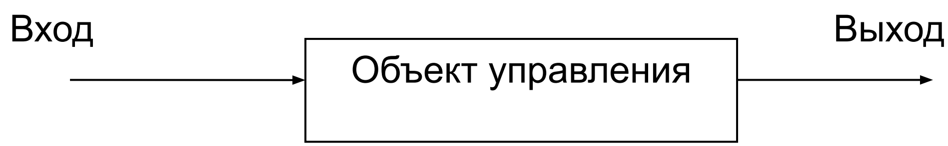
Процесс или объект, подлежащий управлению, может быть представлен в виде блока



В общем случае функциональное звено может иметь несколько входов и выходов.

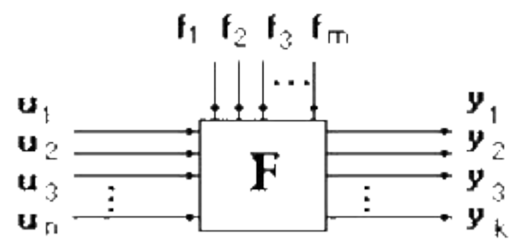
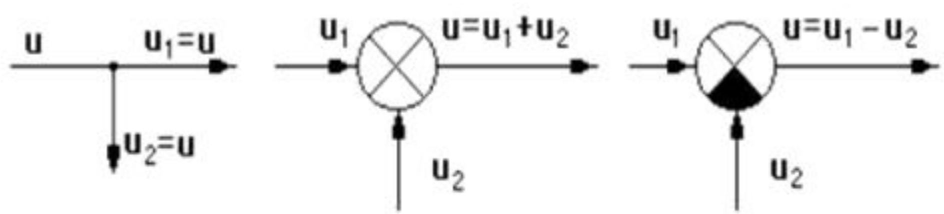
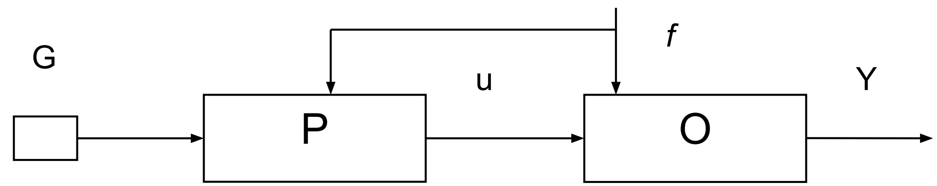


Рис. 3



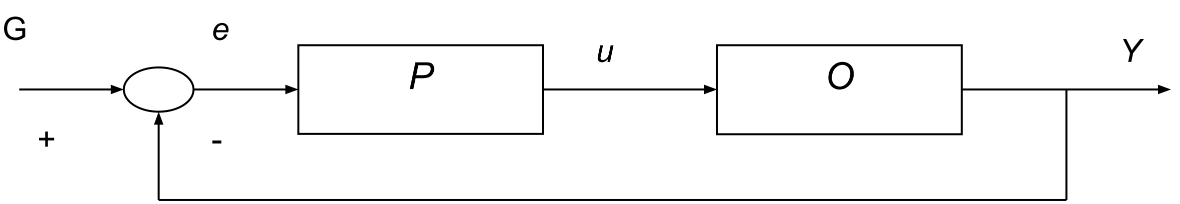
Точки разветвления сигнала называются ***узлами***. Суммирование сигналов осуществляется в ***сумматоре***, вычитание - в ***сравнивающем устройстве***.

Принцип управления по внешнему возмущению



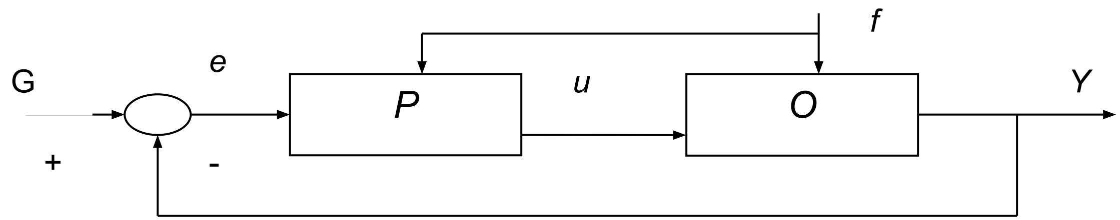
Пусть y_o - значение выходной величины, которое требуется обеспечить согласно программе. На самом деле из-за возмущения f на выходе регистрируется значение y. Величина $e = y_o - y$ называется ***отклонением от заданной величины***.

Принцип управления по отклонению



$$e = G - Y \qquad u(t) = \varphi\{e(t)\}$$

Комбинированный принцип управления

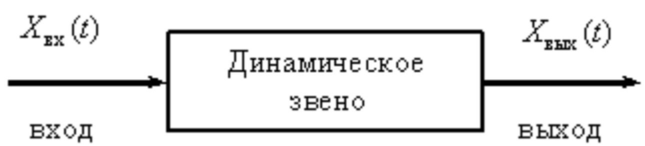


$$u(t) = \varphi\{e(t), f(t)\}$$

Система называется линейной, если к ней применим принцип суперпозиции.

Предположим, например, что реакция системы на вход $r_1(t)$ есть $c_1(t)$, а реакция на вход $r_2(t)$ есть $c_2(t)$.
Если система является линейной, то ее реакция на входы $k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)$ будет равна $k_1 c_1(\mathrm{t}) + k_2 c_2(\mathrm{t})$, где k_1 и k_2 - произвольные константы.

Если уравнение, связывающее сигналы $X_{\text{вх}}(t)$ и $X_{\text{вых}}(t)$, линейно, то говорят о линейном динамическом звене.



Уравнение линейного динамического звена имеет следующий общий вид:

$$a_n \frac{d^n X_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dX_{вых}(t)}{dt} + a_0 X_{вых}(t) =$$
$$b_m \frac{d^m X_{вх}(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} X_{вх}(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dX_{вх}(t)}{dt} + b_0 X_{вх}(t),$$

где $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $b_0, b_0, \cdots, b_m$ - постоянные коэффициенты, $m \le n$.

Если задать начальные условия и найти траекторию динамического движения выходной координаты, то можно записать:

$$X_{вых}(t) = X_{св}(t) + X_{вын}(t)$$

С учетом оператора дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$

Уравнение, которое определяет свободное движение объекта:

$$a_n \frac{d^n X_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dX_{вых}(t)}{dt} + a_0 X_{вых}(t) = 0$$

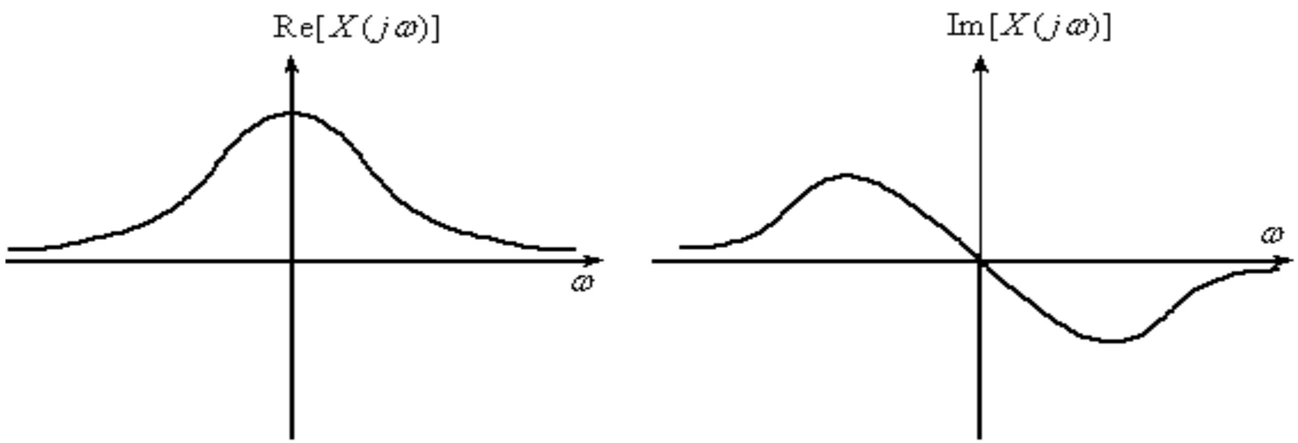
Преобразование Фурье

Соотношение:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \left[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right] dt$$

называют прямым преобразованием Фурье. Функция угловой частоты $\omega - X(j\omega)$ - называется Фурье-изображением или частотным спектром функции $X(t)$.

Спектры в теории автоматического управления представляют графически, изображая отдельно их действительную и мнимую части:



Частотный спектр единичной ступенчатой функции (функция Хевисайда).

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$$

Для этой функции не выполняется требование абсолютной интегрируемости, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|1(t)\right| dt \to \infty$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = -\left.\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{-\infty}^{+\infty} -$$

интеграл не имеет конечного значения, поэтому $1(t)$ Фурье-изображения не имеет.

Частотный спектр дельта-функции (функция Дирака).

$\delta(t) = 1^{'}(t)$ тождественно равна нулю повсюду, кроме точки t=0, где она стремится к бесконечности (функция описывает плотность массы **1**, сосредоточенной в точке t=0, единичный импульс).

Дельта функция является обобщающей функцией. Для любой непрерывной функции $\boldsymbol{\varphi(t)}$ и бесконечно-малого положительного $\boldsymbol{\varepsilon}$ выполняется равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0).$$

Производные от δ - функции определяются следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^m \varphi^m(0),\ m = 1,2,...$$

$\delta^{(m)}(t)$ - m-тая производная по времени от δ - функции, $\varphi(t)$ - обычная функция, имеющая m-тую производную.

Преобразование Лапласа

Соотношение

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} X(t)e^{-st}dt$$

Комплексная переменная $s = \beta_0 + j\omega$

называется оператором Лапласа, где ω - угловая частота, β_0 - некоторое положительное постоянное число.

Изображение по Лапласу для импульсной функции

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1,$$

Изображение по Лапласу для единичнойфункции

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Переменную s в преобразовании Лапласа можно рассматривать как оператор дифференцирования, т.е. $s \equiv \frac{d}{dt}$.

Аналогично можно ввести оператор интегрирования $\frac{1}{s} = \int_0^t dt$

Фрагмент таблицы преобразования

$x(t)$	$\delta(t)$	$1(t)$	$C = const$	t	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$
$X(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{C}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

Теорема линейности. Любое линейное соотношение между функциями времени справедливо и для изображений по Лапласу этих функций;

$$X_0(s) = aX_1(s) + bX_2(s) \quad \Rightarrow \quad x_0(t) = ax_1(t) + bx_2(t).$$

Теорема о дифференцировании оригинала

Если

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t)];$$
$$X(s) = L\{x(t)\};$$

то

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$$

где - $x(0)$ - начальное значение оригинала.

Для производной $\boldsymbol{n}$-го порядка справедливо следующее соотношение:

$$L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0)$$

Теорема об интегрировании оригинала

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{1}{s}X(s). \qquad \int_0^t dt = \frac{1}{s}$$

Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$ справедливо соотношение

$$L\{X(t-\tau)\} = e^{-s\tau}L\{X(t)\} = e^{-s\tau}X(s)$$

Теорема о свертке (умножении изображений)

$$L\left\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau\right\} = L\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s)X_2(s)$$

$$X_1(s) = L\{x_1(t)\}, \quad X_2(s) = L\{x_2(t)\}$$

Теорема о предельных значениях. Если $X(s) = L\{x(t)\}$ то

$$\lim_{s\to\infty}(sX(s)) = \lim_{t\to 0}(x(t)) = x(0),$$

$$\lim_{s\to 0}(sX(s)) = \lim_{t\to\infty}(x(t)) = x(\infty),$$

если $x(\infty) = \lim_{t\to\infty}(x(t))$ существует.

Теорема разложения.

Если $X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ является дробнорациональной функцией ($A(s)$, $B(s)$ – полиномы от s) и степень полинома числителя меньше полинома знаменателя, то ее оригиналом является функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{n_k - 1}}{ds^{n_k - 1}} \left(X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{ts} \right),$$

где s_k – корни уравнения $A(s)=0$, n_k – их кратности и q– число различных корней.

Если указанные корни простые, то

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t}$$

Здесь n – степень полинома $A(s)$;

$$A'(s_k) = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=s_k}$$

Формулы справедливы при $t \geq 0$. При $t<0$ по определению функции-оригинала $x(t) \equiv 0$