

# Ряд Фурье и интеграл Фурье

**Не в совокупности ищи  
единства, но более –  
в единообразии разделения**

*Козьма Прутков.  
Мысли и афоризмы, № 81*

# Ряд Фурье, его формы, свойства спектров

Базис  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = \overline{-\infty, \infty} \right\}$

полон для пространства  $L_2(T)$

$$x(t) \in L_2(T) \quad \longrightarrow \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

# Ряд Фурье, его формы, свойства спектров

$$x(t) \in L_2(T)$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

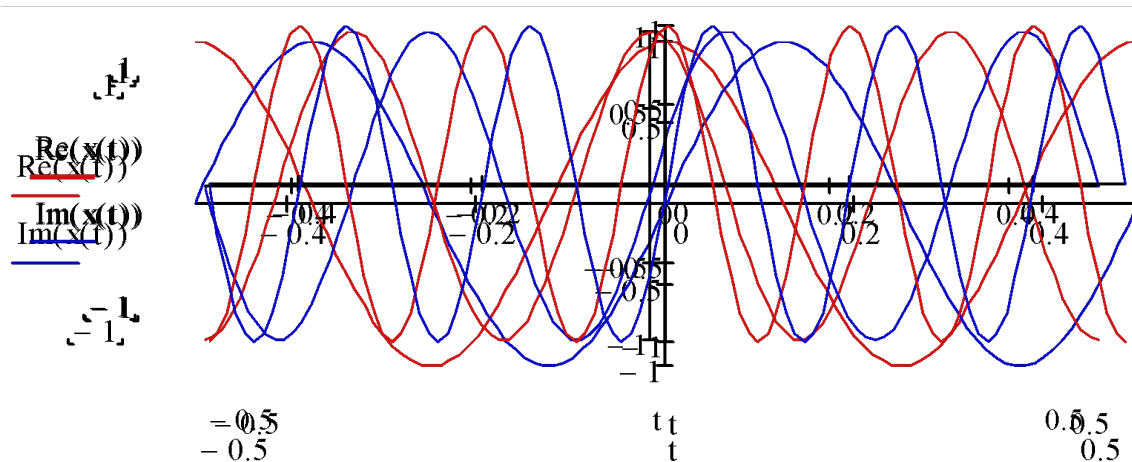
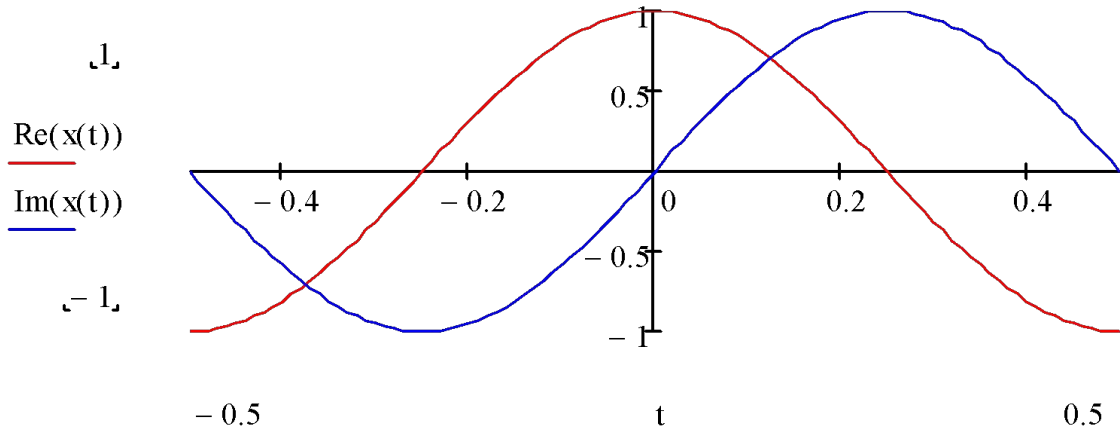
Равенство Парсеваля

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

# Ряд Фурье, его формы, свойства спектров

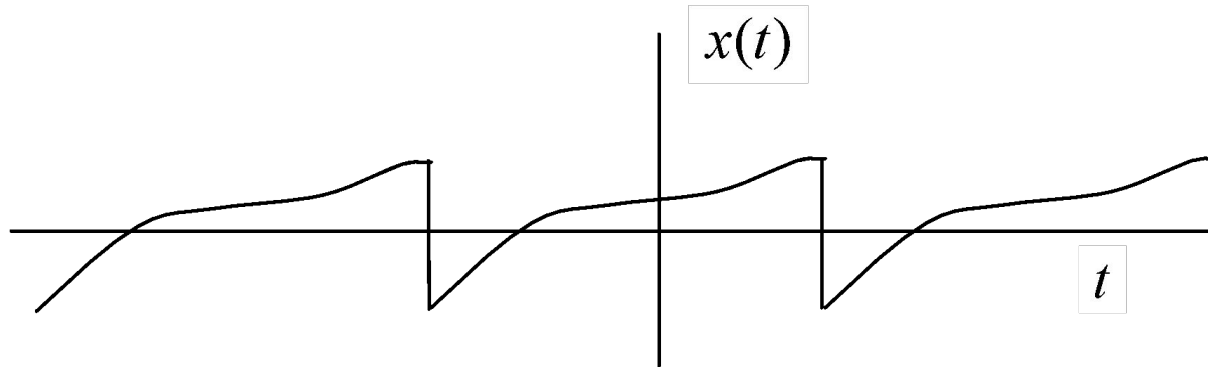
Базисные функции  $\left\{ e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = \overline{-\infty, \infty} \right\}$  при  $t \in (-T/2, T/2)$



# Ряд Фурье, его формы, свойства спектров

Базисные функции  $\left\{ e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = \overline{-\infty, \infty} \right\}$  при  $t \in (-\infty, \infty)$   
периодичны

$T$  представляет собой наименьшее общее кратное их периодов



Ряд Фурье представляет сигнал на конечном интервале и его периодическое продолжение на всей оси  $t \in (-\infty, \infty)$

При этом спектральные коэффициенты находятся по тем же формулам!

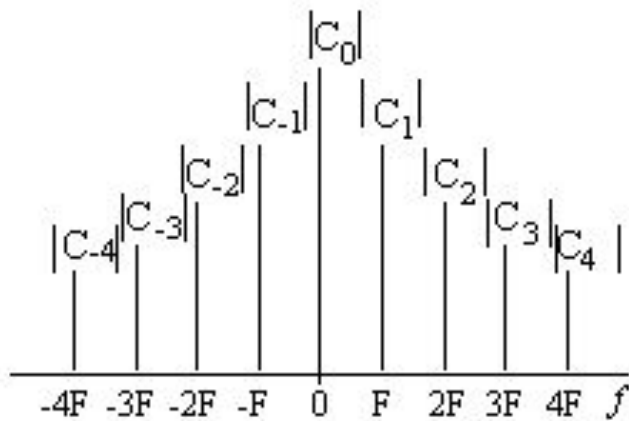
# Комплексный ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

в общем случае **комплексные**

$$\{|C_k|, k = -\infty, \infty\}$$

амплитудный спектр

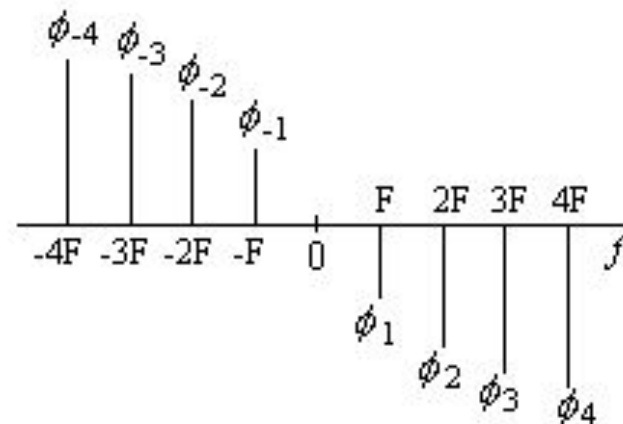


$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

$$C_k = |C_k| e^{j\varphi_k}$$

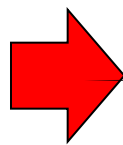
$$\{\varphi_k, k = -\infty, \infty\}$$

фазовый спектр



# Комплексный ряд Фурье вещественного сигнала

Сигнал вещественный

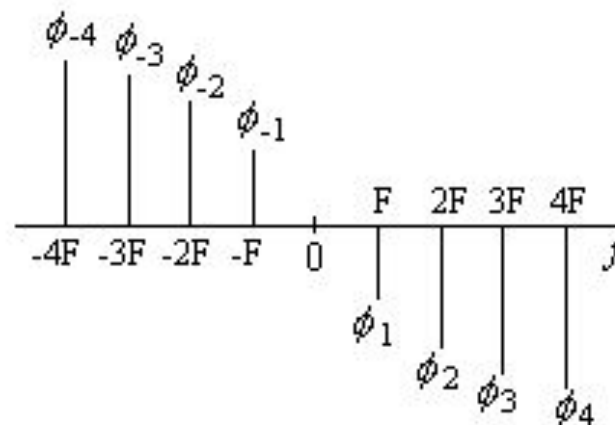
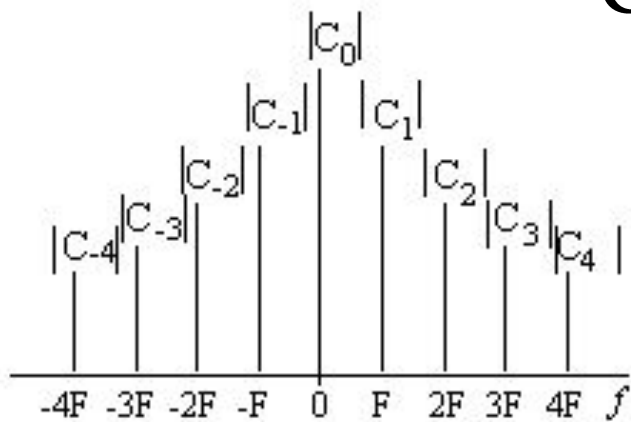


амплитудный спектр **чётный**  
 фазовый спектр **нечётный**

$$x^*(t) = x(t)$$

$$C_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \right)^* = C_k^*$$

$$C_{-k} = C_k^*$$





## Тригонометрические формы ряда Фурье

Просуммируем пару

$$\begin{aligned} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} &= C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_k^* e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \\ &= |C_k| e^{j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + |C_k| e^{-j\varphi_k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = 2|C_k| \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right) \end{aligned}$$

Тогда ряд Фурье можно записать в *тригонометрической* форме

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right),$$
$$A_k = \begin{cases} 2|C_k|, & k \neq 0, \\ A_k = |C_k| = C_0, & k = 0. \end{cases}$$

## Тригонометрические формы ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) dt, \quad k = \overline{0, \infty}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) dt, \quad k = \overline{1, \infty}$$

## Тригонометрические формы ряда Фурье

Сложим пару функций

$$\begin{aligned} a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt &= \\ &= a_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}}{2} + b_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}kt} - e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}}{2j} = \\ &= \frac{a_k - jb_k}{2} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} \\ &= C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} \end{aligned}$$

## Тригонометрические формы ряда Фурье

$$\frac{a_k - jb_k}{2} = C_k$$

$$\frac{a_k + jb_k}{2} = C_{-k}$$

Отсюда следуют связи

$$|C_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2}$$

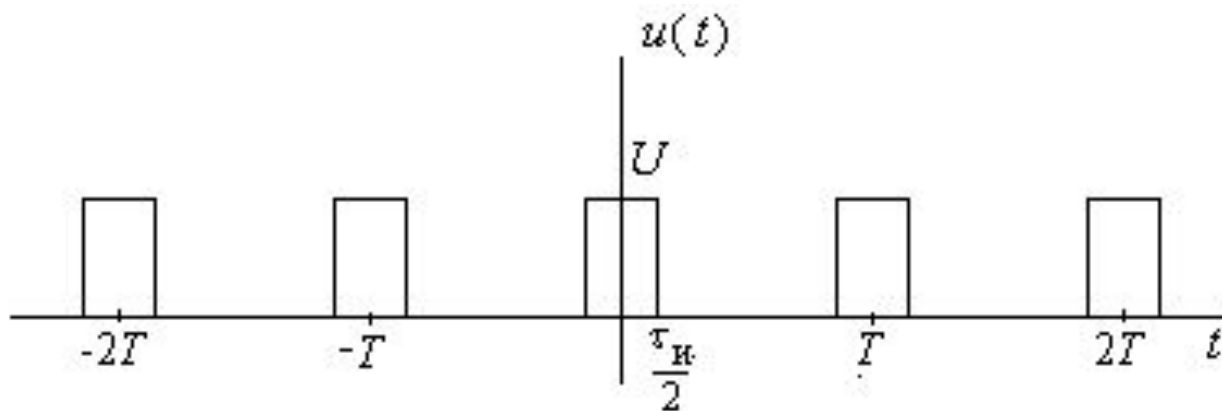
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\varphi_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}$$

*сигнал четный – все синусоидальные компоненты равны 0;  
сигнал нечетный – все косинусоидальные компоненты равны нулю (при этом равна нулю и постоянная составляющая)*

## Пример.



$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau_{и}/2}^{\tau_{и}/2} U \cos \frac{2\pi}{T} ktdt = \frac{U\tau_{и}}{T} \frac{\sin \frac{k\Omega\tau_{и}}{2}}{\frac{k\Omega\tau_{и}}{2}}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$$

частота повторения импульсов

$$C_0 = \frac{U\tau_{и}}{T} = U/q$$

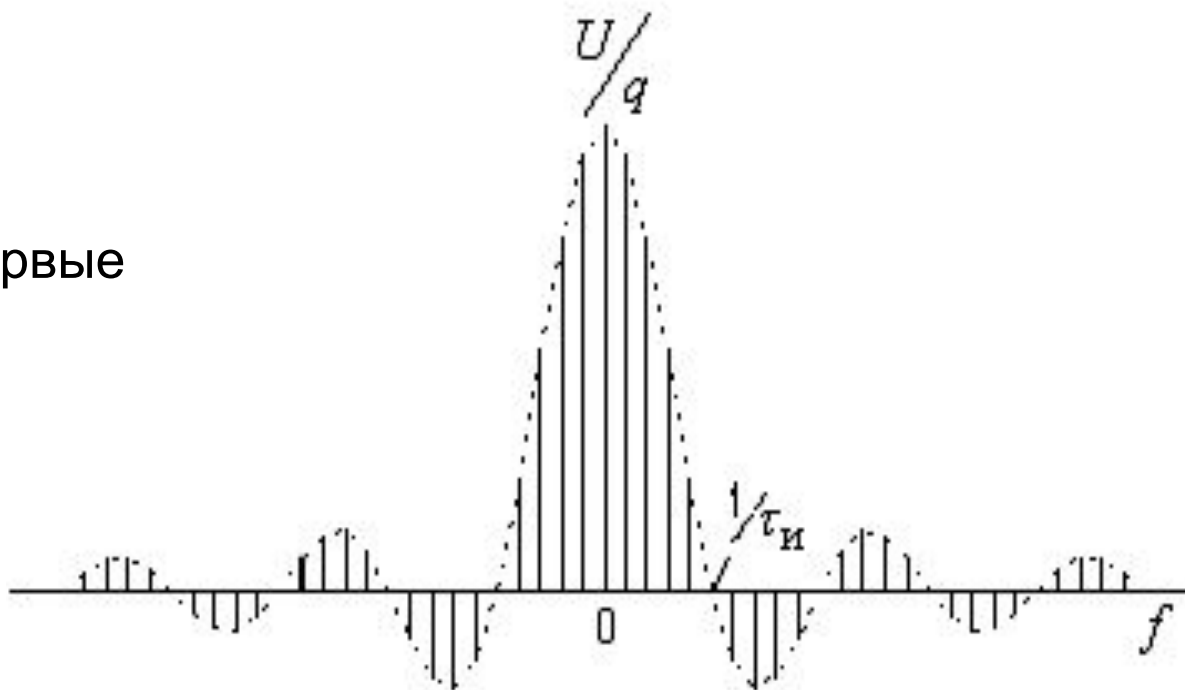
$$q = T/\tau_{и}$$

– скважность импульсной последовательности

$$\frac{\omega \tau_{\text{И}}}{2} = \pi$$

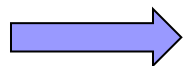
огибающая впервые  
пересекает ось  
абсцисс

$$f = 1/\tau_{\text{И}}$$



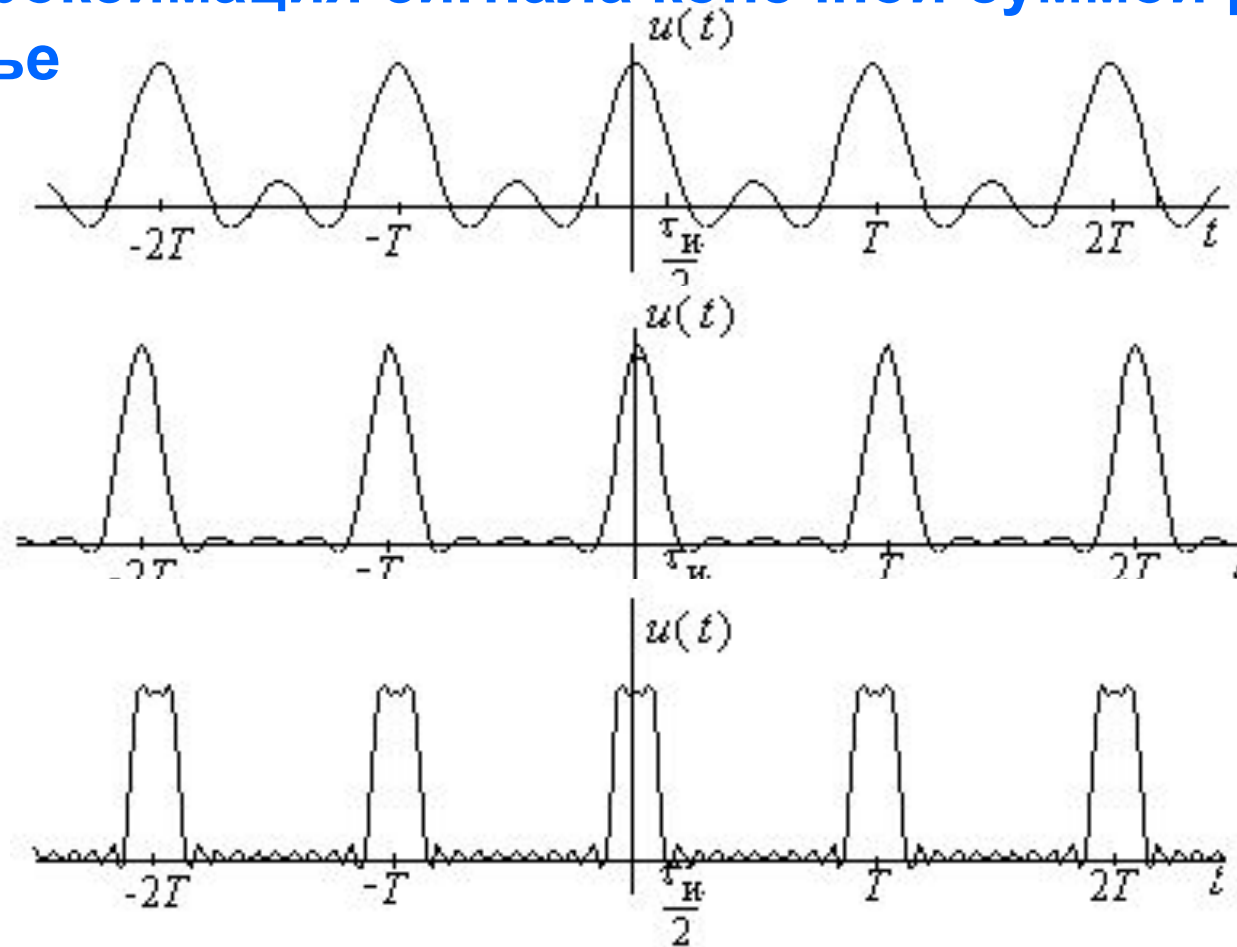
Дискретны отстоят друг от друга на  $F = 1/T$

численное  
значение  
скважности



во сколько раз полуширина  
главного лепестка  
огибающей спектра больше  
шага следования  
спектральных составляющих  
по оси частот

# Аппроксимация сигнала конечной суммой ряда Фурье



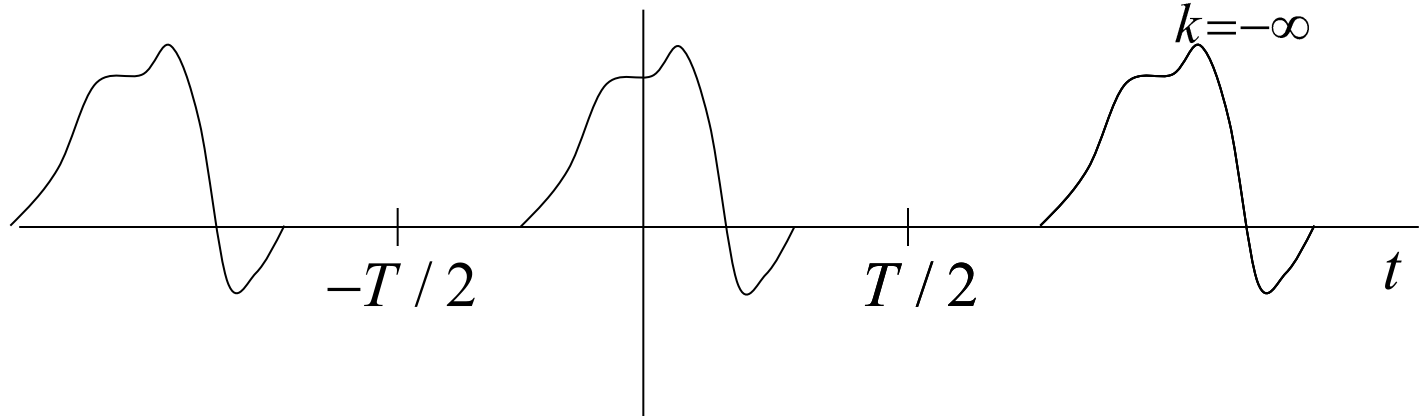
Ошибка аппроксимации

$$\|\varepsilon\|^2 = T \sum_{k=-\infty}^{-N-1} |C_k|^2 + T \sum_{k=N+1}^{\infty} |C_k|^2 = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 - T \sum_{k=-N}^N |C_k|^2$$

## Связь ряда и преобразования Фурье

Рассмотрим импульс (финитный сигнал)  $x(t)$

со спектральной плотностью  $X(f)$   $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t + kT)$



Спектр периодического сигнала

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} kt} dt = \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right)$$

The graph shows the spectrum of the periodic signal. The horizontal axis represents frequency  $f$ . The spectrum consists of a series of vertical lines (impulses) at discrete frequencies  $f = k/T$ . The amplitude of each impulse is  $C_k$ . The overall envelope of the spectrum is a smooth curve that is symmetric about  $f=0$ . A red box highlights the variable  $f$  in the equation, and a red arrow points from the exponent  $-j \frac{2\pi}{T} kt$  to the box.



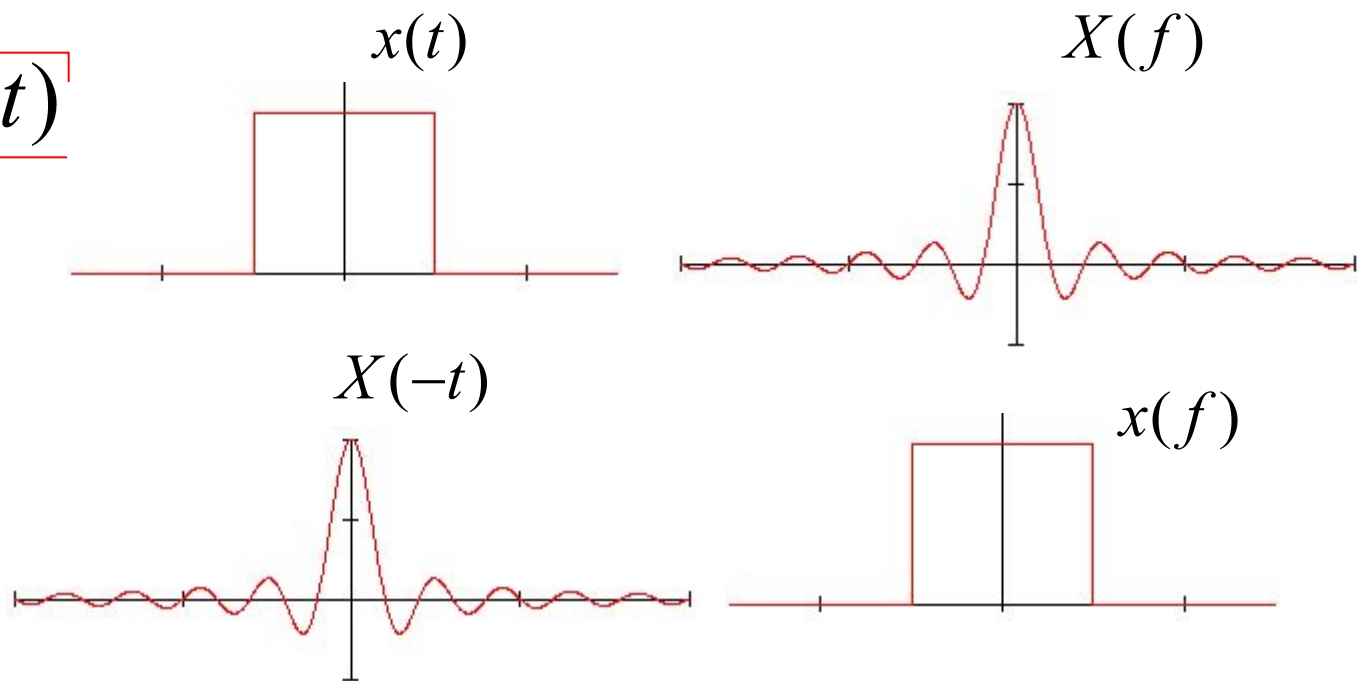
# Свойства преобразования Фурье

## 1. Линейность

$$\sum_k \alpha_k x_k(t) \Leftrightarrow \sum_k \alpha_k X_k(f)$$

## 2. Дуальность (частотно-временная симметрия)

$$x(f) \Leftrightarrow X(-t)$$



## Свойства преобразования Фурье

3. Теорема сдвига (запаздывания)  $x_\tau(t) = x(t - \tau)$

$$\begin{aligned} X_\tau(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f(\theta + \tau)} d\theta = \\ &= e^{-j2\pi f\tau} X(f) \end{aligned}$$

$$x(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f\tau} X(f)$$

## Свойства преобразования Фурье

4. Теорема масштаба  $x_m(t) = x(mt)$

$$m > 0$$

$$\begin{aligned} X_m(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(mt) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f \frac{\theta}{m}} \frac{d\theta}{m} = \frac{1}{m} X\left(\frac{f}{m}\right) \end{aligned}$$

$$m = -\mu < 0$$

$$X_m(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\mu t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f \frac{\theta}{-\mu}} \frac{d\theta}{-\mu} =$$

$$x(mt) \Leftrightarrow \left| \frac{1}{m} \right| X\left(\frac{f}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi \frac{f}{-\mu} \theta} d\theta = \frac{1}{\mu} X\left(\frac{f}{-\mu}\right)$$

## Свойства преобразования Фурье

5. Теорема дифференцирования  $x_d(t) = dx(t)/dt$

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

$x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)$$

6. Теорема интегрирования

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$$

## Свойства преобразования Фурье

7. Теорема модуляции

$$e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt = \\ &= X(f - f_0) \end{aligned}$$

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0)$$

## Свойства преобразования Фурье

### 8. Теорема свёртки

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$$

### 9. Теорема умножения

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)Y(f - \phi)d\phi = X(f) * Y(f)$$

## Свойства преобразования Фурье

### 10. Теорема сопряжения

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad \longrightarrow \quad x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^* =$$

$$= X^*(-f)$$

## Свойства преобразования Фурье

11. Теорема обращения  $x_{-}(t) = x(-t)$

$$\begin{aligned} X_{-}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\theta) e^{j2\pi f\theta} (-d\theta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi(-f)\theta} d\theta = X(-f) \end{aligned}$$

$$x(-t) \Leftrightarrow X(-f)$$



## Свойства преобразования Фурье

Сигнал вещественный



$$X(f) = X^*(-f)$$

или



$$|X(f)| = |X(-f)|$$

$$\arg X(f) = -\arg X(-f)$$

в самом деле:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^* =$$

То же следует из т. сопряжения:

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^*$$

## Свойства преобразования Фурье

Сигнал вещественный  $\longrightarrow X(f) = X^*(-f)$

или

$$\left[ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{X(f)\} = \operatorname{Re}\{X(-f)\} \\ \operatorname{Im}\{X(f)\} = -\operatorname{Im}\{X(-f)\} \end{array} \right]$$

Сигнал вещ. четный

$$x(t) = x(-t) \longrightarrow \begin{array}{l} X(f) = X(-f) \\ \operatorname{Im}\{X(f)\} = 0 \end{array}$$

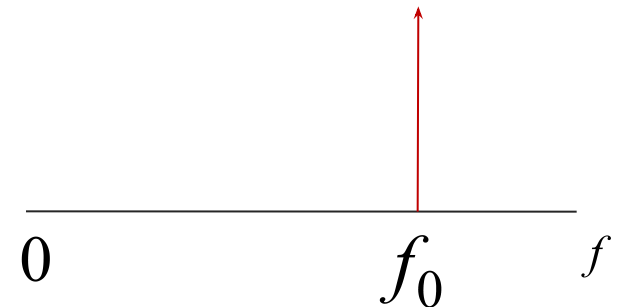
Сигнал вещ. нечетный

$$x(t) = -x(-t) \longrightarrow \begin{array}{l} X(f) = -X(-f) \\ \operatorname{Re}\{X(f)\} = 0 \end{array}$$

## Спектральные плотности гармонических сигналов

$e^{j2\pi f_0 t} \notin L_2(-\infty, \infty) \rightarrow$  спектральная плотность в обычном смысле не существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t}$$



$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

## Балансно-модулированное колебание

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{X(f + f_0)}{2} + \frac{X(f - f_0)}{2}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

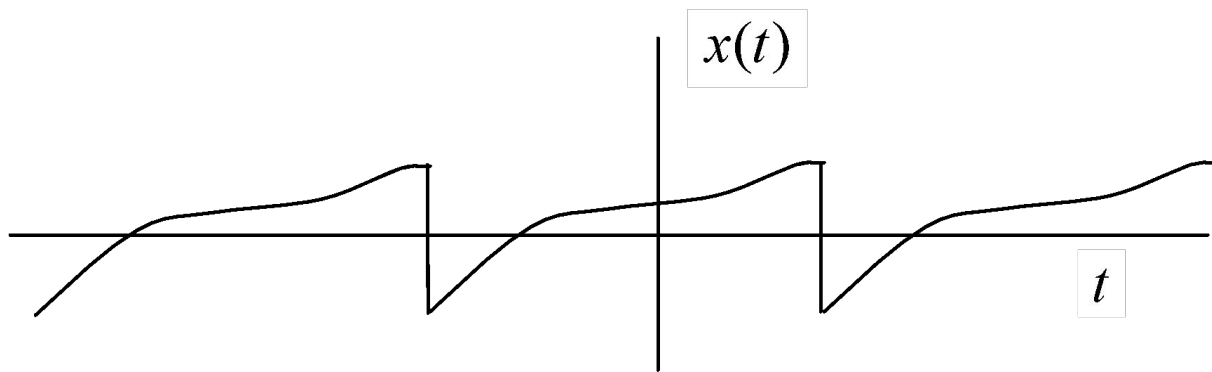
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \delta(f - f_0 - \varphi) d\varphi = X(f - f_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \delta(f + f_0 - \varphi) d\varphi = X(f + f_0)$$

# Спектральные плотности периодических сигналов

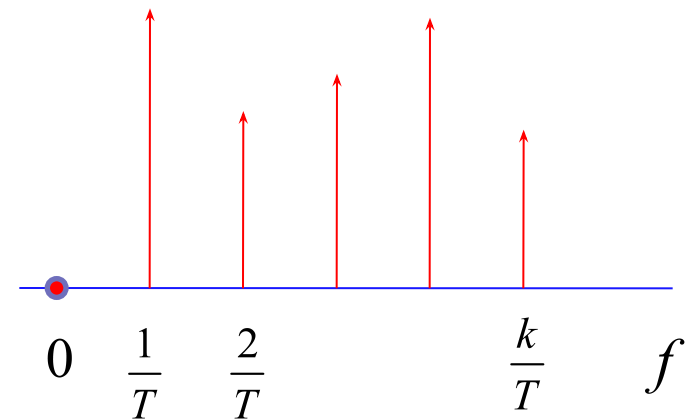
Периодический сигнал

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$



Спектральная плотность

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta\left(f - k\frac{2\pi}{T}\right)$$



## Корреляционно-спектральные характеристики детерминированных сигналов

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$$

$$W_{xy}(f)$$

$$W_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)$$

Взаимная спектральная  
плотность

$$W_x(f) = |X(f)|^2$$

энергетический спектр сигнала  
(спектральная плотность энергии)

$$E_x = (x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f)df$$

# Корреляционно-спектральные характеристики детерминированных сигналов

Обратное преобразование Фурье взаимной спектральной  
плотности

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$Y^*(f) e^{j2\pi f\tau} = Y_{\tau}^*(f)$$

$$Y_{\tau}^*(f)$$

$$Y_{\tau}(f) = Y(f) e^{-j2\pi f\tau}$$



теорема  
сдвига

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y_{\tau}^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt = (x, y_{\tau})$$

взаимно корреляционная функция

# Корреляционно-спектральные характеристики детерминированных сигналов

аналогично

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X_{\tau}^*(f) df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt = (x, x_{\tau}) \end{aligned}$$

автокорреляционная функция



## Свойства автокорреляционной функции

Достигает максимума в нуле

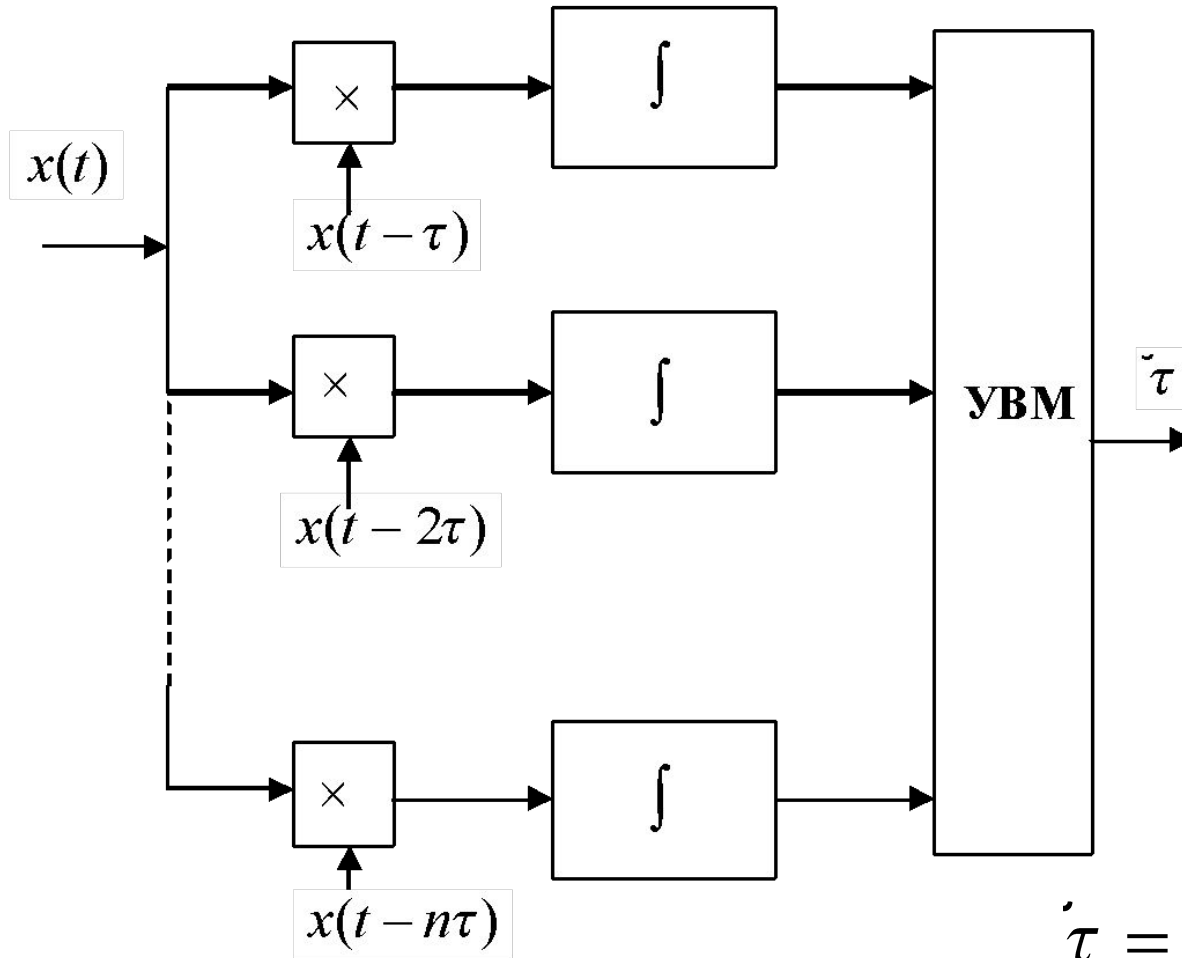
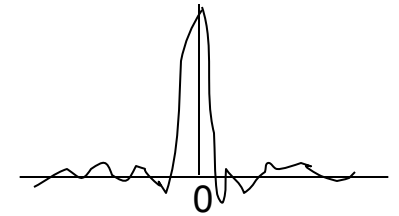
$$B_x(0) = \max_{\tau} B_x(\tau) = E_x$$

Обладает свойством сопряженной симметрии

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta+\tau)x^*(\theta)d\theta = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)x^*(\theta+\tau)d\theta \right]^* = B_x^*(-\tau) \end{aligned}$$

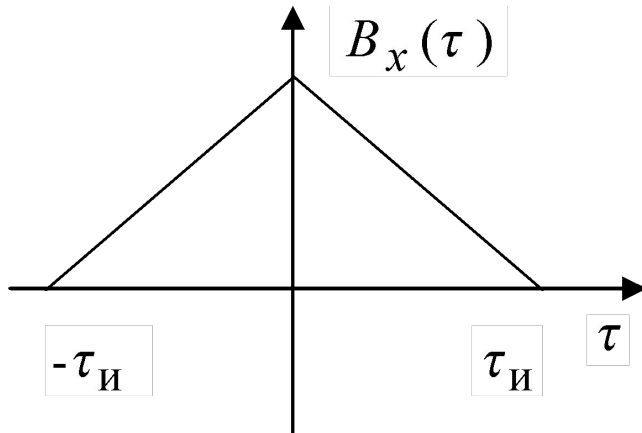
В частности, для вещественного сигнала АКФ – чётная функция

# Синхронизация систем связи



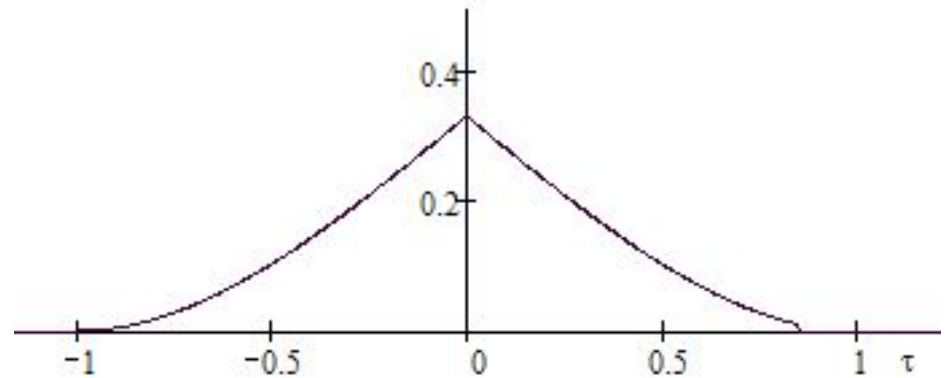
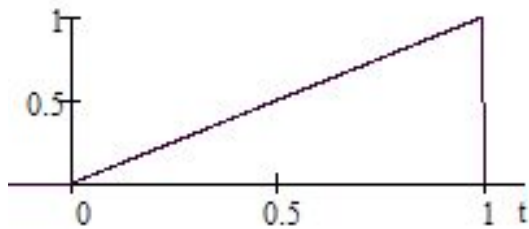
$$\tilde{\tau} = \arg \max_k (x, x_{k\tau})$$

## Пример. АКФ прямоугольного импульса



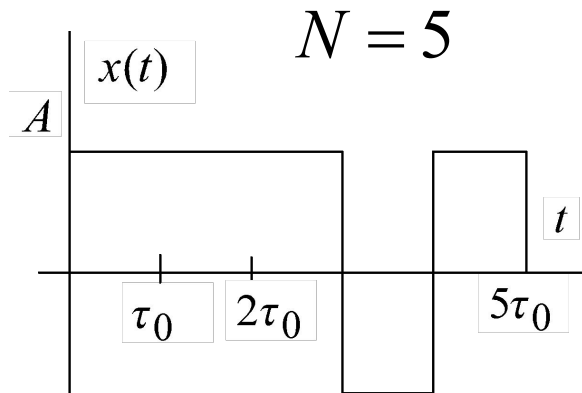
Максимальное значение  
равно  $A^2\tau_{И}$

## Пример. АКФ пилообразного импульса



# Пример. Сигнал Баркера

$$N \in \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13\}$$

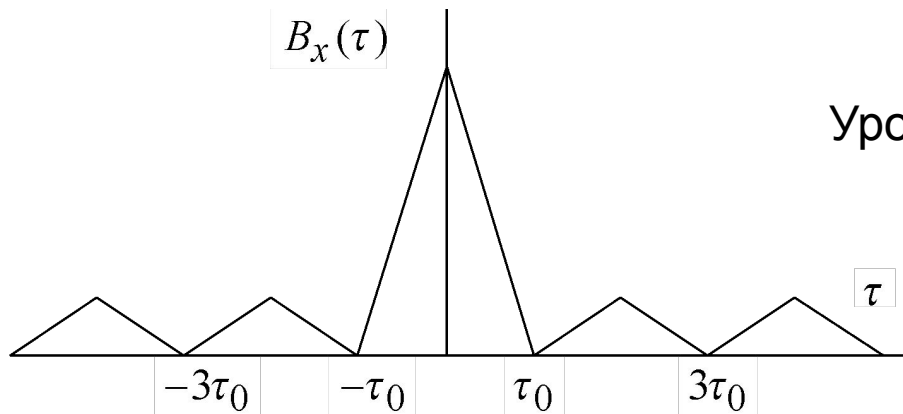


## Последовательности Баркера

2	+1 -1	-1 +1
3	+1 +1 -1	
4	+1 -1 +1 +1	+1 -1 -1 -1
5	+1 +1 +1 -1 +1	
7	+1 +1 +1 -1 -1 +1 -1	
11	+1 +1 +1 -1 -1 -1 +1 -1 -1 +1 -1	
13	+1 +1 +1 +1 +1 -1 -1 +1 +1 -1 +1 -1 +1	

Уровень главного лепестка  $N\tau_0 A^2$

Уровни боковых лепестков в  $N$  раз меньше главного



Для  $m$ -последовательностей длина в принципе не ограничена, но уровень боковых лепестков  $1 / \sqrt{N}$