ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

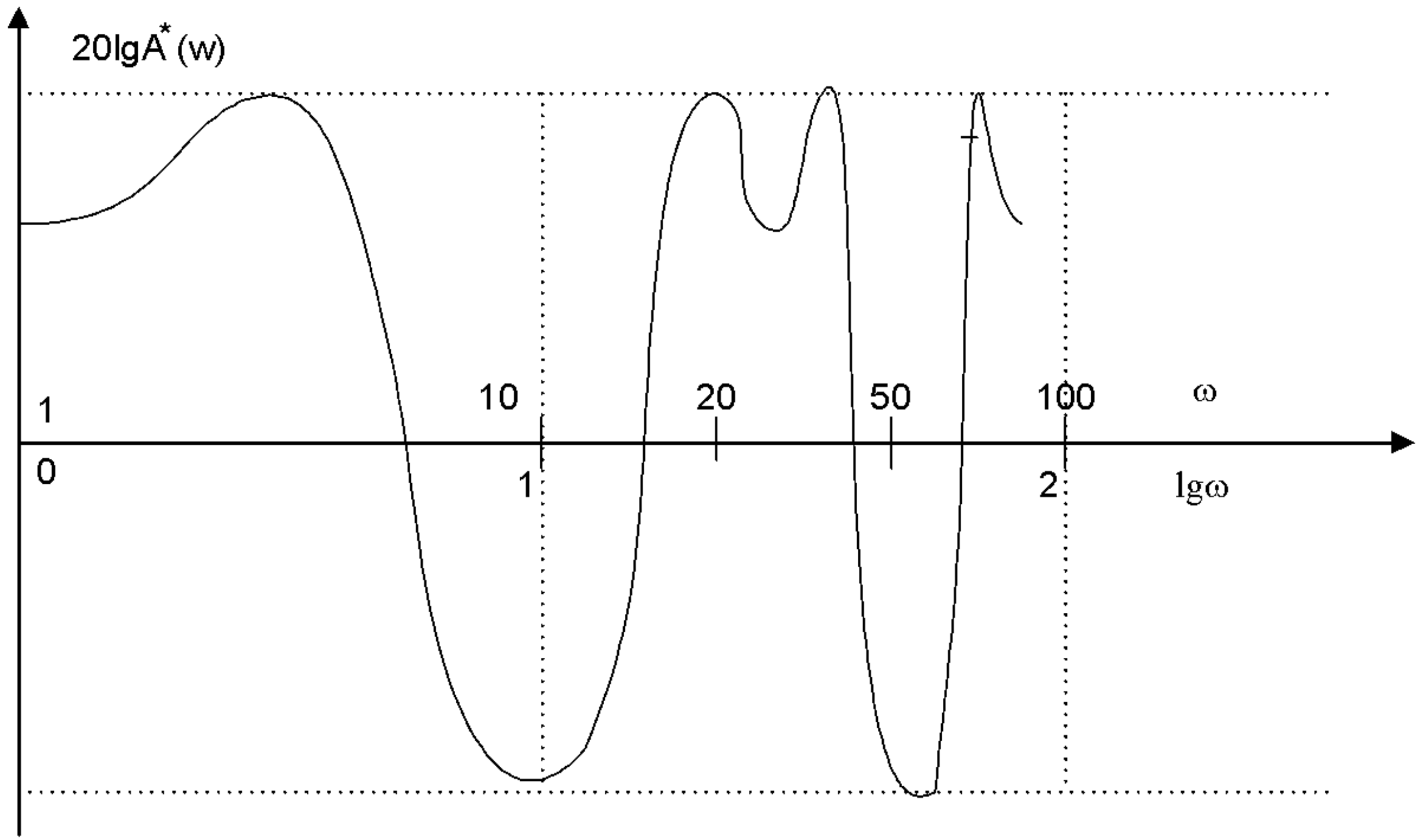
Цифровые системы автоматического управления

- **Амплитудно-фазовая частотная** характеристика импульсной системы – отношение выходного сигнала к входному сигналу в комплексной форме

т.е.функция $W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T})$, получающаяся из Z-ПФ $W(z)$ в результате подстановки $z=e^{j\omega T}$

- **Амплитудно – частотная характеристика** (АЧХ) импульсной системы - функция $A^*(\omega) = |W(e^{j\omega T})|$
- **Фазо-частотная характеристика** (ФЧХ) импульсной системы - функция $\phi^*(\omega)=\arg W(e^{j\omega T})$

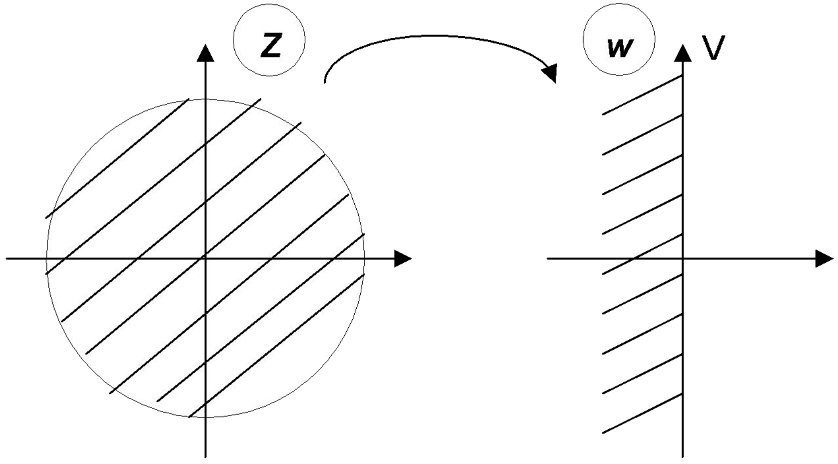
Логарифмические частотные характеристики



Псевдочастотные характеристики

- Переход к псевдочастоте **λ** осуществляется на основе билинейного преобразования
- Введем комплексную величину ω, связанную с комплексной величиной **z** билинейным преобразованием:

$$z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \qquad \omega = \frac{z-1}{z+1}$$



Псевдочастотные характеристики

- Сделав подстановку $z=e^{j\omega T}$

$\omega = j\lambda_0$ где $\lambda_0 = tg\dfrac{\omega T}{2}$ относительная псевдочастота

- Абсолютная псевдочастота –

$$\lambda = \lambda_0 \frac{2}{T} = \frac{2}{T} tg \frac{\omega T}{2}$$

- на малых частотах $\lambda \approx \omega$
- можно заменить псевдочастоту действительной круговой частотой

1. необходимо выполнить подстановку в W(z) $z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$
2. Заменить $\omega = \dfrac{j\lambda T}{2}$
3. Получим $W^*(j\lambda) = W\left(\dfrac{1+\omega}{1-\omega}\right) = W\left(\dfrac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}\right)$

частотная характеристика W*(jλ) в функции псевдочастоты λ - псевдочастотная характеристика (ПЧХ).

В области псевдочастот частотные характеристики дискретных систем имеют те же свойства, что и у непрерывных систем

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Цифровые системы автоматического управления

Линейная ИС устойчива тогда и только тогда, когда ее реакция на любое ограниченное воздействие ограничена.

Система устойчива «в малом», если определён факт наличия устойчивости, но не определены её границы.

Система устойчива «в большом», когда определены границы устойчивости и то, что реальные отклонения не выходят за эти границы.

Постановка задачи исследования систем на устойчивость

1) устойчива ли система при заданном значении её параметров;

2) в каких диапазонах можно изменять параметры системы, не нарушая её устойчивости.

Общее условие устойчивости

Импульсная система устойчива если все корни лежат в круге единичного радиуса.

Если хотя бы один корень $|z_i| > 1$, система будет неустойчивой.

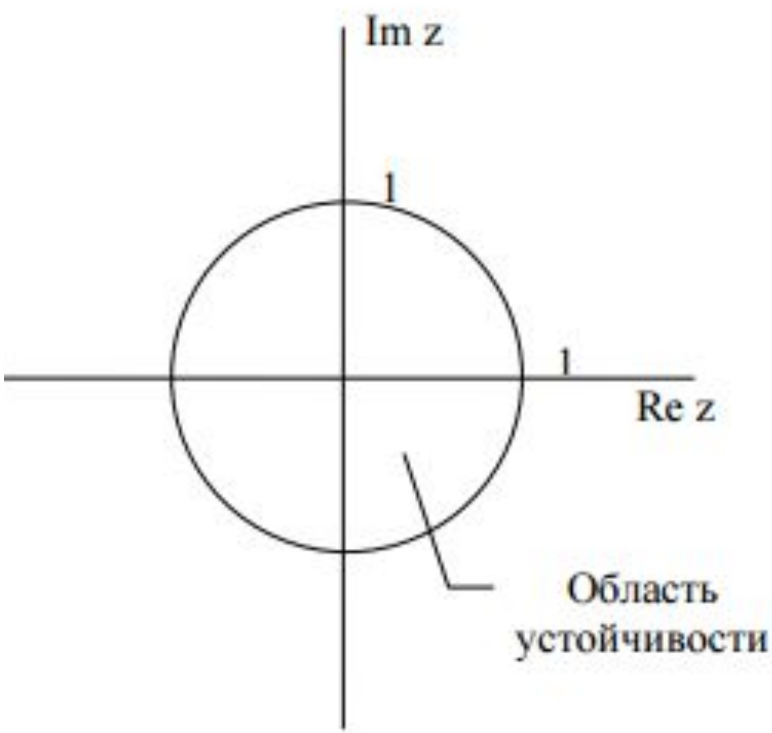
Если хотя бы один корень $|z_i| = 1$ при всех остальных $|z_{n-i}| < 1$, в системе будут наблюдаться незатухающие колебания (граница устойчивости).

устойчивость обеспечивается,

если полюсы $|z_i|=1$ представляют

собой полюсы первого порядка

ПФ W(z).



Алгебраические критерии устойчивости импульсных систем

- Рассмотрим характеристическое уравнение системы:
- $B(z)=b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0$
- Применим к нему билинейное преобразование: $z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$

$$b_0\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^n + b_1\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^{n-1} + \ldots\ b_{n-1}\frac{1+\omega}{1-\omega} + b_n = 0$$

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = 0$$

- коэффициенты a_i i=0..n выражаются через коэффициенты b_i i=0..n
- К уравнению можно применить критерии устойчивости непрерывных систем (Рауса, Гурвица, Михайлова и т. д.)

Критерий Гурвица

- Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы были положительными *n* – главных определителей матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов характеристического уравнения

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Алгебраический критерий Шур-Кона

- Рассмотрим характеристическое уравнение системы:
- $B(z)=b_0z^n + b_1z^{n-1} +\ldots+ b_{n-1}z + b_n=0$
- Корни характеристического уравнения будут лежать внутри единичной окружности, если коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:
- $\Delta_k <0$ для нечетных k
- $\Delta_k >0$ для четных k,
- где Δ_k - определитель Шур-Кона

$$B_{1k} = \begin{pmatrix} b_n & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ . & . & \dots & 0 \\ b_{n-(k-1)} & b_{n-(k-2)} & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} B_{1k} & B_{2k} \\ B_{2k}^T & B_{1k}^T \end{pmatrix}$$

$$B_{2k} = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & 0 \\ b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

Частотные критерии устойчивости импульсных систем

Аналог критерия Михайлова для ИС

- Рассмотрим характеристическое уравнение системы:
- $B(z)=b_0z^n + b_1z^{n-1} +\ldots+ b_{n-1}z + b_n=0$
- Проведем замену переменной $z=e^{j\omega T}$

$$B\left(e^{j\omega T}\right)=b_0e^{j\omega Tn}+b_1e^{j\omega T(n-1)}+\ldots+b_{n-1}e^{j\omega T}+b_n=0$$

- Число m корней многочлена B(z), лежащих внутри единичной окружности, равно r/2 , где r – число квадрантов, обходимых последовательно в положительном направлении годографом $B(e^{j\omega T})$ при изменении ω от 0 до π/T.
- Для устойчивости системы необходимо, чтобы $n=r/2$

Необходимые условия критерия Михайлова

$$B\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=0} > 0$$

$$B\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=\pi} < 0$$

- для нечетного n

$$B\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=0} > 0$$

$$B\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=\pi} > 0$$

- для четного n

Критерий Найквиста

- Пусть характеристическое уравнение разомкнутой ИС имеет *l* корней вне единичного круга плоскости Z.
- Для того, чтобы замкнутая ИС была устойчива необходимо и достаточно, чтобы годограф $W(e^{j\omega T})$ при изменении $0 \le \omega \le \pi/T$ охватывал точку (-1, j0) на комплексной плоскости Z *l* /2 раз

Анализ устойчивости импульсных систем методом ЛПЧХ

- Если разомкнутая ИС устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в интервале псевдочастот, где ЛАПЧХ дискретной системы положительна, разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФПЧХ через линию -π была равна нулю: $П_+ - П_- = 0$
- Положительным переходом считается переход в сторону возрастания ЛФПЧХ, отрицательным – в сторону убывания

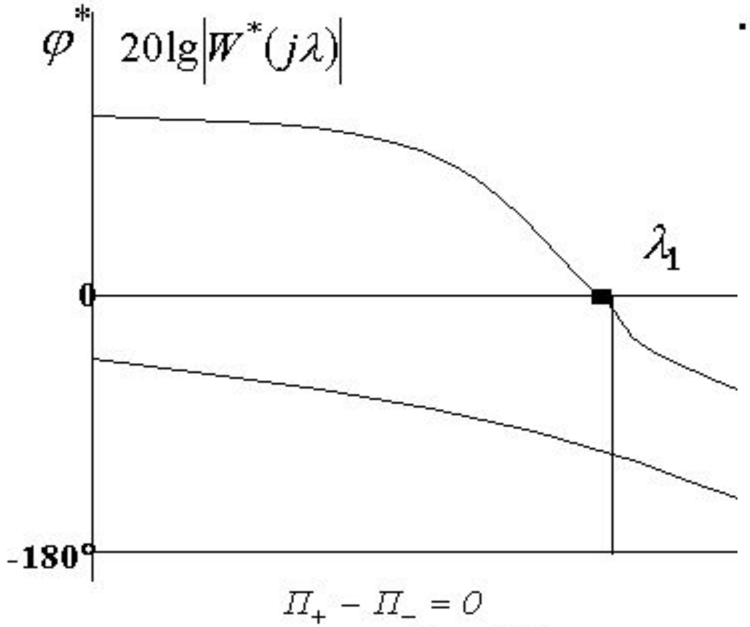


Рис.13.3.

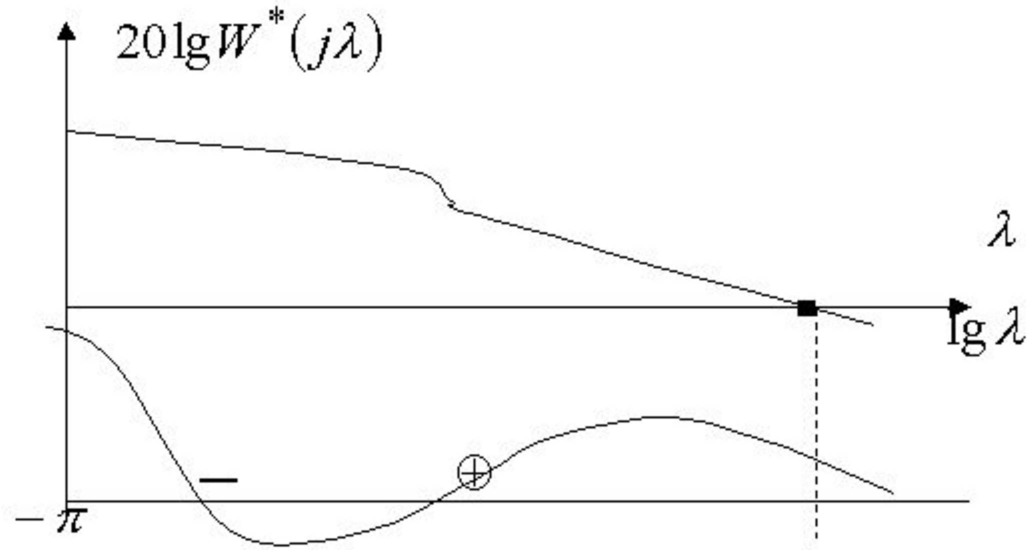


Рис.13.5.

Если ПФ разомкнутой системы имеет полюсы, лежащие на единичной окружности

- Полюсу $z=1$ соответствует $\omega=\lambda=0$.
- Так как при $\omega=0$ учитывается не вся величина скачка ФХ, а только его половина, то при исследовании устойчивости для $\lambda=0$ следует дополнить ФХ скачком на $-\pi r/2$, где r – порядок полюса $z=1$.

Запасы устойчивости по амплитуде ΔA и по фазе Δφ

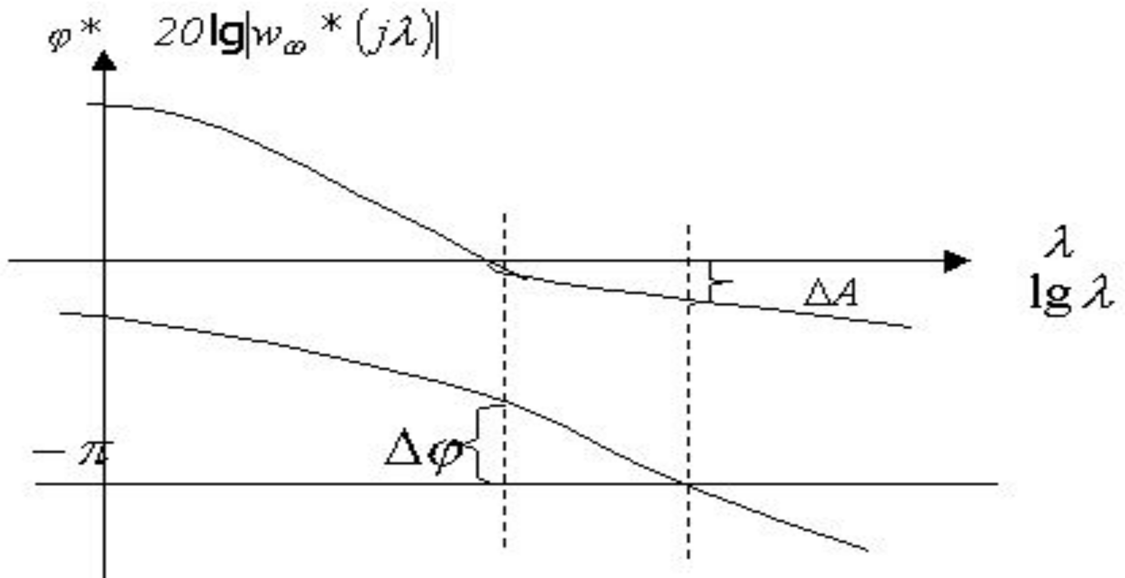


Рис.13.9.

- Запас устойчивости по амплитуде показывает, во сколько раз можно увеличить коэффициент передачи разомкнутой системы без потери устойчивости.
- Запас по фазе показывает величину дополнительного допустимого фазового запаздывания, при котором система еще устойчива.

Устойчивость дискретных систем в моменты квантования и между ними.

- Система, устойчивая в дискретные моменты времени, может оказаться неустойчивой в моменты квантования и между ними.
- Это явление называется скрытым раскачиванием.
- Для получения информации о процессах в моменты времени между моментами квантования используют ПФ, полученные на основе модифицированного z – преобразования.
- ПФ замкнутой системы для смещенных моментов времени

$$W_{çàìê}\left(z,\varepsilon\right)=\frac{W\left(z,\varepsilon\right)}{1+W\left(z\right)}$$

- Пусть $$W(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$
- а модифицированная Z – ПФ – $$W_1 = \frac{A_1(z)}{B_1(z)}$$

$$W_{\text{çàìê}}(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{A(z)}{A(z) + B(z)}$$

$$W_{\text{çàìê}}(z, \varepsilon) = \frac{A_1 / B_1}{1 + A / B} = \frac{A_1(z)}{B(z) + A(z)} \cdot \frac{B(z)}{B_1(z)}$$

- Если нули многочленов $B_1(z)$ и $B_2(z)$ не совпадают, то модифицированная Z – ПФ может иметь полюсы, не входящие в число особых точек ПФ $W_{замк}(z)$.
- При этом возможны следующие варианты.
- Если корни полиномов $A(z)+B(z)$ и $B_1(z)$ удовлетворяют условиям устойчивости, т. е. имеют модули, меньше единицы, то система устойчива как в тактовые моменты времени, так и между ними.
- Если имеются корни $B_1(z)$, такие, что $|z|>1$, а корни полинома $A(z)+B(z)$ удовлетворяют условиям устойчивости, то система устойчива в тактовые моменты времени и неустойчива в промежутках между тактами.
- Это соответствует скрытым колебаниям.