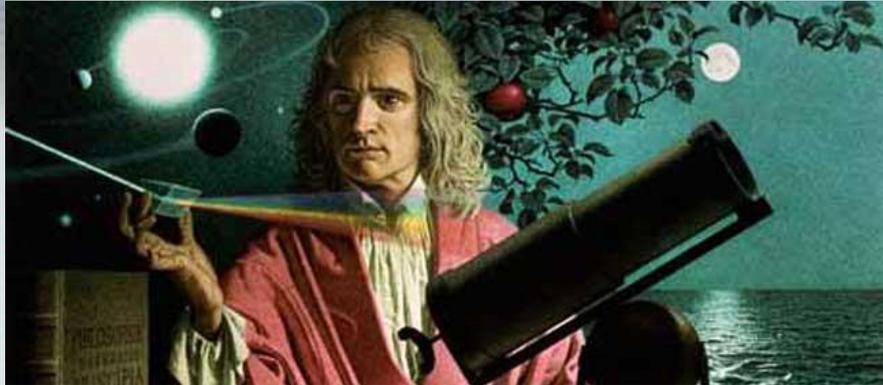
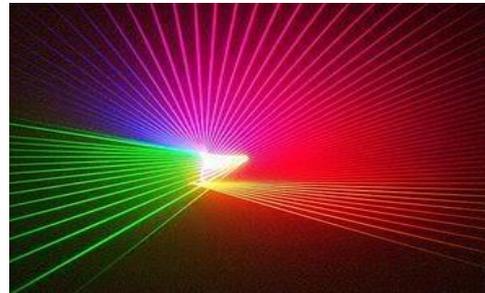


Храмов Владимир Николаевич



Физика МЕХАНИКА

Мультимедийные лекции
кафедры
лазерной
физики



- **Механика**
- **Молекулярная физика**
- **Электричество и магнетизм**
- **Оптика**
- **Физика атомов и атомных явлений**

Структура дисциплины «Механика»

- 1. Введение. Механика – раздел курса общей физики**
- 2. Кинематика материальной точки**
- 3. Динамика материальной точки**
- 4. Законы сохранения**
- 5. Неинерциальные системы отсчета**
- 6. Механика твердого тела**
- 7. Всемирное тяготение**
- 8. Колебательное движение**

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

УЧЕБНИКИ

- Савельев И.В. Курс общей физики, т.1. **Механика. Молекулярная физика**
- Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5 томах. Т. 1. **Механика**
- Матвеев А.Н. **Механика и теория относительности**
- Стрелков С.П. **Механика**

ЗАДАЧНИКИ

- Стрелков С.П., Сивухин Д.В., Угаров В.А., Яковлев И.А. **Сборник задач по общему курсу физики. Механика** / Под ред. И.А. Яковлева. 4-е изд. М. : Наука, 1977. 288 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Белянкин А. Г., Матвеев А. Н., Сараева И. М., Устинова А. В., Шушурин С. Ф. **Методика решения задач механики**: Метод. пособие / Под ред. А. Н. Матвеева. М.: Изд-во МГУ, 1980. 160 с.
- Иродов И.Е. **Основные законы механики**: Учеб. Пособие для физ. спец. вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. шк., 1985. 248 с.
- Савельев И.В. **Курс общей физики**. В 4-х томах. Том 1. **Механика. Молекулярная физика и термодинамика**
- Киттель Ч. , Найт У., Рудерман М. **Берклевский курс физики**. Т.1. **Механика**
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. **Фейнмановские лекции по физике**. Том. 1. **Современная наука о природе. Законы механики**. Том 2. **Пространство, время, движение**

1. Введение. Механика - раздел курса общей физики

1.1. Физические величины

1.2. Системы физических величин

1.3. Размерности физических величин

Задачи и методы физики

Задача физики состоит в создании в нашем сознании такой модельной картины физического мира, которая наиболее полно отражает его свойства.

Физика – наука экспериментальная. Экспериментальный метод физики состоит в следующем: на основе экспериментов и наблюдений создается модель, в рамках которой делаются предсказания о явлениях, проверяемых в свою очередь в экспериментах и наблюдениях. В результате этого уточняется модель, и делаются новые предсказания.

Физические величины и их измерение

Свойства и качества, которыми оперирует физика, называются *физическими величинами*.

Измерением физических свойств называется процедура соотнесения этим свойствам некоторых чисел таким образом, чтобы сравнение свойств можно было провести путем сравнения чисел.

Основные величины и единицы измерения Международной системы единиц (СИ)

Длина (размерность – L) – величина, характеризующая протяженность, удаленность и перемещение тел или их частей вдоль заданной линии.

Единица длины – метр (м). Метр – это длина пути, проходимого в вакууме светом за $1/299\,792\,458$ долю секунды. Это определение было принято в октябре 1983 г.

Масса (размерность – M) – величина, определяющая инертные и гравитационные свойства материальных объектов.

Единица массы – килограмм (кг). Килограмм равен массе международного прототипа килограмма.

Время – величина, характеризующая последовательную смену явлений и состояний материи, характеризующая длительность их бытия.

Единица времени – секунда (с). Секунда – продолжительность $9\,192\,631\,770$ периодов колебаний излучения, соответствующего переходам между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия-133.

Основные величины и единицы измерения Международной системы единиц (СИ)

Сила электрического тока (размерность – I) – скалярная величина, равная производной по времени от электрического заряда, переносимого носителями заряда сквозь рассматриваемую поверхность.

Единица силы электрического тока – ампер (А). Ампер – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины с ничтожно малой площадью кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызывал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Термодинамическая температура (размерность – T) – температура, отсчитываемая по термодинамической шкале температур от абсолютного нуля.

Единица термодинамической температуры – кельвин (К). Кельвин равен $1/273,16$ части термодинамической температуры тройной точки воды.

Основные величины и единицы измерения Международной системы единиц (СИ)

Количество вещества (размерность n) – величина, равная числу структурных элементов, содержащихся в теле или системе тел.

Единица количества вещества – моль (моль). Моль равен количеству вещества, в составе которого содержится столько же структурных элементов, сколько атомов в изотопе углерода-12 массой 0,012 кг.

Сила света (размерность – J) – величина, равная отношению светового потока, распространяющегося от источника излучения в рассматриваемом направлении внутри малого телесного угла к этому телесному углу.

Единица силы света – кандела (кд). Кандела равна силе света в данном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $540 \cdot 10^{12}$ Гц ($\lambda = 555$ нм), энергетическая сила светового излучения которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

Дополнительные величины и единицы

Плоский угол α – геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки. Размерности не имеет, единица – радиан (рад). Радиан – плоский угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Телесный угол Ω – часть пространства, заключенного внутри одной полсти конической поверхности с замкнутой направляющей. Размерности не имеет, единица – стерadian (ср). Стерadian равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на ее поверхности площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

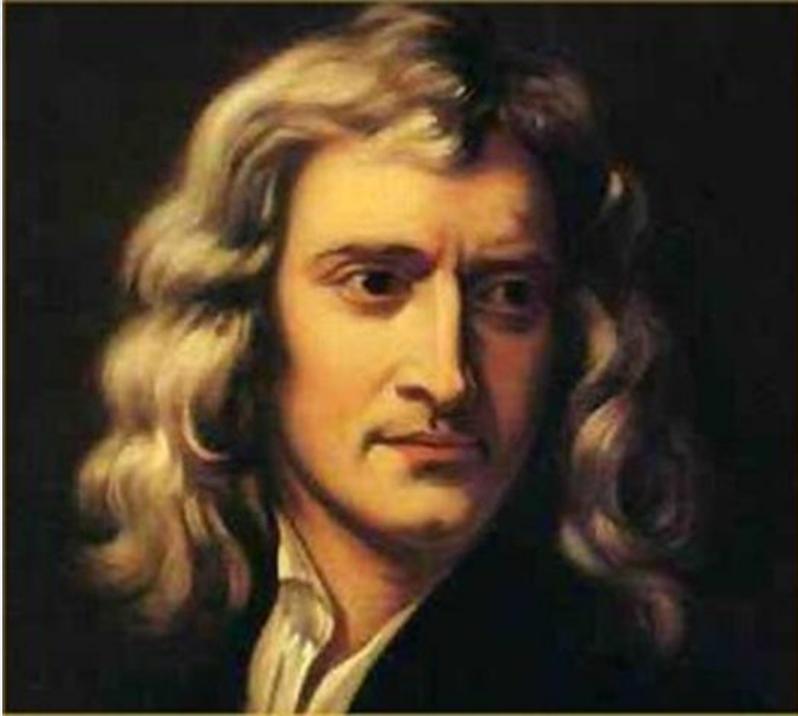
Механика – наука о движении и равновесии тел.

**Под движением в механике понимают
простейшую форму изменения материи –
перемещение тела относительно других тел.**

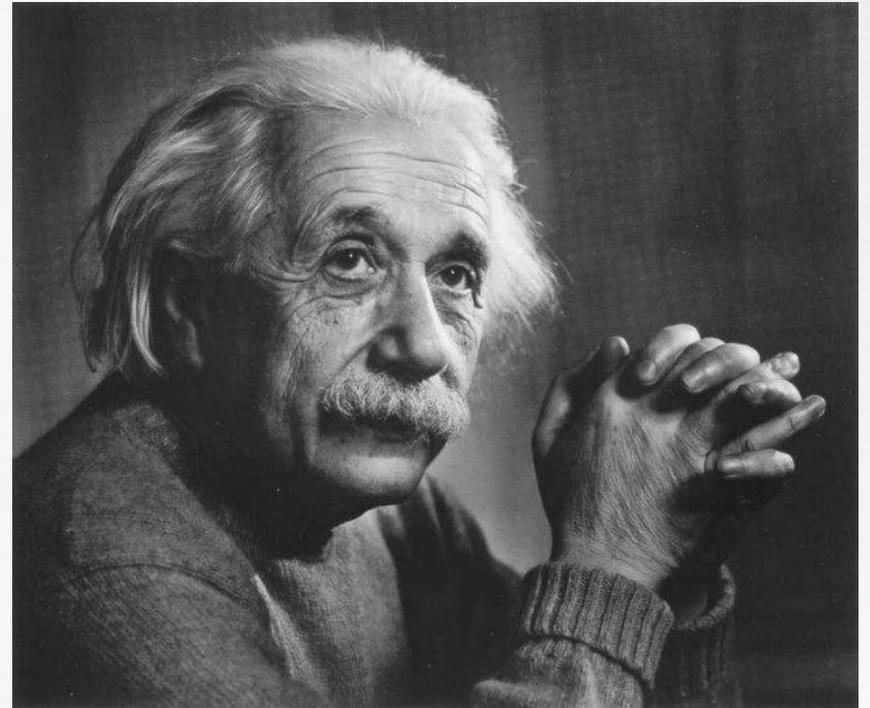
или

**Движением называют изменение
относительного положения тела в
пространстве с течением времени.**

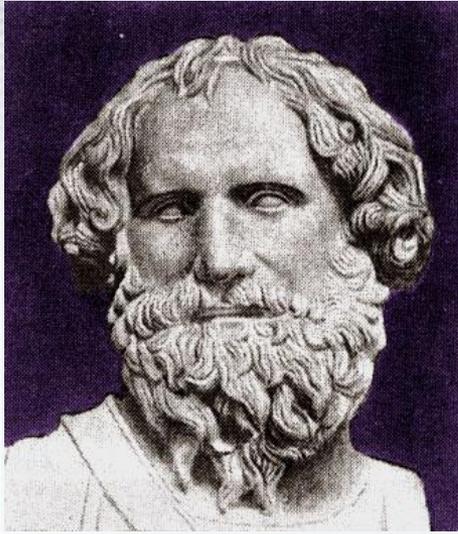
Механика: от Ньютона до Эйнштейна



Исаак Ньютон
(1643 – 1727)



Альберт Эйнштейн
(1879 – 1955)



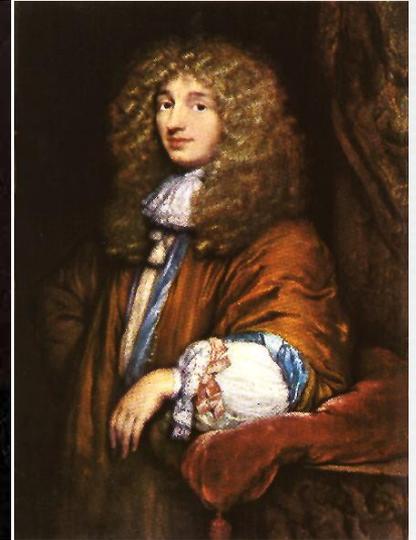
Архимед
(ок.272-212 до н.э.)



Иоганн Кеплер
(1571-1630)



Галилео Галилей
(1564-1642)



Христиан Гюйгенс
(1629-1695)

2. Кинематика материальной точки

Кинемáтика – раздел механики, изучающий математическое описание движения идеализированных тел, без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.).

Исходные понятия кинематики – пространство и время.

Пространство и время в физике определяются в общем виде как фундаментальные структуры координации материальных объектов и их состояний: система отношений, отображающая координацию сосуществующих объектов (расстояния, ориентацию и т. д.), образует пространство, а система отношений, отображающая координацию сменяющих друг друга состояний или явлений (последовательность, длительность и т. д.), образует время.

Пространство и время являются организующими структурами различных уровней физического познания и играют важную роль в межуровневых взаимоотношениях.

Под временем понимается свойство материальных процессов иметь определенную длительность, следовать друг за другом в определенной последовательности и развиваться по этапам и стадиям.

Система отсчета

Система отсчёта – это совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат и системы отсчёта времени, по отношению к которым рассматривается движение (или равновесие) каких-либо материальных точек или тел.

Материальная точка

Материальной точкой называется макроскопическое тело, размеры которого настолько малы, что в рассматриваемом движении их можно не принимать во внимание и считать, что все вещество тела сосредоточено в одной геометрической точке пространства.

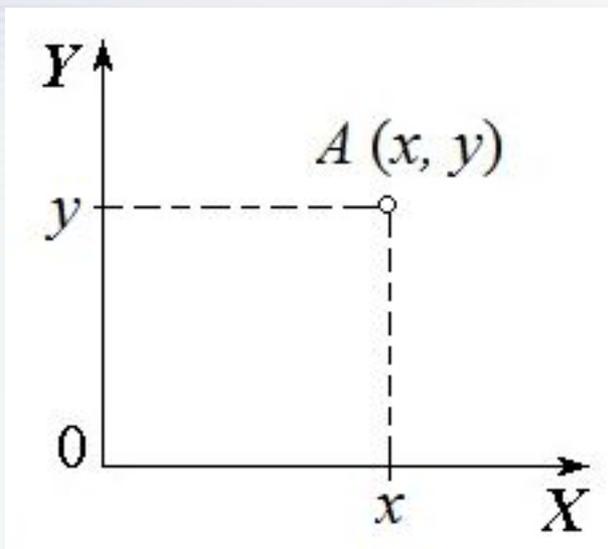
За материальную точку принимают тело, размеры которого пренебрежимо малы в сравнении с расстояниями между телами.

Материальное тело

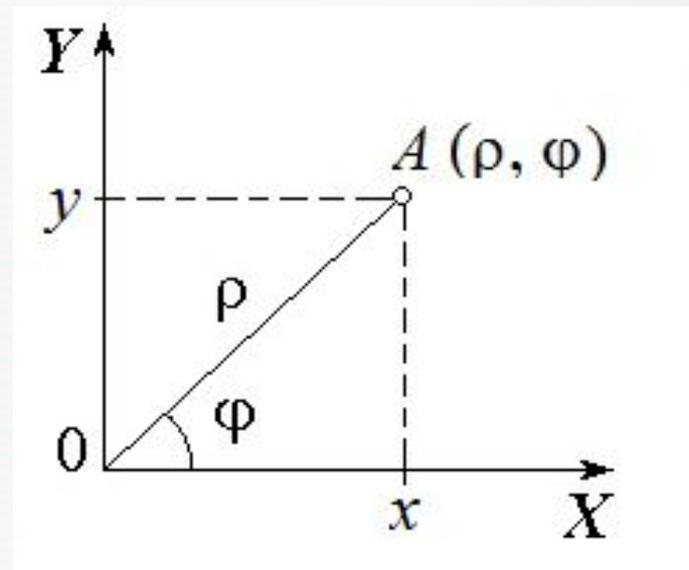
Материальное тело – совокупность материальных точек, которые могут быть идентифицированы и отличны друг от друга.

Абсолютно твердое тело – тело, расстояние между любыми точками которого неизменно.

Основные системы координат на плоскости



Декартова (прямоугольная)
система координат



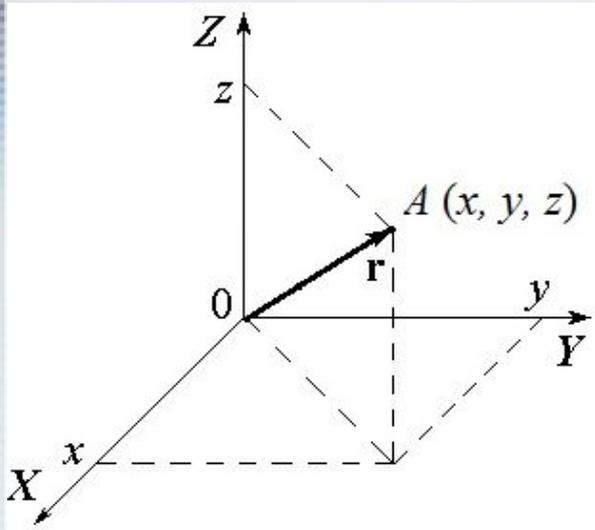
Полярная
система координат

Преобразование от полярных координат к декартовым

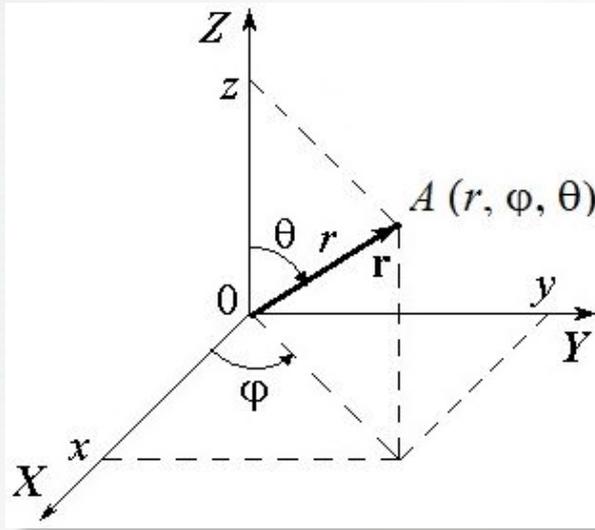
$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

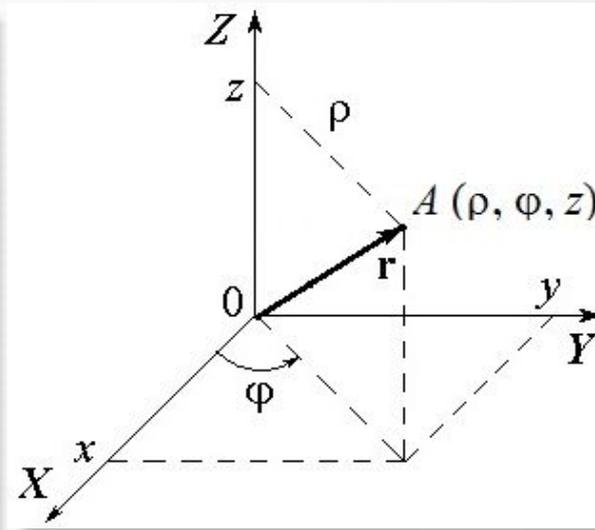
Основные системы координат в пространстве



Декартова (прямоугольная)
система координат



Сферическая
система координат

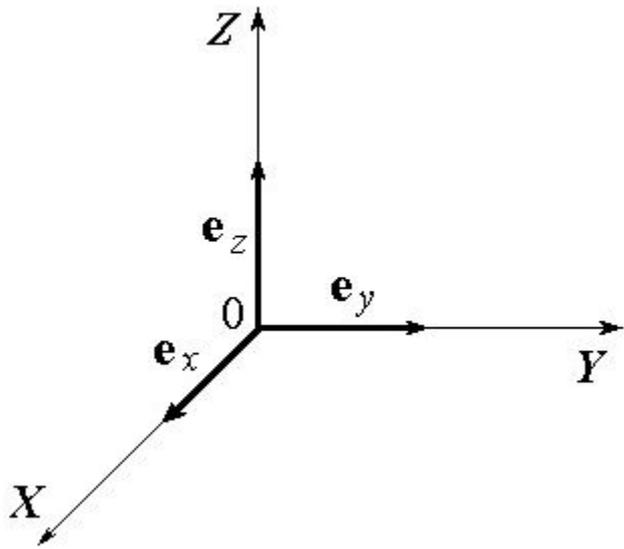


Цилиндрическая
система координат

Преобразование координат

От цилиндрических к декартовым $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $z = z$

От сферических к декартовым $x = r \sin \theta \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \sin \varphi$; $z = r \cos \theta$



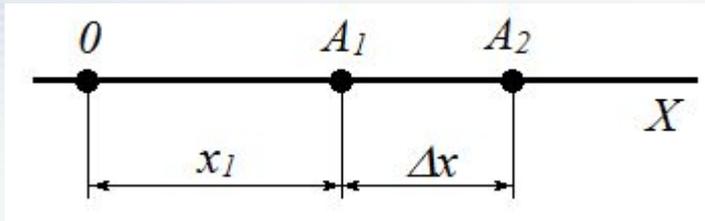
$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$$

Скорость и ускорение при прямолинейном движении



$$x_1 = x(t)$$

$$x_2 = x(t + \Delta t)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t)$$

Средняя скорость

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$$

Ускорение

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} = \ddot{x}$$

Пример 1. Неподвижная материальная точка.

$$x = \text{const}$$

$$\Delta x = 0$$

$$v = \dot{x} = 0$$

$$a = 0$$

Пример 2. Равномерное движение.

$$x = Bt + C; \quad B, C - \text{const}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = B = v_{\text{cp}}$$

$$C = x(t=0) = x_0$$

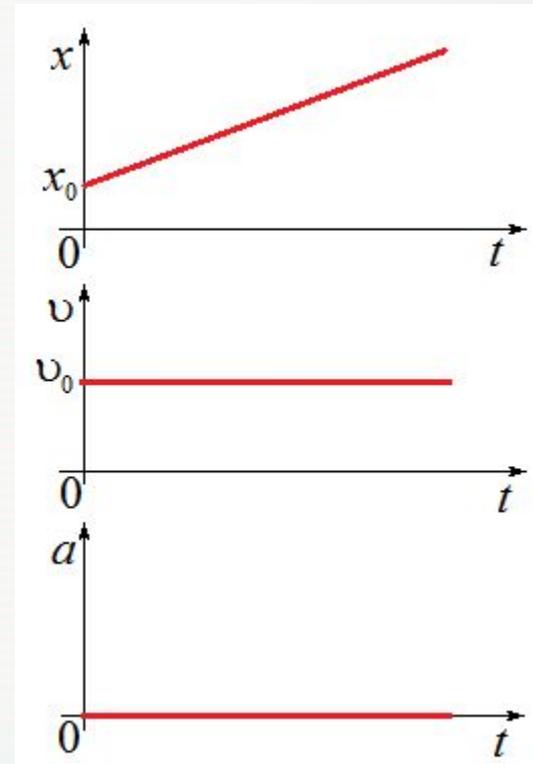
$$s = x - x_0 = Bt$$

$$a = 0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$$

$$v = v_0 = \text{const}$$

$$a = 0$$



Пример 3. Равноускоренное движение.

$$x(t) = At^2 + Bt + C; \quad A, B, C - \text{const}$$

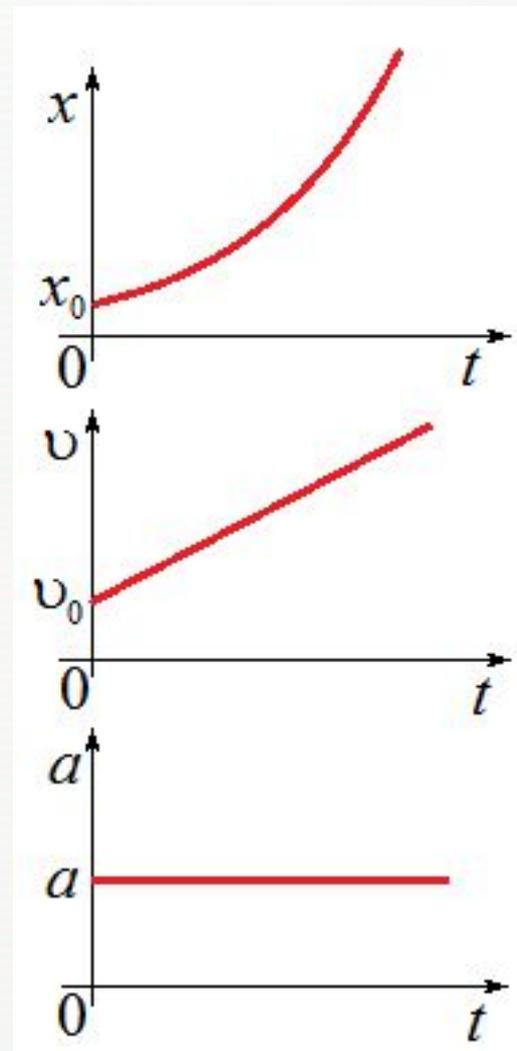
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2At + B$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2A = \text{const}$$

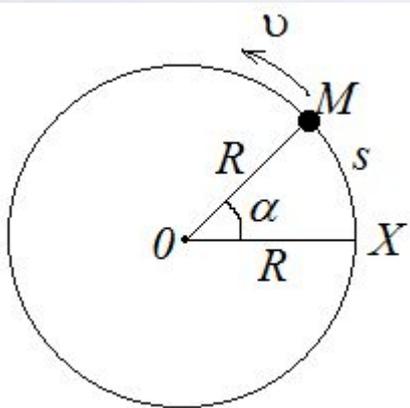
$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$a = \text{const}$$



Движение по окружности



Угловая координата

$$\alpha = \alpha(t)$$

Угловая скорость

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

Угловое ускорение

$$\ddot{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$$

Равномерное вращение:

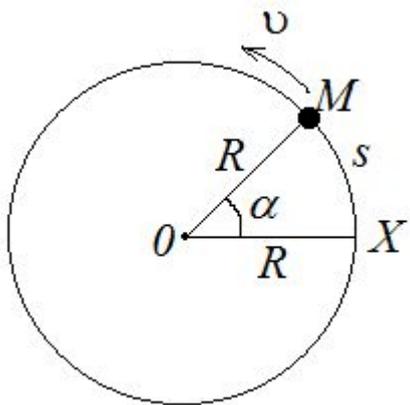
$\omega = \text{const}$ – угловая скорость (угловая или круговая частота вращения) $[c^{-1}]$

$$\alpha(t) = \omega t + \alpha_0$$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ – число оборотов в единицу времени (частота вращения) $[Гц]$

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ – период вращения $[с]$

Связь угловых и линейных величин при вращении



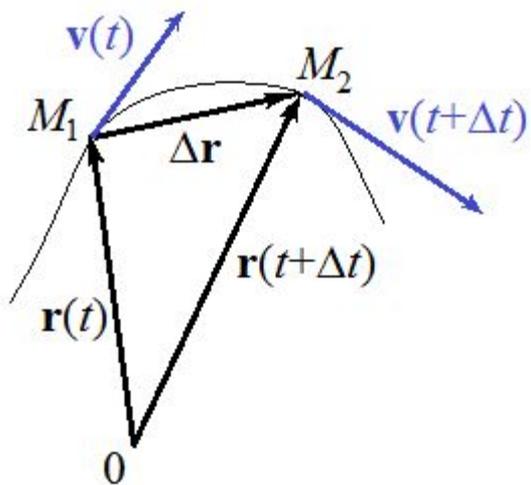
S – длина дуги окружности XM
 R – радиус окружности

$$v = \frac{ds}{dt} - \text{линейная скорость}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} - \text{линейное ускорение}$$

$$s = R\alpha \quad \Rightarrow \quad v = \omega R \quad \Rightarrow \quad a = \omega R$$

Скорость и ускорение при криволинейном движении



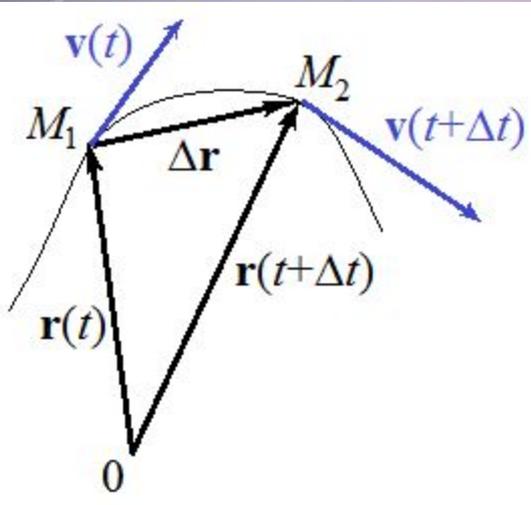
Мгновенная скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории движущейся точки

Траектория движения материальной точки

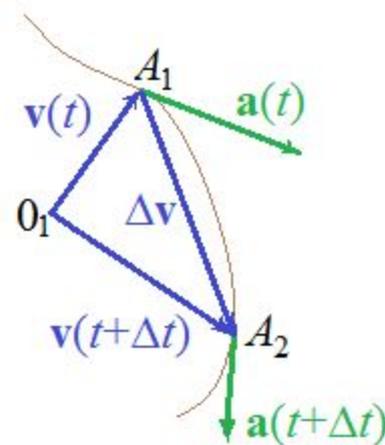
$$\mathbf{v}_{cp} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} - \text{средняя скорость движения за время } \Delta t$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{\dot{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} - \text{мгновенная скорость материальной точки}$$

Скорость и ускорение при криволинейном движении



Материальная точка \Rightarrow Скоростная точка
 Радиус-вектор \Rightarrow Вектор скорости
 Траектория \Rightarrow Годограф
 Скорость \Rightarrow Ускорение



Траектория движения материальной точки

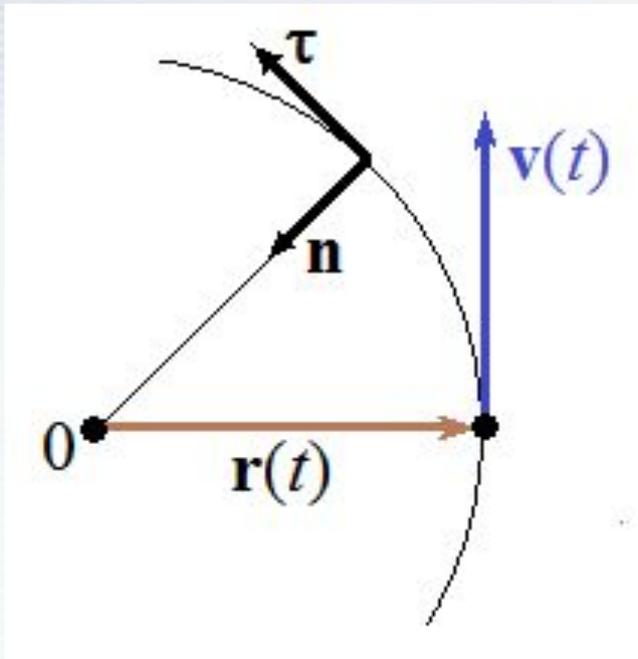
Годограф скорости

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} - \text{ускорение материальной точки}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Ускорение направлено по касательной к годографу скорости.
 Ускорение есть скорость движения скоростной точки по годографу.

Скорость и ускорение при криволинейном движении



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau v) = \frac{d\tau}{dt} v + \tau \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} v,$$

где R называется **радиусом кривизны траектории**

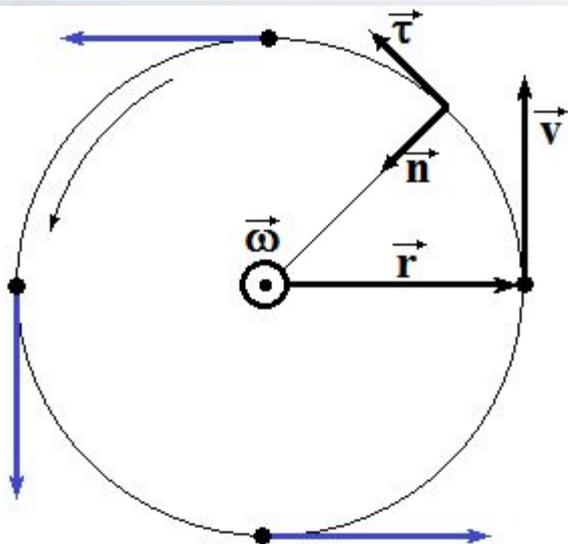
$$\vec{a} = \vec{n} \frac{v^2}{R} + \tau \frac{dv}{dt} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

Ускорение можно представить в виде геометрической суммы **нормального** и **тангенциального** (касательного) ускорений.

При равномерном движении по окружности тангенциальное ускорение отсутствует, а нормальное ускорение называется **центростремительным**.

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Векторы угловой скорости и углового ускорения при движении по окружности



$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = [\vec{\omega} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}] = [\vec{\omega} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

Эти формулы справедливы только в случае, когда ось вращения не изменяет своего направления в пространстве

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

Тема 3.

Динамика материальной точки

Первый закон Ньютона.

Инерциальные системы отсчета.

Масса, импульс, сила в классической механике.

Второй закон Ньютона.

Третий закон Ньютона.

Преобразования Галилея.

Принцип относительности Галилея.

Упругие силы.

Силы трения.

Сила тяжести.

Вес тела.

Динамика – раздел механики,
изучающий движение тел совместно
с физическими причинами,
вызывающими это движение

Первый закон Ньютона (Закон инерции)

Тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

ИЛИ

Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Свободным называется тело, на которое не действуют внешние силы или их действие скомпенсировано для любого момента времени.

Движение свободного тела называется **свободным** или **движением по инерции**.

Свободные тела являются абстракцией.

Инерциальные системы отсчета

В кинематике выбор системы отсчета не существен. Все системы отсчета кинематически эквивалентны. В динамике выбор системы отсчета важен.

Существует система отсчета, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно. Такая система называется *инерциальной системой отсчета (ИСО)*.

Система отсчета, в которой выполняется 1-й закон Ньютона, называется ***инерциальной***. Система отсчета, в которой 1-й закон Ньютона не выполняется, называется ***неинерциальной***.

Строго инерциальных систем отсчета не существует.

Система отсчета, движущаяся с ускорением относительно ИСО, является неинерциальной

Свойство тел оказывать сопротивление при попытках привести его в движение или изменить модуль или направление его скорости называется **инертностью**.

Масса (инертная масса) тела является количественной мерой его инертности.

Единица измерения в СИ: килограмм (кг).

Изолированная (замкнутая) система

Изолированная (замкнутая) система – это система материальных тел, на которые не действуют внешние силы.

В такой системе тела могут взаимодействовать только между собой.

Пусть замкнутая система состоит из двух взаимодействующих между собой материальных точек, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света (нерелятивистский случай). В этом случае отношение масс двух материальных точек равно взятому с противоположным знаком отношению приращений скоростей этих точек в результате взаимодействия между ними.

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1}$$

Импульс материальной точки

Импульсом (количеством движения) материальной точки называется вектор, равный произведению массы материальной точки на её скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Импульсом системы материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных материальных точек, из которых состоит эта система:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N$$

Закон сохранения импульса:

Импульс изолированной системы материальных точек сохраняется, т.е. остается постоянным во времени, каково бы ни было взаимодействие между ними.

Понятие силы

В динамике Ньютона не скорость, а изменение скорости, т. е. ускорение, имеет причину. Причиной изменения скорости является сила.

Задача заключается в том, чтобы дать количественную формулировку соотношения между силой и ускорением. Эта задача решается законами движения Ньютона.

Силы не являются какими-то самостоятельными сущностями, независимыми от материальных тел. Они создаются материальными телами. Поэтому можно сказать, что посредством сил материальные тела действуют друг на друга, т.е. взаимодействуют. Сила при этом выступает как количественная мера интенсивности взаимодействий тел, проявляющаяся в изменении их количества движения (импульса).

Сила является векторной величиной. Единица измерений – Ньютон (Н).

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Если на тело воздействуют несколько сил (при взаимодействии с несколькими телами), то находится результирующая (суммарная) векторная сила.

Виды силовых взаимодействий

1. Гравитационное
2. Электромагнитное
3. Сильное
4. Слабое

Сильные и слабые взаимодействия проявляются в атомных ядрах и в мире элементарных частиц. Они действуют на малых расстояниях: сильные – на расстояниях $\sim 10^{-15}$ м, слабые – на расстояниях $\sim 10^{-18}$ м.

Гравитационные и электромагнитные силы являются дальнодействующими.

Второй закон Ньютона

Качественное определение силы:

Под силой в механике понимают всякую причину, изменяющую импульс движущегося тела.

В инерциальной системе отсчета производная импульса материальной точки по времени равна действующей на неё силе

$$\vec{p} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

Если $m = \text{const}$, то $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = m\vec{v}' = m\vec{r}''$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Если $m \neq \text{const}$, то $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a} = m\vec{r}' + m\vec{r}''$

Третий закон Ньютона

Рассмотрим замкнутую систему двух взаимодействующих точек.
Закон сохранения импульса в этом случае:

$$\overset{\vee}{\mathbf{p}}_1 + \overset{\vee}{\mathbf{p}}_2 = \text{const}$$

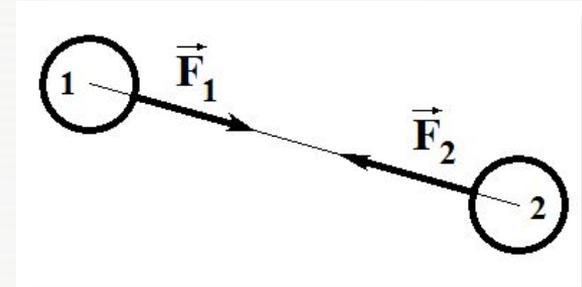
Дифференцируем по времени:

$$\overset{\vee}{\mathbf{p}}_1 + \overset{\vee}{\mathbf{p}}_2 = 0$$

На основании 2-го закона Ньютона:

$$\overset{\vee}{\mathbf{F}}_1 + \overset{\vee}{\mathbf{F}}_2 = 0 \Rightarrow$$

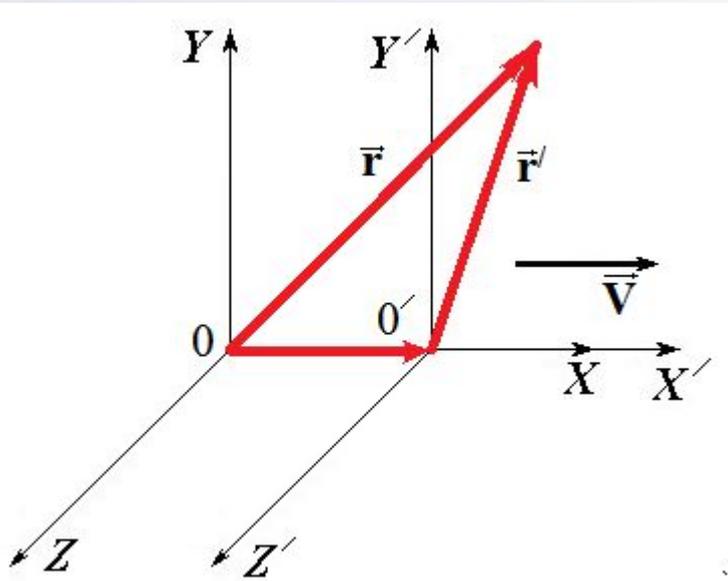
$$\overset{\vee}{\mathbf{F}}_1 = -\overset{\vee}{\mathbf{F}}_2$$



Сила взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 приложены к разным телам!

Преобразования Галилея



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$$

$$t = t'$$

$$x = x' + Vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Преобразования
Галилея

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{V}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Нерелятивистский
закон сложения
скоростей

Принцип относительности Галилея

$$\frac{d\overset{\boxtimes}{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d\overset{\boxtimes}{\mathbf{v}'}}{dt} = \frac{d\overset{\boxtimes}{\mathbf{v}'}}{dt'} \quad \Rightarrow \quad \overset{\boxtimes}{\mathbf{a}} = \overset{\boxtimes}{\mathbf{a}'}$$

Ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея

$m\overset{\boxtimes}{\mathbf{a}'} = \overset{\boxtimes}{\mathbf{F}'}$ Сила инвариантна относительно преобразований Галилея

Принцип относительности Галилея:

Уравнения механики Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

или

Все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно.

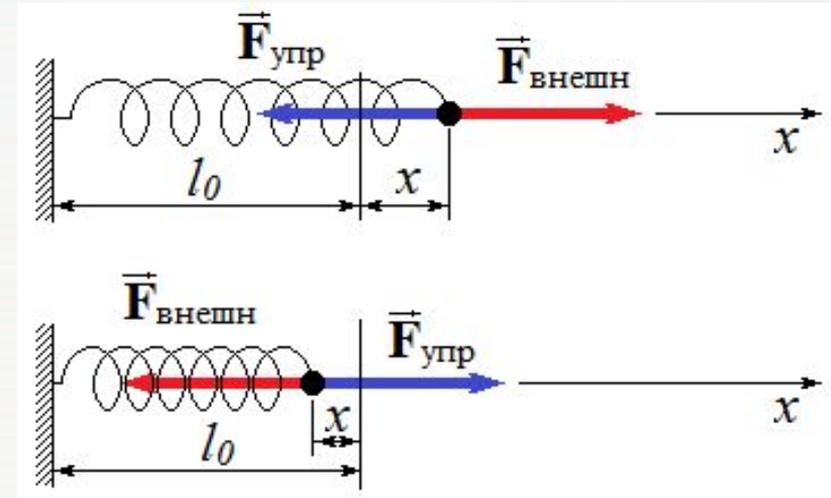
Упругие силы

Под действием приложенных сил реальное тело деформируется, т.е. изменяет свои размеры и форму. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, то деформация называется **упругой**.

Закон Гука

$$F_{\text{упр}} = -kx$$

k – коэффициент жесткости пружины



Упругие деформации

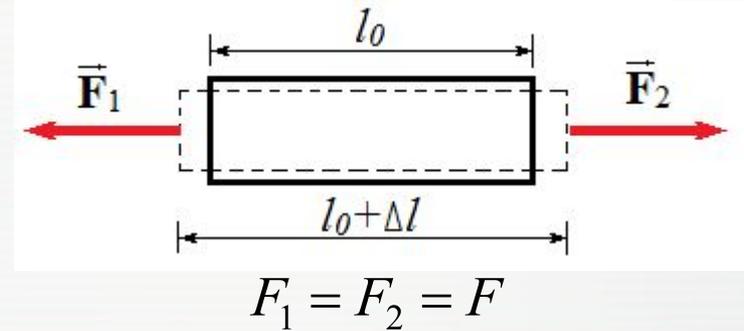
Относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \varepsilon = \alpha \frac{F}{S}$$

S – площадь поперечного сечения

α – коэффициент пропорциональности

Деформация однородного стержня



Механические напряжения:

Нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$

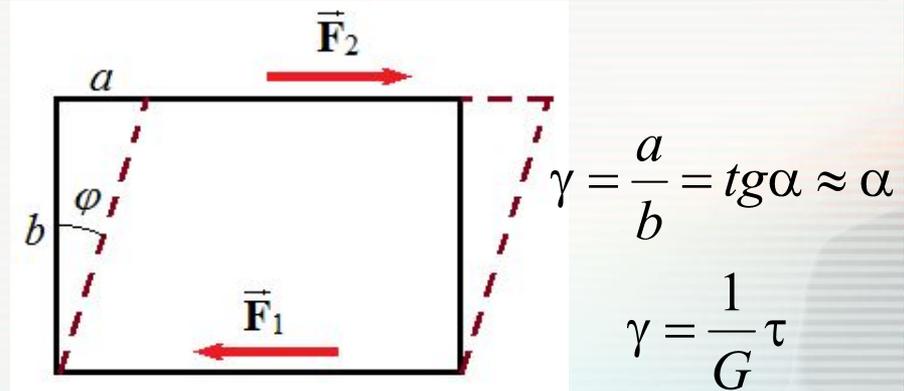
Тангенциальное напряжение

$$\tau = \frac{F_\tau}{S}$$

$$\varepsilon = \alpha \sigma = \frac{\sigma}{E}$$

$$E = \frac{1}{\alpha} \text{ — модуль Юнга}$$

$$[E] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$



G – модуль сдвига

Силы трения

Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется **внешним трением**.

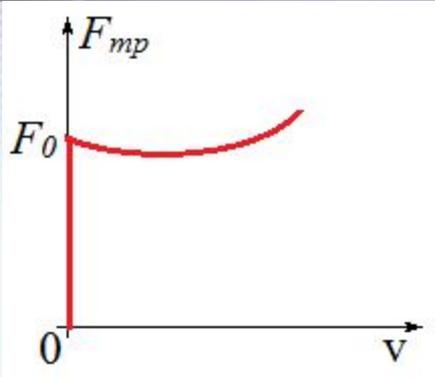
Трение между частями одного и того же тела (например, жидкости или газа) называется **внутренним трением**.

Трение в отсутствие прослойки (смазки) между телами называется **сухим трением**. Различают трение **скольжения** и трение **качения**.

Трение между твердым телом и жидкой (газообразной) средой, а также между слоями такой среды называется **вязким**.

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям.

Сухое трение



Зависимость силы трения
от скорости скольжения

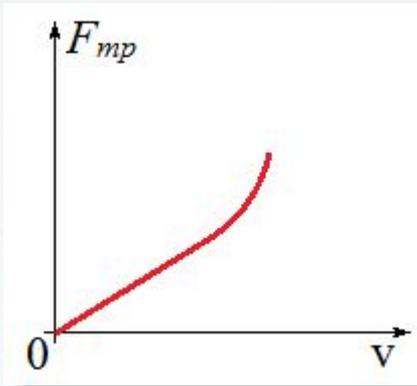
Максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел и приблизительно пропорциональны величине силы нормального давления, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу

$$F_{mp} = kF_n$$

k – коэффициент трения (безразмерная величина)

Вязкое трение

Помимо собственно силы трения, при движении вязкой среде возникают и силы сопротивления среды.



Зависимость силы трения
от скорости скольжения

При малых скоростях:

$$\vec{\mathbf{F}}_{тр} = -k_1 \vec{\mathbf{v}}$$

При больших скоростях:

$$\vec{\mathbf{F}}_{тр} = -k_2 v^2 \mathbf{e}_v$$

Коэффициент k_1 зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от вязкости среды.

Коэффициент k_2 зависит от формы и размеров тела.

Сила тяжести. Вес тела

Сила тяжести: $\vec{F}_m = m\vec{g}$

Вектор \vec{g} – ускорение свободного падения.

Сила \vec{P} , с которой тело действует на подвес или опору, называется весом тела.

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

Вектор \vec{a} – ускорение опоры (подвеса) вместе с телом.

Тема 4.

Законы сохранения

Кинетическая энергия.

Работа.

Консервативные силы.

Потенциальная энергия во внешнем поле сил.

Потенциальная энергия взаимодействия.

Закон сохранения энергии.

Равновесие механической системы.

Закон сохранения импульса.

Соударение двух тел.

Закон сохранения момента импульса.

Момент силы.

Движение в центральном поле сил.

Задача двух тел.

Сохраняющиеся величины

Внешние силы – силы, действующие на систему тел со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему.

(e)

Внутренние силы – силы, действующие между материальными точками, входящими в систему тел.

(i)

Для замкнутых систем существуют **интегралы движения** – функции координат и скоростей частиц, входящих в систему, которые сохраняют при движении постоянные значения.

Для системы N частиц, между которыми нет жестких связей, их может быть $6N - 1$.

Аддитивные интегралы движения:

- энергия
- импульс
- момент импульса

Они подчиняются законам сохранения.

В основе закона сохранения энергии – однородность времени.

В основе закона сохранения импульса – однородность пространства.

В основе закона сохранения момента импульса – изотропия пространства.

Кинетическая энергия

Рассмотрим систему, состоящую из одной материальной точки.

Уравнение движения: $m\mathbf{\ddot{v}} = \mathbf{F}$

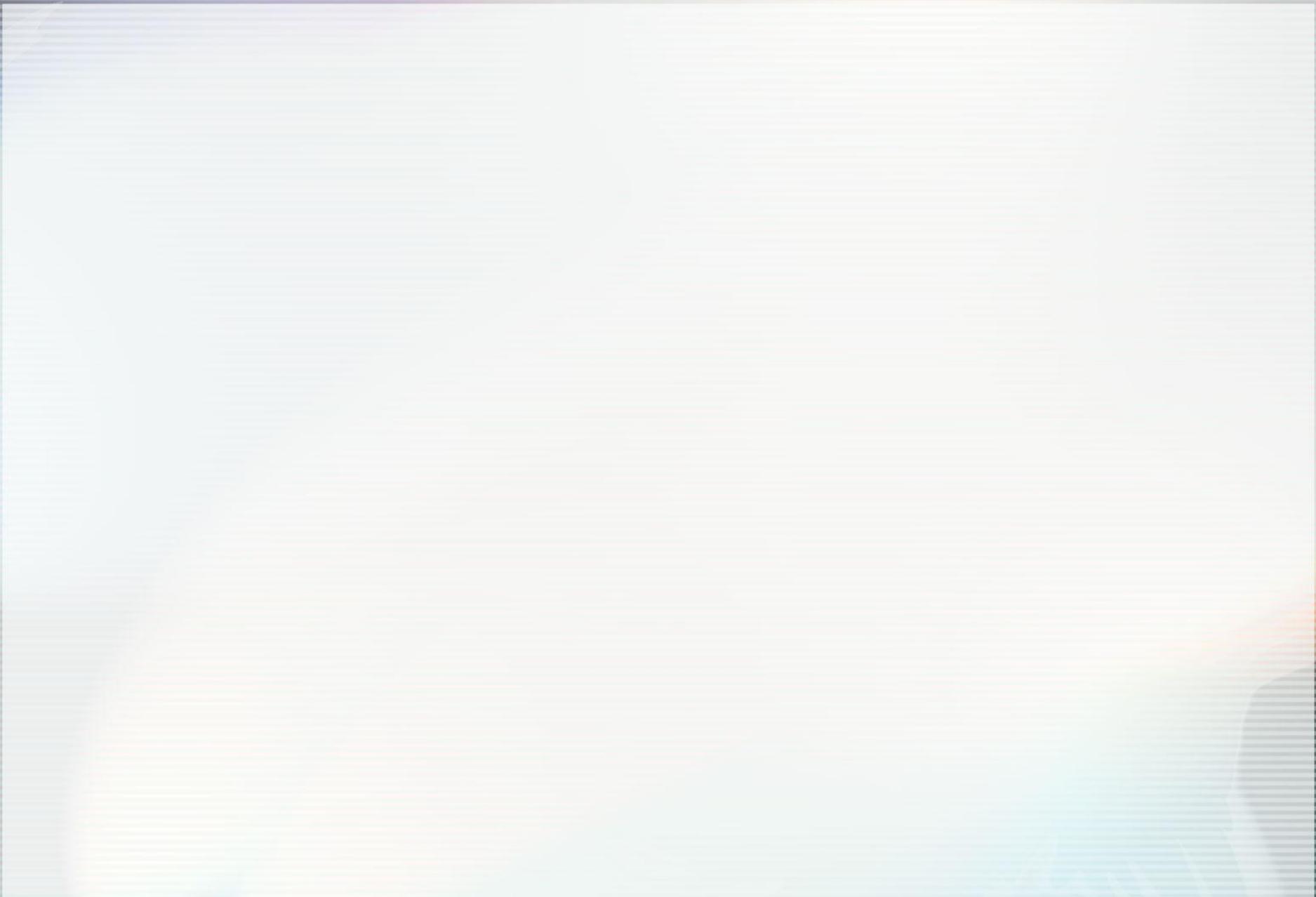
Умножим на перемещение $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ $m\mathbf{v}\mathbf{\ddot{v}}dt = \mathbf{F}d\mathbf{s}$

$$m\mathbf{v}\mathbf{\ddot{v}}dt = m\mathbf{v}d\mathbf{v} = m \cdot d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}d\mathbf{s}$$

Система замкнута $\Rightarrow \mathbf{F} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$

$T = \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки

$T = \frac{p^2}{2m}$ В случае изолированной частицы кинетическая энергия является интегралом движения. В случае нескольких взаимодействующих частиц кинетическая энергия входит как слагаемое в аддитивный интеграл движения.



Консервативные силы

Потенциальная энергия во внешнем поле сил

Потенциальная энергия взаимодействия

Закон сохранения энергии

Потенциальная энергия взаимодействия

4. Система материальных точек

Под системой материальных точек (СМТ) будем понимать конечное число взаимодействующих тел, которые можно считать материальными точками.

Внешние и внутренние силы

Из 2-го закона Ньютона следует:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1^{(i)} + \mathbf{F}_1^{(e)};$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2^{(i)} + \mathbf{F}_2^{(e)};$$

.....

Импульсом СМТ называется векторная сумма импульсов материальных точек, ее составляющих.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n) &= \\ = \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)} + \dots + \mathbf{F}_n^{(e)} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \end{aligned}$$

Производная по времени от импульса СМТ равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Если геометрическая сумма внешних сил, действующих на СМТ, равна нулю, то импульс СМТ сохраняется, т.е. не меняется со временем.

(Частный случай – замкнутая система)

Импульс силы

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}$$

Если сила $\mathbf{F}^{(e)}$ постоянная, то $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}^{(e)}(t - t_0)$

Произведение постоянной силы $\mathbf{F}^{(e)}$ на время ее действия называется **импульсом силы** за это время.

Общий случай:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} \Delta t_i = \int_{t_0}^t \mathbf{F}^{(e)}(\tau) d\tau$$

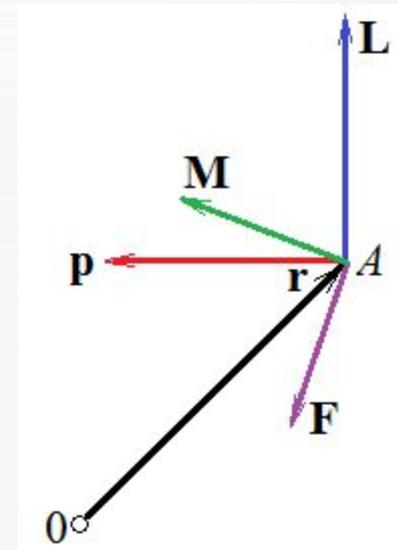
Приращение импульса СМТ равно импульсу геометрической суммы всех действующих на нее внешних сил.

Момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \quad \text{Момент импульса МТ относительно точки } O$$

Момент импульса СМТ

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$



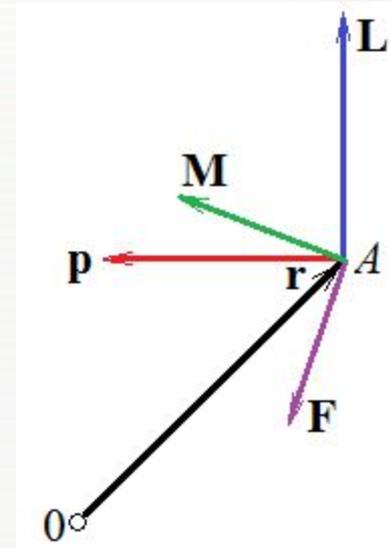
Момент силы

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Момент силы,
действующей на МТ,
относительно точки O

Момент импульса СМТ

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$



Момент силы

Тема 5.

Неинерциальные системы отсчета

Неинерциальной системой отсчета (НСО) называется система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной.

Тело отсчета принимается за абсолютно твердое тело.

Простейшими НСО являются системы отсчета, движущиеся ускоренно прямолинейно и вращающиеся системы.

Силы инерции

В ИСО единственной причиной ускоренного движения тела являются силы, действующие со стороны других тел. Силы – результат взаимодействия тел.

В НСО можно ускорить тело простым изменением состояния движения системы отсчета.

В НСО существуют ускорения, которые не связаны с силами взаимодействия тел, рассматриваемыми в ИСО.

В НСО 1-й и 3-й законы Ньютона не имеют физического смысла.

2-й закон Ньютона можно формулировать без изменений, но наряду с силами взаимодействия, необходимо учесть силы инерции, обусловленные ускорением НСО относительно ИСО.

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ин}$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

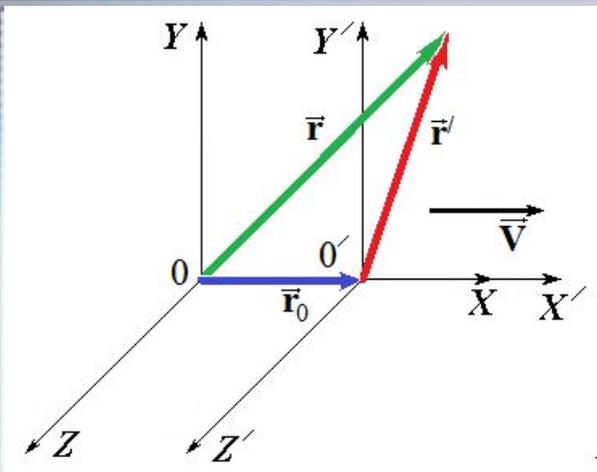
\mathbf{a}' – ускорение в НСО (относительное ускорение), \mathbf{a} – ускорение в ИСО (абсолютное ускорение), \mathbf{F} - «обычные» силы взаимодействия,

$\mathbf{F}_{ин}$ – силы инерции

$$\mathbf{F}_{ин} = m(\mathbf{a}' - \mathbf{a})$$

Силы инерции обуславливают разность между относительным и абсолютным ускорениями. Силы инерции существуют только в НСО.

НСО, движущиеся прямолинейно-поступательно



$$\overset{\sphericalangle}{\mathbf{r}} = \overset{\sphericalangle}{\mathbf{r}}_0 + \overset{\sphericalangle}{\mathbf{r}'}$$

Дифференцируем по времени.

$$\overset{\boxtimes}{\dot{\mathbf{r}}} = \overset{\boxtimes}{\dot{\mathbf{r}}}_0 + \overset{\boxtimes}{\dot{\mathbf{r}'}}$$

$$\overset{\boxtimes}{\mathbf{r}} = \overset{\boxtimes}{\mathbf{r}}_0 + \overset{\boxtimes}{\mathbf{r}'}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\overset{\boxtimes}{\mathbf{a}} = \overset{\boxtimes}{\mathbf{a}}_0 + \overset{\boxtimes}{\mathbf{a}'}$$

\mathbf{a}' – ускорение в НСО (относительное ускорение), \mathbf{a} – ускорение в ИСО (абсолютное ускорение), \mathbf{a}_0 – ускорение НСО относительно ИСО (переносное ускорение)

$$\overset{\sphericalangle}{\mathbf{F}}_{ин} = m(\overset{\boxtimes}{\mathbf{a}'} - \overset{\boxtimes}{\mathbf{a}}) = -m\overset{\boxtimes}{\mathbf{a}}_0$$

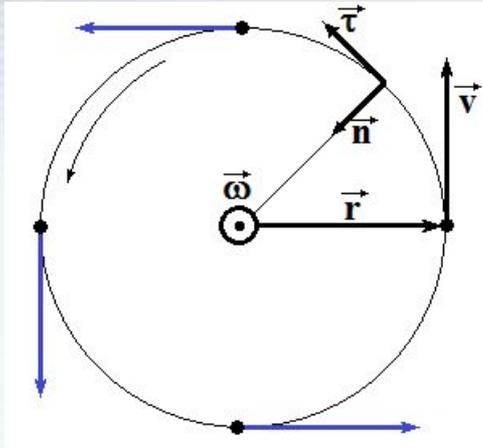
$$\overset{\sphericalangle}{\mathbf{F}}_{ин} = m\overset{\boxtimes}{\mathbf{a}}_0$$

Сила инерции направлена противоположно переносному ускорению НСО.

$$m\overset{\boxtimes}{\mathbf{a}'} = \overset{\sphericalangle}{\mathbf{F}} - m\overset{\boxtimes}{\mathbf{a}}_0$$

- основное уравнение динамики МТ с НСО при поступательном движении

Неинерциальные вращающиеся системы отсчета



$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Отличие вращающихся НСО обуславливается тем, что переносная скорость различных точек вращающейся системы координат различна.

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

Для абсолютного ускорения все сложнее. Если даже относительная скорость МТ при движении не меняется, МТ должна испытывать ускорение, отличное от переносного.

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \vec{a}_K$$

\vec{a}_K – кориолисово ускорение

Неинерциальные вращающиеся системы отсчета

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x \cdot x + \mathbf{e}_y \cdot y + \mathbf{e}_z \cdot z$$

Дифференцируем по времени

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

где $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_0$ – переносная скорость

$\mathbf{v}' = \mathbf{e}_x v'_x + \mathbf{e}_y v'_y + \mathbf{e}_z v'_z$ – относительная скорость

Находим абсолютное ускорение:

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{dv'_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dv'_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dv'_z}{dt} \mathbf{e}_z + v'_x \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + v'_y \frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + v'_z \frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}') + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + \mathbf{a}_K$$

$\mathbf{a}_K = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ – кориолисово ускорение

$$\mathbf{a}_0 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2 =$$

$$= \omega^2(\mathbf{d} - \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{R} \text{ – переносное ускорение}$$

Силы инерции

Тема 6.

Механика твёрдого тела

Степени свободы твердого тела

Абсолютно твердое тело (ТТ) – неизменяемая система материальных точек, т.е. идеализированная система, при любых движениях которой расстояния между материальными точками системы остаются неизменными.

Число независимых функций, которыми можно описать движение СМТ, называется *числом ее степеней свободы*.

N материальных точек $\rightarrow 3N$ степеней свободы

На $3N$ координат налагаются дополнительные условия – связи. Для однозначного определения положения всех МТ достаточно знать меньшее число координат f . Остальные $3N-f$ координат вычисляются из уравнений связи.

Для этих целей могут быть использованы не только f обычных координат, но и f любых величин q_1, q_2, \dots, q_f , заданием которых положение МТ определяется однозначно. Такие величины называются *обобщенными координатами*.

Идеально твердое тело, если на его движение не наложены никакие ограничения, обладает шестью степенями свободы.

Кинематика твердого тела

При *поступательном движении* скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы. Любая прямая, проведенная между какими-либо точками тела, перемещается параллельно самой себе.

Поступательно движущееся тело имеет 3 степени свободы.

Плоским называется движение, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях. Число степеней свободы равно трем.

Вращательное движение – движение, при котором две точки тела остаются все время неподвижным.

Прямая, проходящая через эти точки, называется *осью вращения*.

Все точки ТТ, лежащие на оси вращения, неподвижны. Другие точки ТТ движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Вращательное движение является плоским.

Движение твердого тела

В плоском движении положение ТТ полностью определяется положением отрезка прямой, жестко связанно с точками тела.

Перемещение этого отрезка можно разложить на:

- а) **поступательное движение**, при которой прямая перемещается параллельно самой себе;
- б) **вращательное движение**, при котором ТТ поворачивается на угол α .

Разложение перемещения на поступательное и вращательное неоднозначно, но угол поворота α при перемещении один и тот же.

$$\overset{\Delta}{\mathbf{v}} = \overset{\Delta}{\mathbf{v}}_0 + [\overset{\Delta}{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{\Delta}{\mathbf{r}}]$$

Изменяя поступательную скорость, мы одновременно изменяем положение оси вращения. Любая ось, перпендикулярная плоскости движения, является осью вращения.

Ось вращения, для которой поступательная скорость равна нулю, называется мгновенной осью вращения.

С течением времени положение оси вращения меняется относительно тела и системы координат.

Движение центра масс твердого тела

Центром масс (центром инерции) СМТ называется точка С, положение которой задается радиус-вектором \mathbf{r}_c :

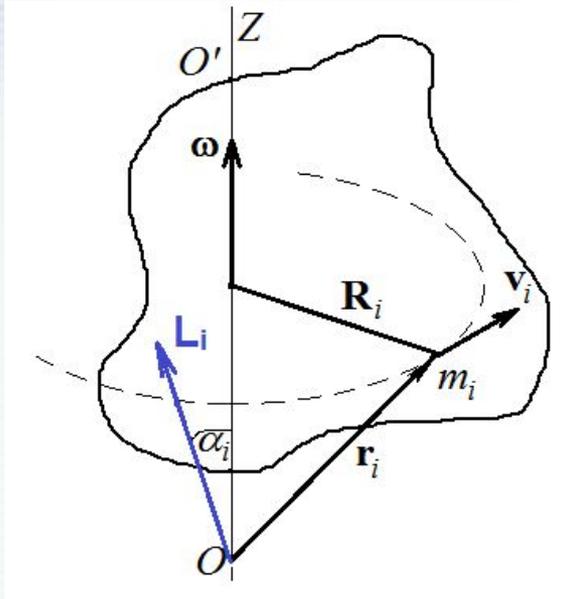
$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил:

$$m \mathbf{a}_c = \sum \mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$$

Вращение тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси Z.



Производная момента импульса системы по времени равна суммарному моменту всех внешних сил:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}}$$

$$\dot{\mathbf{L}}_i = [\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]; \quad \mathbf{r}_i \perp \mathbf{v}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_i = |\mathbf{L}_i| = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i$$

Вектор момента импульса \mathbf{L} лежит в плоскости, проходящей через ось вращения и m_i

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega_z R_i \cos \alpha_i = m_i (r_i \cos \alpha_i) R_i \omega_z = m_i R_i^2 \omega_z$$

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2$$

Момент инерции

Величина, равная сумме произведений элементарных масс (масс материальных точек) на квадраты их расстояний от некоторой оси, называется **моментом инерции** тела (системы материальных точек) относительно данной оси:

$$J = \sum m_i R_i^2$$



$$L_z = J\omega_z$$

Для однородного тела, симметричного относительно оси вращения
(для однородного тела вращения):

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$$

В случае, когда ось вращения проходит через центр масс тела, значение момента импульса не зависит от положения на оси вращения точки O , относительно которой он берется.

Ось, положение которой в пространстве остается неизменным при вращении вокруг нее тела в отсутствие внешних сил, называется **свободной осью тела**.

Момент инерции

Для тела любой формы и с произвольным распределением массы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс тела оси, которые могут служить свободными осями; они называются **главными осями инерции тела**.

Моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции тела**. В общем случае $J_1 \neq J_2 \neq J_3$

Для тел с осевой симметрией два из трех главных моментов инерции совпадают.

Для тел с центральной симметрией все три главных момента инерции совпадают.

Если подобных симметрий нет, но соотношения между главными моментами инерции такие же, то такие тела называются **волчками**

$J_1 \neq J_2 \neq J_3$ – *ассиметричный волчок*

$J_1 = J_2 \neq J_3$ – *симметричный волчок*

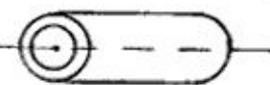
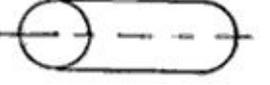
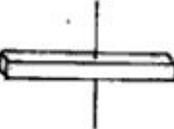
$J_1 = J_2 = J_3$ – *шаровый волчок*

Момент инерции

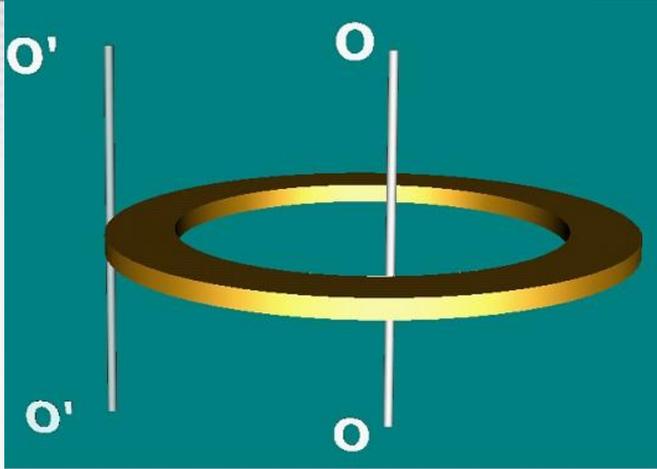
Для твердого тела $I_{OO'} = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV$

Примеры моментов инерции тел

Таблица 2

Тело	Рисунок	Положение оси OO'	Момент инерции $I_{OO'}$
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R и массы m		Ось цилиндра	mR^2
Толстостенный цилиндр массы m , R_1 — внутренний, R_2 — внешний радиус		Ось цилиндра	$\frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2}$
Сплошной цилиндр (диск) массы m и радиуса R		Ось цилиндра	$\frac{mR^2}{2}$
Шар массы m радиуса R		Ось проходит через центр шара	$\frac{2mR^2}{5}$
Стержень длиной l и массы m		Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
Тонкостенная сфера массы m и радиуса R		Ось проходит через центр сферы	$\frac{2mR^2}{3}$

Теорема Гюйгенса-Штейнера



Момент инерции J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между ними:

$$J = J_c + ma^2$$

Тензор инерции

В общем случае несимметричного тела векторы момента импульса и угловой скорости не совпадают по направлению и их связь более сложная:

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z$$

$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$

$$L_i = \sum_{k=1}^3 J_{ik}\omega_k ; \quad (i, k = x, y, z = 1, 2, 3)$$

Тензор инерции:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

В главных осях:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

$$E_K = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Для плоского движения:

$$E_K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

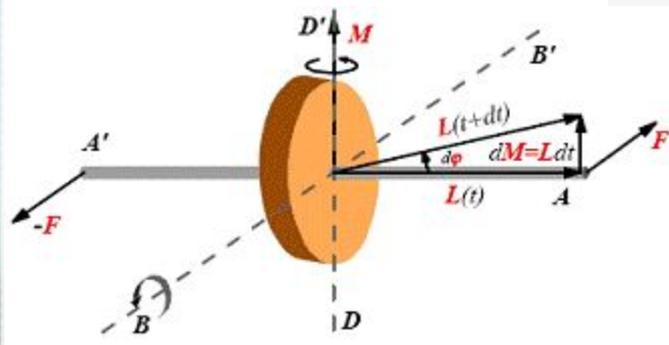
Гироскопы

Гироскопом называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии (оси гироскопа)

← Прецессия гироскопа

$$\left[\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}_p \times \overset{\vee}{\mathbf{L}} \right] = \overset{\vee}{\mathbf{M}}$$

Гироскопический эффект – появление при повороте оси гироскопических сил, которые создают гироскопический момент.



Тема 7.

Всемирное тяготение

Закон всемирного тяготения

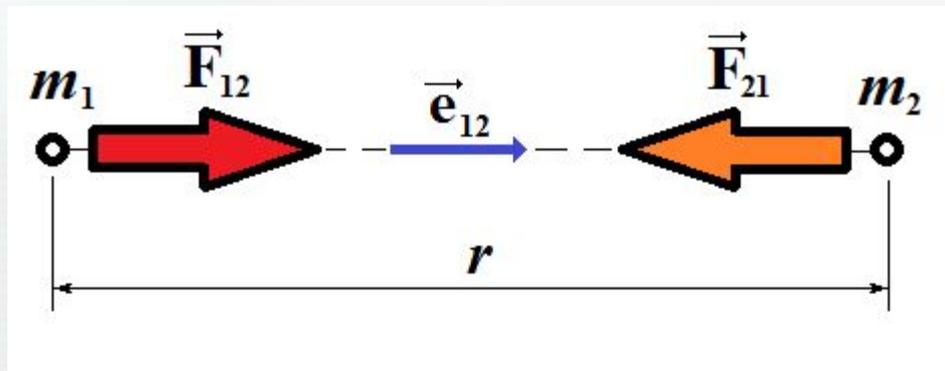
Сила, с которой две материальные точки притягиваются друг к другу, пропорциональна массам этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Коэффициент пропорциональности γ называется **гравитационной постоянной**.

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

Гравитационная сила направлена вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие материальные точки.



$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$

Закон всемирного тяготения

Для определения силы взаимодействия протяженных тел их нужно разбить на элементарные массы Δm , каждую из которых можно принять за материальную точку. i -я элементарная масса тела 1 притягивается к k -й элементарной массе тела 2 с силой:

$$\mathbf{F}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{e}_{ik}$$

Сила, с которой тело 2 действует на тело 1: $\mathbf{F}_{12} = \sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{e}_{ik}$

В общем случае протяженных тел суммирование сводится к интегрированию.

Гравитационное поле

Гравитационное взаимодействие осуществляется через гравитационное поле. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства путем создания в нём *гравитационного поля*. Это поле проявляет себя в том, что помещенное в него другое тело массой m оказывается под действием гравитационной силы \mathbf{F} .

Напряжённость гравитационного поля:
$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Напряженность поля, создаваемого материальной точкой массы M :

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r$$

На материальную точку массы m , находящуюся в точке с радиус-вектором \mathbf{r} (от точечной массы M), со стороны точечной массы M действует сила:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}m = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Размерность \mathbf{G} совпадает с размерностью ускорения.

Напряженность поля тяготения вблизи поверхности Земли равна ускорению свободного падения \mathbf{g} (без учета вращения Земли вокруг своей оси).

Гравитационное поле

Потенциальная энергия взаимодействия масс M и m : $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$

Потенциал гравитационного поля: $\varphi = \frac{U}{m}$

Работа поля по перемещению массы m из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{G}}$$

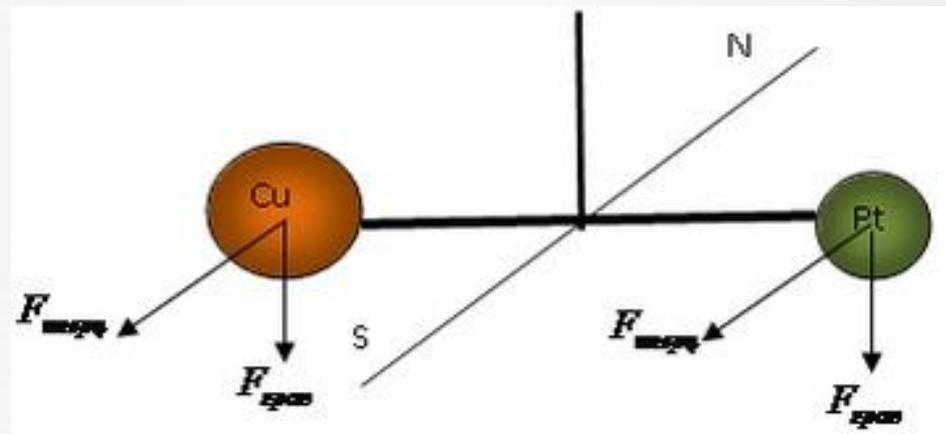
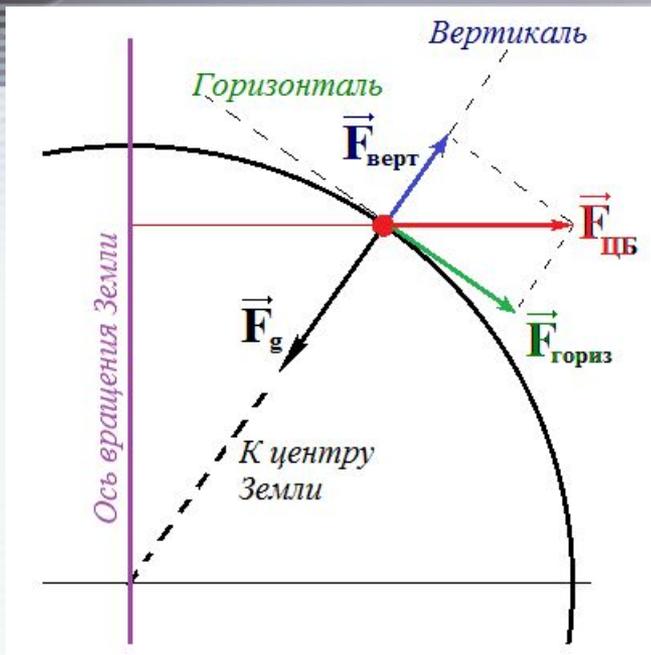
$$U = m\varphi$$

Соотношение между напряженностью и потенциалом гравитационного поля:

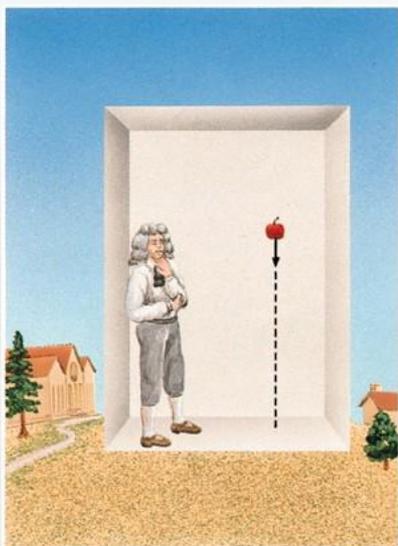
$$\vec{\mathbf{G}} = -grad \varphi \equiv -\nabla \varphi$$

$$grad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Принцип эквивалентности



Опыт Этвеша (1887 г.)



Все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции.

Космические скорости

Для того, чтобы двигаться вокруг Земли по круговой орбите вблизи радиуса Земли, тело должно иметь **первую космическую скорость**:

$$m \frac{v_1^2}{R_3} = mg \Rightarrow v_1 = \sqrt{gR_3} \approx 8 \text{ км/с}$$

Для удаления от Земли на расстояние, при котором притяжение Земли перестает играть существенную роль необходима **вторая космическая скорость**:

$$A = U_{\text{нач}} - U_{\text{кон}} = -\gamma \frac{M_3 m}{R_3} - 0 = -\gamma \frac{M_3 m}{R_3}$$

$$A' = \gamma \frac{M_3 m}{R_3}$$

$$mg = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2} \Rightarrow \gamma \frac{M_3 m}{R_3} = mgR_3$$

$$\Rightarrow A' = mgR_3$$

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_3$$

$$v_2 = \sqrt{2gR_3} = \sqrt{2}v_1 \approx 11 \text{ км/с}$$

Тема 8.

Колебательное движение

Колебательный процесс

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания механические, электромагнитные и их комбинации.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают:

- свободные (собственные) колебания;
- вынужденные колебания;
- автоколебания;
- параметрические колебания.

Колебательный процесс

Свободными (собственными) колебаниями называются колебания, происходящие в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок или она была выведена из положения равновесия.

Вынужденными называются колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой.

Параметрические колебания - это колебания, в процессе которых происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы.

Гармонические колебания

Гармоническими называются колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

A – амплитуда колебаний, ω – частота колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний

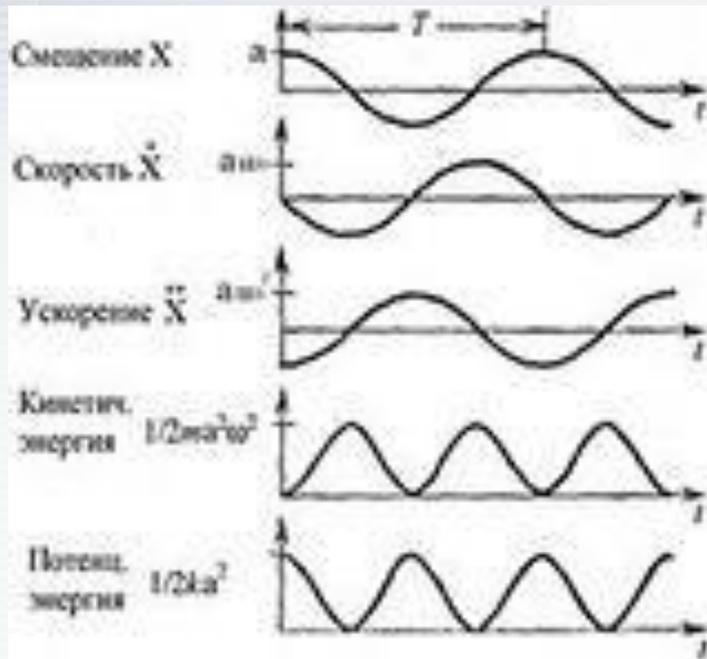
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ – период колебаний}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{Уравнение гармонических колебаний}$$

Энергия гармонических колебаний



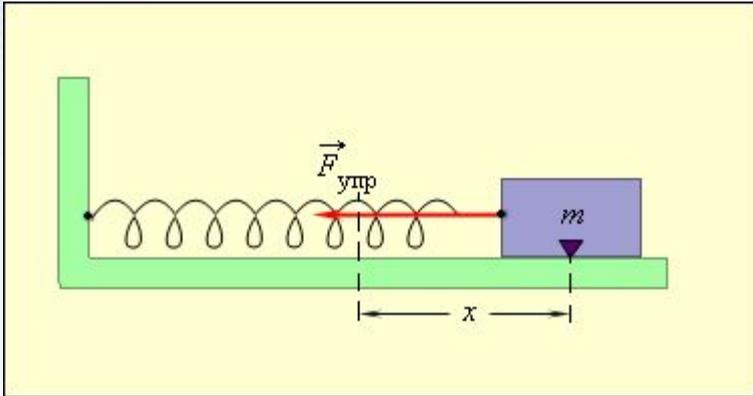
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = E_K + E_{\Pi} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

Пружинный маятник



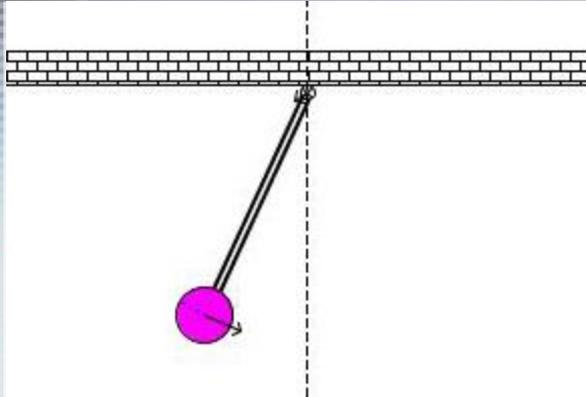
$$F_{\text{упр}} = -kx$$

Уравнение движения: $m\ddot{x} = -kx$

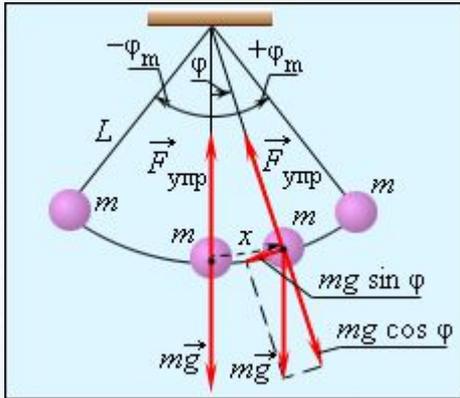
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Математический маятник



Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (материальная точка), совершающая под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.



Вращательный момент сил: $M = -mgl \sin \varphi$

$J = ml^2$ Уравнение моментов: $ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Ограничимся малыми колебаниями: $\sin \varphi \approx \varphi$

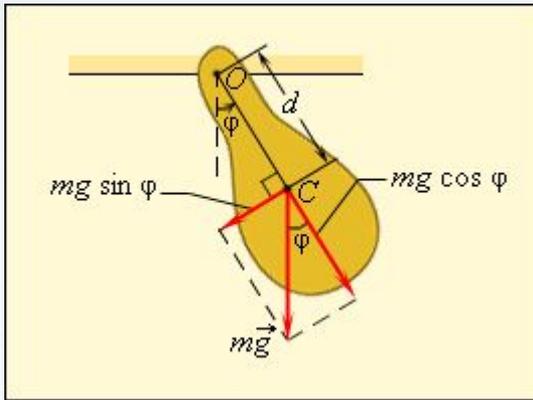
$$\frac{g}{l} = \omega_0^2; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Физическим маятником называют твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.



Вращательный момент сил: $M = -mgd \sin \varphi$

d – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника

Уравнение моментов: $J\ddot{\varphi} = -mgd \sin \varphi$

Ограничимся малыми колебаниями: $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\frac{mgd}{J} = \omega_0^2; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

$l_{np} = \frac{J}{md}$ – приведенная длина физического маятника

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется **центром качания физического маятника**. При подвешивании маятника в точке качания приведенная длина и период колебаний равны исходным. Точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности.

Затухающие колебания

Уравнение затухающих колебаний: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$2\beta = \frac{r}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

r – коэффициент сопротивления $F \sim rv$,
 k – коэффициент квазиупругой силы,
 ω_0 – собственная частота системы

При не слишком большом затухании $\beta < \omega_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

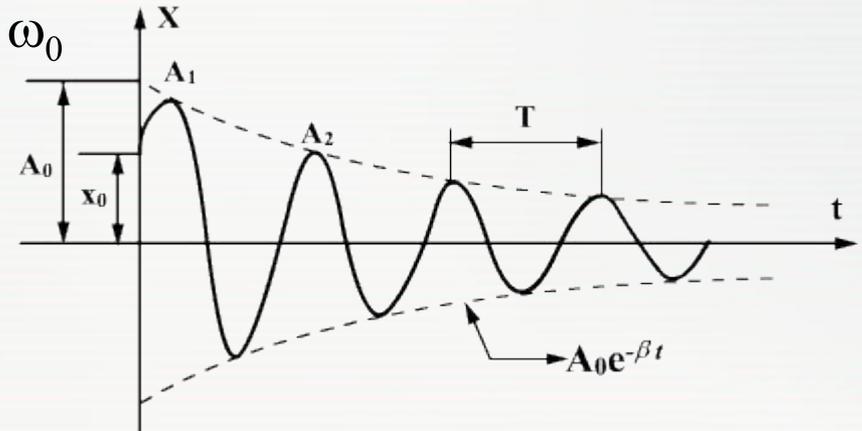


рис 7.8

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \quad \text{Декремент затухания}$$

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \quad \text{Логарифмический декремент затухания} \quad A(t) = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad \text{Добротность}$$

Энергия колеблющейся системы

$$E = E_0 e^{-2\beta t}$$

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Вынужденные колебания

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$x = \frac{f_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Резонанс

