{h^4}{4} = h_{\text{ВХ}}^2.$$

2. Сильный сигнал: $h^2 \gg 1$, $R_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \left(1 + \frac{1}{4h^2} \rho(\tau) \right)$

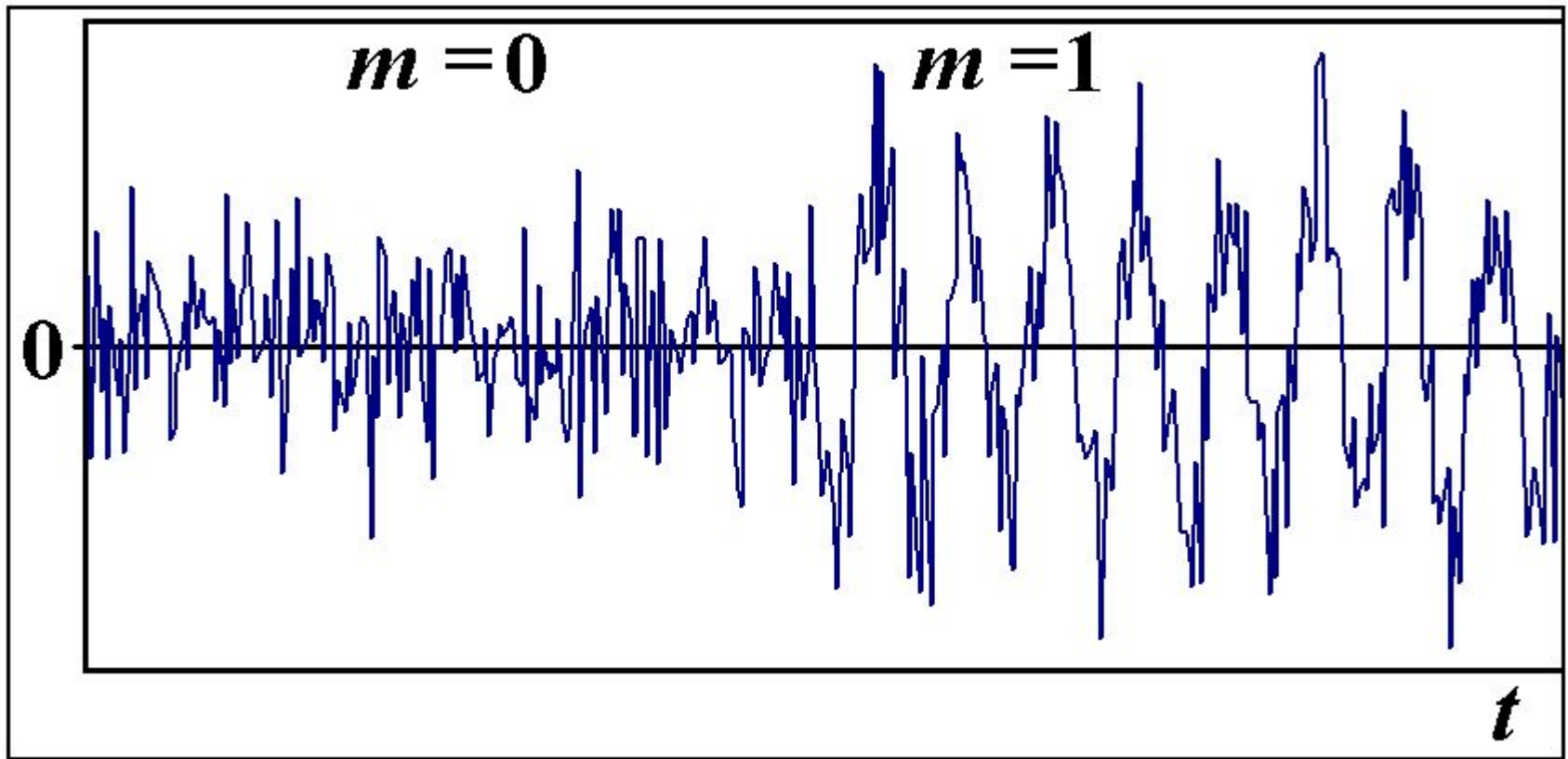
$$I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{\pi h}} \left(1 + \frac{1}{4h^2} \right), \quad I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{\pi h}} \left(1 - \frac{3}{4h^2} \right).$$

$$\langle A \rangle \approx \sqrt{2} \sigma h \left(1 + \frac{1}{4h^2} \right) = V \left(1 + \frac{1}{4h^2} \right) \approx V, \quad \sigma_{\text{ВЫХ}}^2 \approx \sigma^2,$$

$$h_{\text{ВЫХ}}^2 \approx \frac{V^2}{\sigma^2} = 2h^2 = 2h_{\text{ВХ}}^2.$$

Амплитудный квадратичный детектор

$$z(t) = ms(t) + x(t)$$



усилитель
промежуточной
частоты (УПЧ)

амплитудный
детектор

усилитель
низкой
частоты (УНЧ)

$$u(t) = s(t) + x(t) = E \cos \omega_0 t + A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)],$$

$$U(t) = \sqrt{E^2 + A^2(t) + 2EA(t) \cos \theta(t)}, \quad \langle \cos \theta \rangle = 0$$

$$\langle A^2 \rangle = 2\sigma^2, \quad \langle A^4 \rangle = 8\sigma^4, \quad h_1^2 = \frac{E^2}{2\sigma^2} = (c/n)_{\text{ex}}.$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = K \frac{U^2(t)}{2} = K \left[\frac{E^2}{2} + \frac{A^2}{2} + EA(t) \cos \theta(t) \right].$$

$$\langle U_{\text{ВЫХ}} \rangle = K \left[\frac{E^2}{2} + \sigma^2 \right], \quad \text{приращение: } S_{\text{ВЫХ}} = K \frac{E^2}{2}.$$

$$U_{\text{ВЫХ}}^2(t) = K^2 \left\{ \frac{E^4}{4} + \frac{A^4(t)}{4} + \frac{A(t)^2 E^2}{2} + \frac{A(t)^2}{2} E^2 [1 + \cos 2\theta(t)] \right\}.$$

$$\langle U_{\text{ВЫХ}}^2 \rangle = K^2 \left\{ \frac{E^4}{4} + \frac{\langle A^4 \rangle}{4} + \langle A^2 \rangle E^2 \right\},$$

$$\langle U_{\text{ВЫХ}}^2 \rangle = K^2 \left\{ \frac{E^4}{4} + 2\sigma^4 + 2E^2\sigma^2 \right\},$$

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \langle U_{\text{ВЫХ}}^2 \rangle - (\langle U_{\text{ВЫХ}} \rangle)^2 =$$

$$= K^2 \left[\frac{1}{4} E^4 + 2\sigma^4 + 2E^2\sigma^2 - \frac{1}{4} E^4 - \sigma^4 - E^2\sigma^2 \right],$$

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = K^2 \sigma^2 [\sigma^2 + E^2],$$

$$(c/n)_{\text{ВЫХ}} = \frac{S_{\text{ВЫХ}}^2}{\sigma_{\text{ВЫХ}}^2} = \frac{\frac{1}{4}E^4}{\sigma^2[\sigma^2 + E^2]} = \frac{\left[\frac{E^2}{2\sigma^2}\right]^2}{1 + 2\left[\frac{E^2}{2\sigma^2}\right]} = \frac{h_1^4}{1 + 2h_1^4}.$$

1. Слабый сигнал : $h_1^2 \ll 1$,

$$(c/n)_{\text{ВЫХ}} \approx h_1^4 = (c/n)_{\text{ВХ}}^2;$$

2. Сильный сигнал : $h^2 \gg 1$, $(c/n)_{\text{ВЫХ}} = \frac{h_1^2}{2}$.