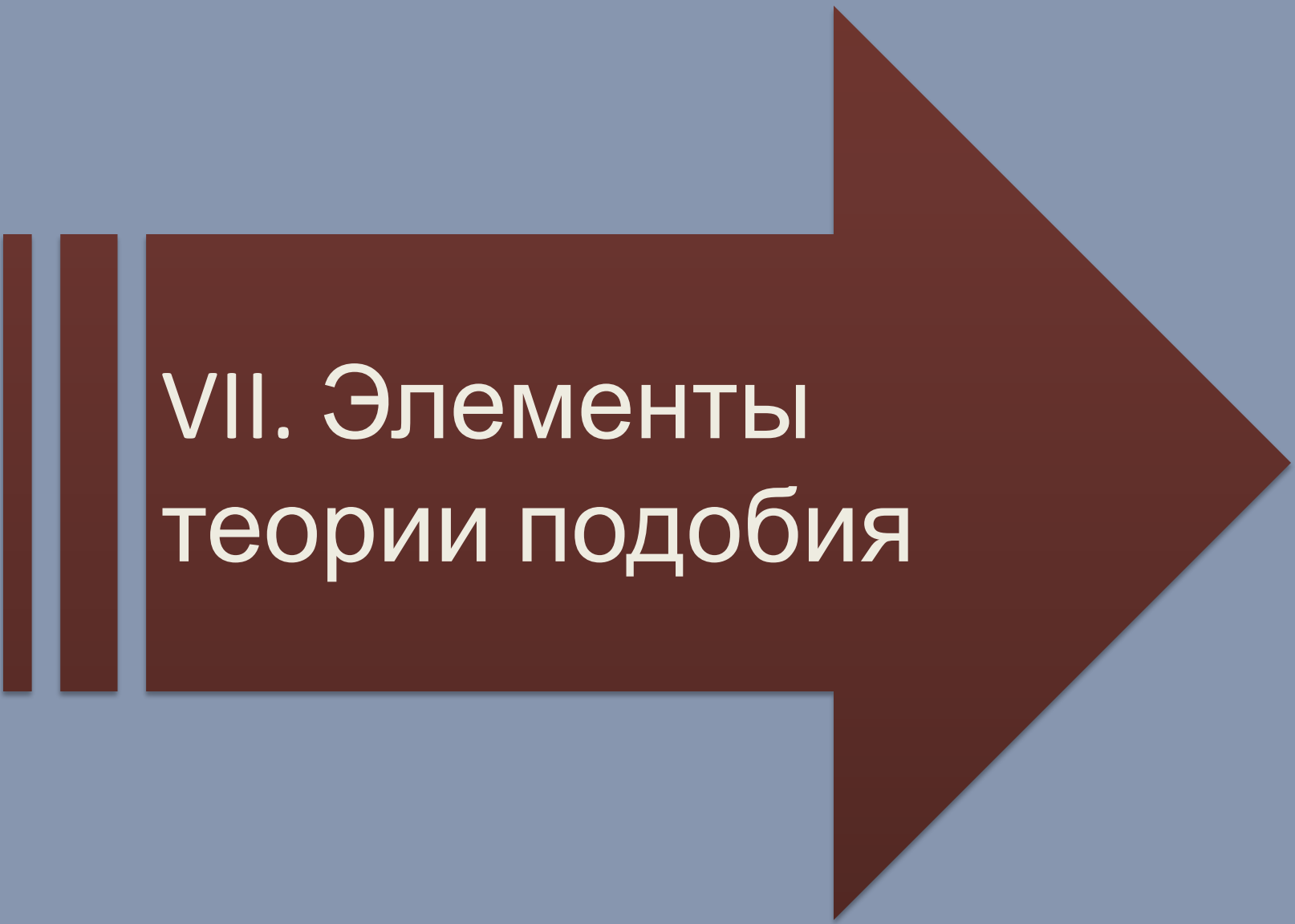


# МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Курс лекций для  
направления  
«Металлургия»



# VII. Элементы теории подобия

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

математическая модель

решение системы сложных  
дифференциальных уравнений  
известными математическими  
методами

*общий случай, но не всегда  
возможен*

экспериментальная модель

получение эмпирических  
уравнений

*частный случай,  
применим не для всех  
аналогичных явлений*

**ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ**

*Законами подобия* называют связывающие между собой величины, полученные при исследованиях на модели, и соответствующие им величины в натуре

Геометрическое подобие

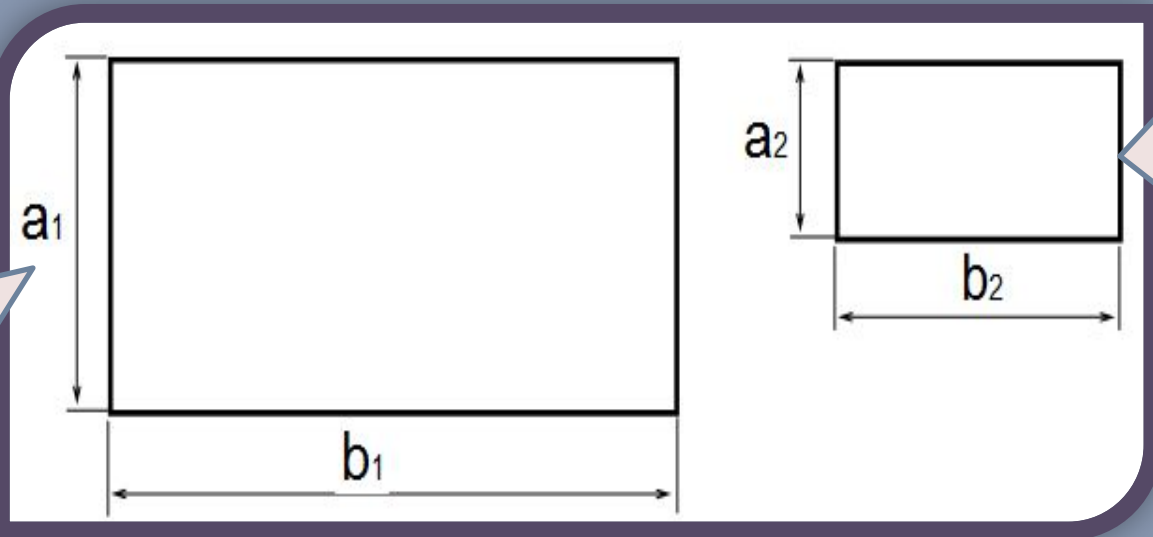
Кинематическое  
подобие

Динамическое  
подобие

*Подобными называют явления, для которых постоянны отношения характеризующих их соответственных величин.*

# Геометрическое подобие

натурный объект (поток), подлежащий гидродинамическому исследованию (индекс 1)



его модель (индекс 2)

Разделим все линейные размеры натурального потока на некоторое число  $k$ , которое называется **линейным масштабом**.

*Для площадей*



*Для объемов*



# Кинематическое подобие

Необходимо:

- траектории частиц обоих потоков были подобны *геометрически*.
- пропорциональны *отрезки траекторий* соответствующих частиц натурального и модельного потоков,
- пропорциональны *отрезки времени*, в течение которых протекают процессы в натуре и в модели.

Т.е если в первом потоке (натуре) частицы проходят  
путь  $L_1$  за время  $t_1$ ,  
то во втором потоке (модели) –

путь  $L_2$  за  $t_2$ .

Причем, отрезки  $L_1$  и  $L_2$  должны быть *геометрически подобны*, а отношение  $t_1/t_2$  должно быть *одинаковым* для сходственных точек обоих потоков.

Отношение  $t_1/t_2$  называется **масштабом времени** и обозначается  $k_t$ .

# Динамическое подобие

Включает в себя геометрическое и кинематическое подобия. В любых потоках, если физическая *природа* действующих на жидкость *сил одинакова* и силы образуют *геометрически подобные* силовые многоугольники, они являются **динамически подобными**.

Отношение одноименных сил в сходственных точках в натуре и на модели постоянны:

$P$  – любая сила, в том числе и равнодействующая  
 $k_p$  – масштабный коэффициент, или масштаб сил

К силам, действующим в потоке жидкости, можно отнести

силы внутреннего трения жидкости

силы тяжести

силы поверхностного натяжения и др.

*для скоростей*

*масштаб скоростей*

*масштаб ускорений*

*для действующих сил*

Таким образом, для динамического подобия необходимо, чтобы силы находились в соотношении

математическим выражением общего закона динамического подобия, впервые сформулированным Ньютоном

**Критерий Ньютона.** Критерий Ньютона является *обобщенным критерием динамического подобия* механических систем.



# Гидродинамические критерии подобия

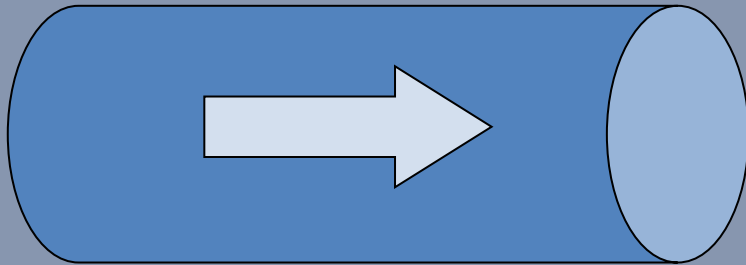
При исследованиях гидравлических явлений часто выделяют только одну силу, а действием остальных пренебрегают. В этом случае применяют *частные критерии Рейнольдса, Фруда, Вебера и др.*

Безразмерные соотношения разнородных физических величин называют *критериями подобия.*

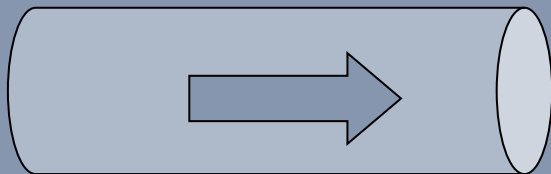
Критерии подобия **всегда имеют физический смысл**, являясь мерами соотношения между какими-то двумя параметрами, оказывающими существенное влияние на данный процесс.

# 1. Критерий Рейнольдса

Если основное влияние на движение потока жидкости оказывают силы *вязкости*



$$\rho_1, \mu_1, L_1 (d_1), v_1$$



$$\rho_2, \mu_2, L_2 (d_2), v_2$$

## Вывод:

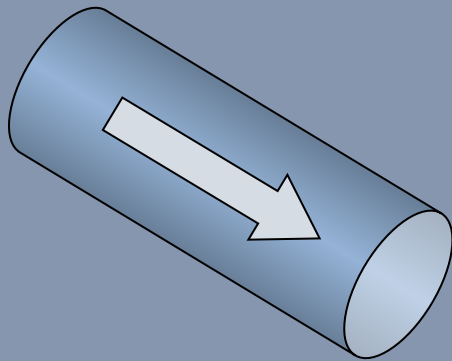
По закону внутреннего трения эти силы вязкости могут быть выражены:	$P = \mu S \frac{dv}{dn} \quad \text{или} \quad P = \mu L^2 \left( \frac{v}{\ell} \right) = \mu v \ell$
Для натурального и модельного потоков	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\mu_1 v_1 \ell_1}{\mu_2 v_2 \ell_2}$
Приравнивая к основному уравнению динамического подобия, получим:	$\frac{\rho_1 v_1^2 \ell_1^2}{\rho_2 v_2^2 \ell_2^2} = \frac{\mu_1 v_1 \ell_1}{\mu_2 v_2 \ell_2}$
Преобразуем	$\frac{\rho_1 v_1 \ell_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 \ell_2}{\mu_2}$
Введя кинематическую вязкость $\nu$	$\frac{v_1 \ell_1}{\nu_1} = \frac{v_2 \ell_2}{\nu_2} = \text{idem}$
критерий Рейнольдса	$Re = \frac{v \ell}{\nu}$

**Физический смысл** критерия Рейнольдса:

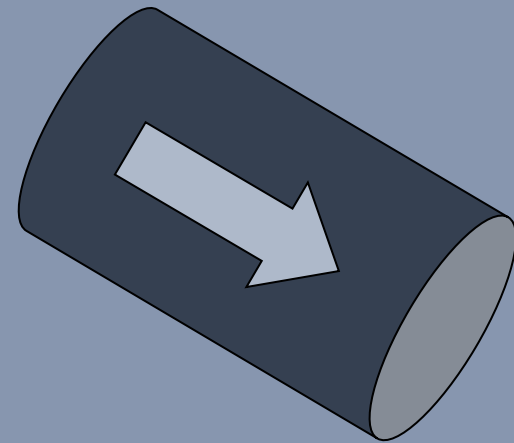
характеризует отношение силы инерции к силе трения (вязкости).

## 2. Критерий Фруда

Если движение жидкости преимущественно обусловлено действием *сил тяжести*, то в основное уравнение динамического подобия вместо силы  $P$  надо подставить значение силы **тяжести**



$$\rho_1, L_1(d_1), v_1$$



$$\rho_2, L_2(d_2), v_2$$

## Вывод:

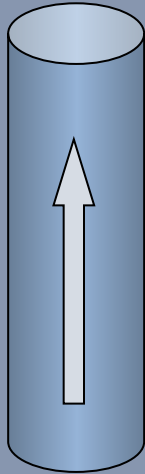
силы тяжести могут быть выражены:	$P = mg = \rho \Delta^3 g$
для натурального и модельного потоков, с учетом основного уравнения динамического подобия, получим:	$\frac{\rho_1 v_1^2 \Delta_1^2}{\rho_2 v_2^2 \Delta_2^2} = \frac{\rho_1 \Delta_1^3 g_1}{\rho_2 \Delta_2^3 g_2}$
или после сокращений получим <b>закон подобия Фруда</b>	$\frac{v_1^2}{g_1 \Delta_1} = \frac{v_2^2}{g_2 \Delta_2} = \text{idem}$
<b>критерий Фруда</b>	$\text{Fr} = \frac{v^2}{g \Delta}$

**Физический смысл** критерия Фруда:

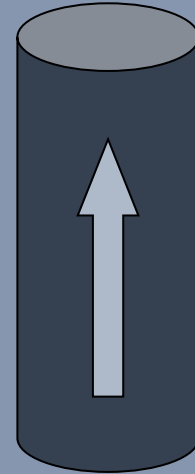
характеризует отношение силы инерции к силе тяжести.

### 3. Критерий Вебера

Если преобладающее влияние имеет сила **поверхностного напряжения** (например при истечении жидкости из капиллярных отверстий), то в основное уравнение динамического подобия вместо силы  $P$  следует подставить выражение силы **поверхностного натяжения**



$$\sigma_1, L_1$$



$$\sigma_2, L_2$$

## Вывод:

силы поверхностного натяжения могут быть выражены:	$P = p \lambda^2 = \frac{\sigma}{L} \lambda^2 = \sigma \lambda$
для натурального и модельного потоков, с учетом основного уравнения динамического подобия, получим:	$\frac{\rho_1 v_1^2 \lambda_1^2}{\rho_2 v_2^2 \lambda_2^2} = \frac{\sigma_1 \lambda_1}{\sigma_2 \lambda_2}$
или после сокращений получим <b>закон подобия Вебера</b>	$\frac{\rho_1 v_1^2 \lambda_1}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 v_2^2 \lambda_2}{\sigma_2} = \text{idem}$
<b>критерий Вебера</b>	$We = \frac{\rho v^2 \lambda}{\sigma}$

**Физический смысл** критерия Вебера:

характеризует отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения