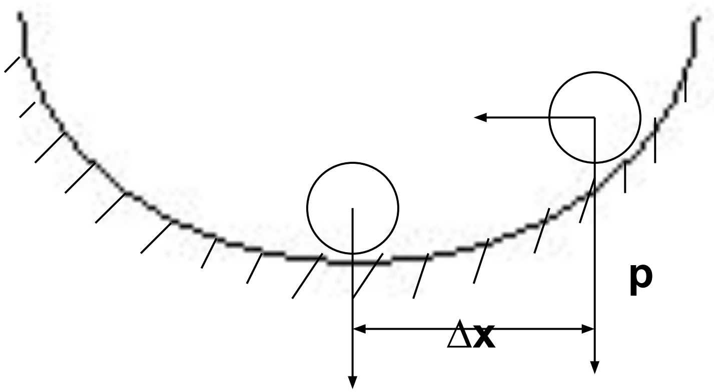
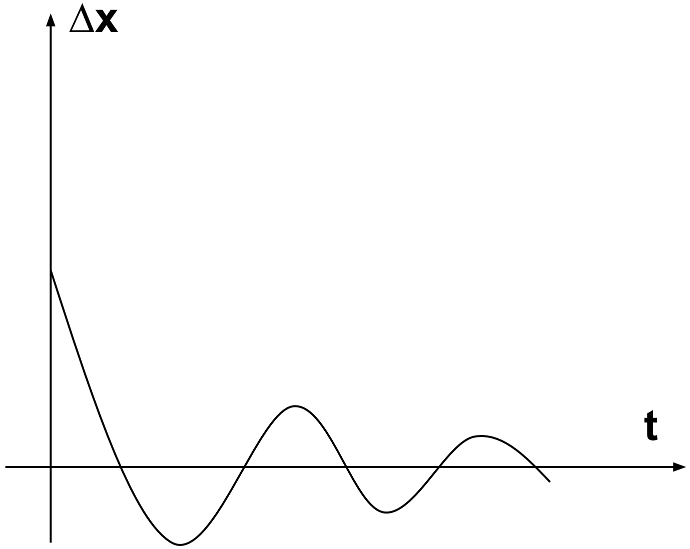
Устойчивость САУ

САУ устойчива если после кратковременного возмущения она возвращается в прежнее или занимает новое устойчивое положение.

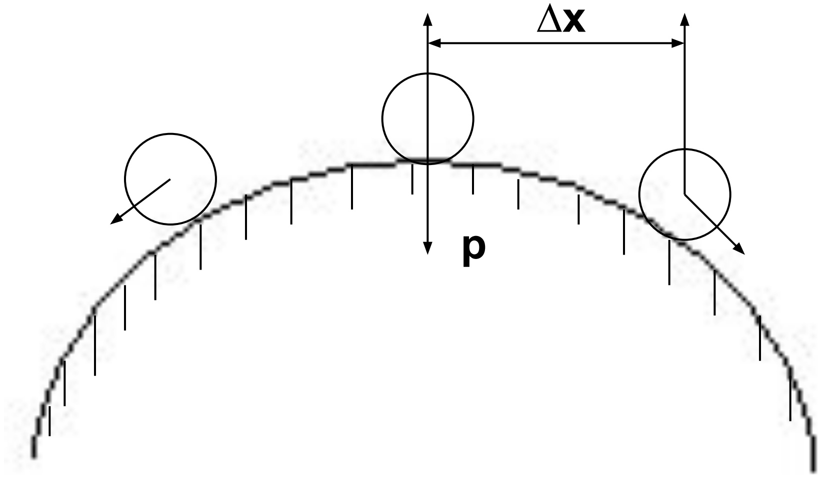
ПРИМЕРЫ

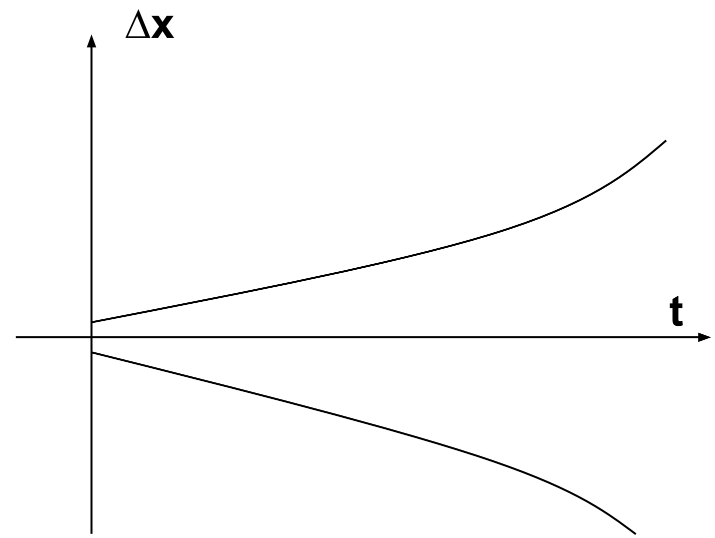
Устойчива



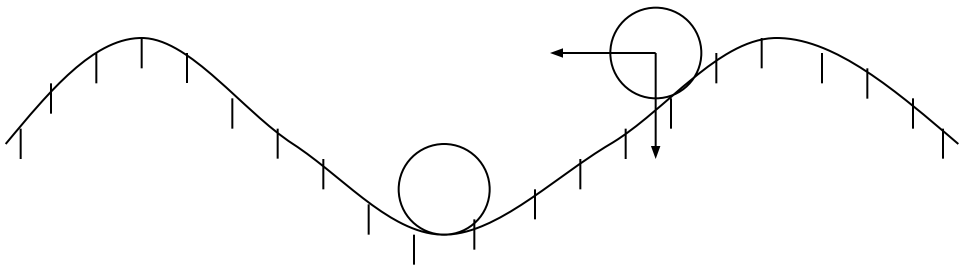


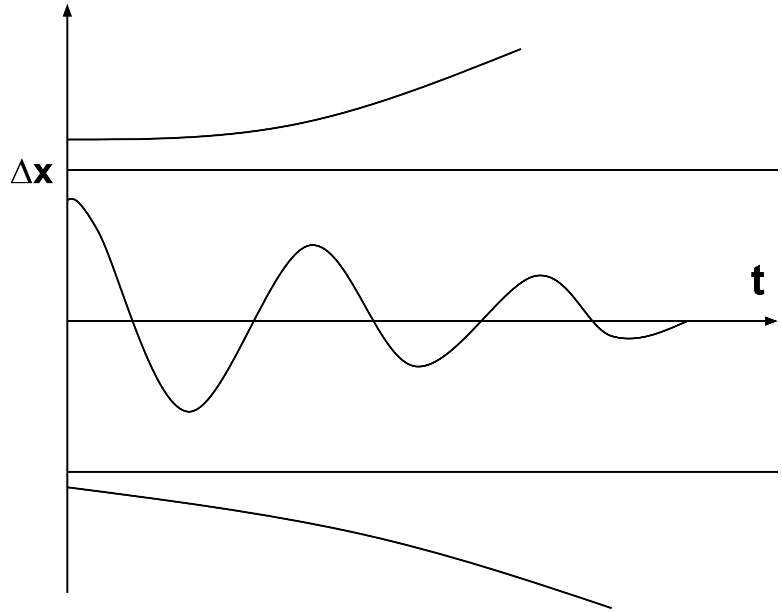
Неустойчива





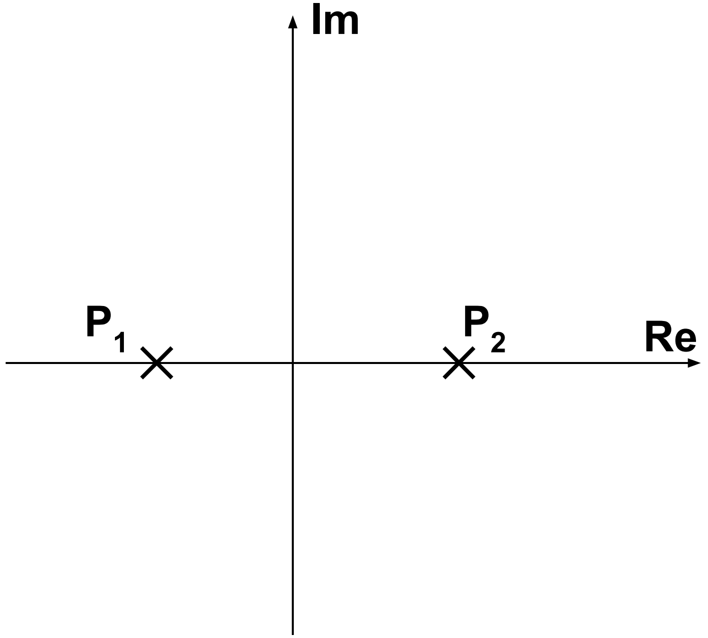
Устойчива “в малом”

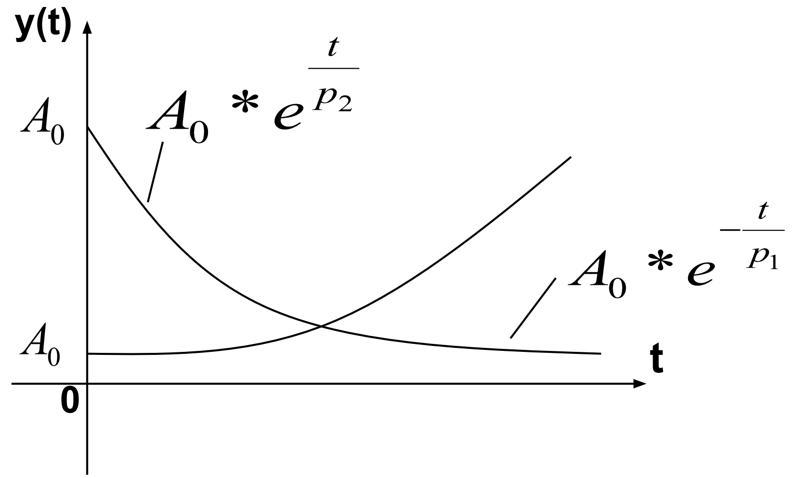




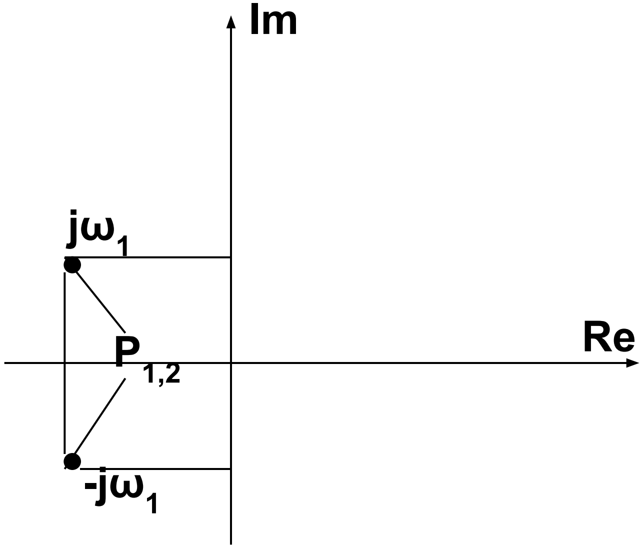
Линейные САУ описываются линейными дифференциальными уравнениями (ДУ). Для решения ДУ следует найти корни его характеристического уравнения:

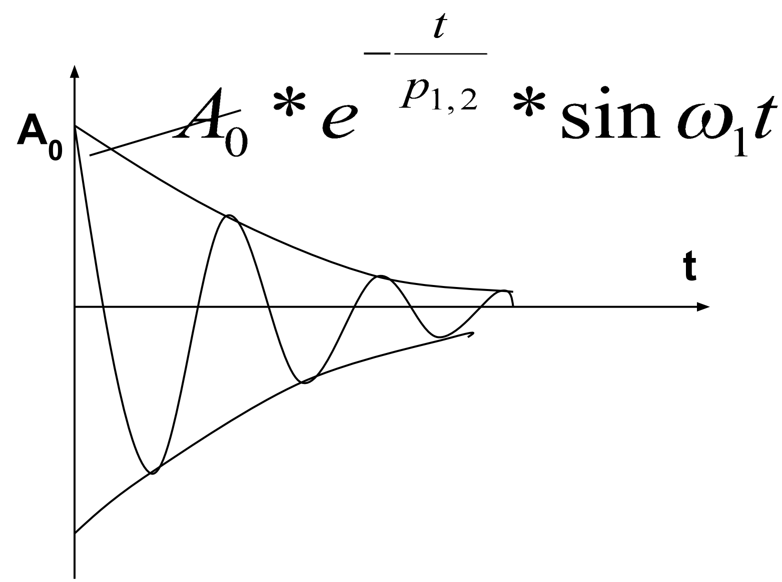
а) Вещественные корни

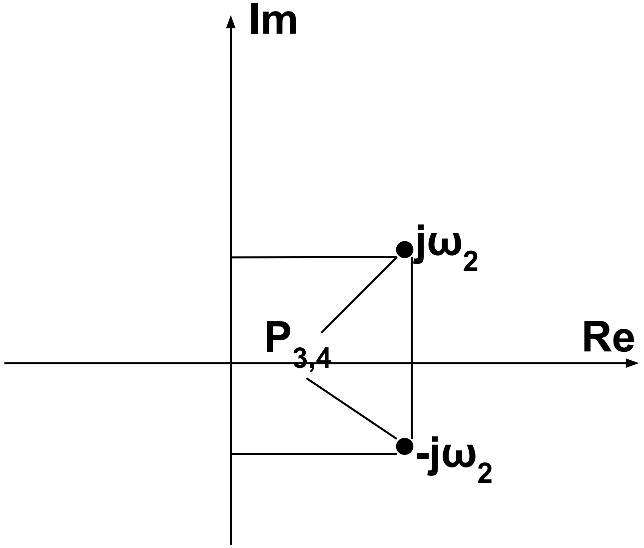




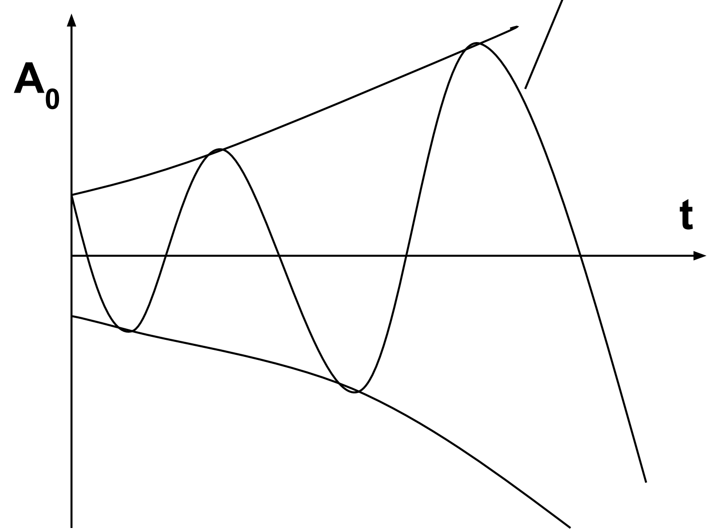
б) Комплексно-сопряженные корни







$$A_0 * e^{-\frac{t}{p_{3,4}}} * \sin \omega_2 t$$



Итак, чтобы САУ была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения находились в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Критерии устойчивости САУ – это некоторые признаки позволяющие не решая характеристического уравнения оценить устойчивость САУ.

ВНИМАНИЕ

- Характеристическое уравнение замкнутой САУ – это знаменатель ее передаточной функции Ф(s) приравненный “0”.
- Характеристическое уравнение разомкнутой САУ - это знаменатель ее передаточной функции $W_p(s)$ приравненный “0”.

А. Алгебраические критерии устойчивости САУ

I. Критерий Гурвица (1895г.).

Пусть дано ХУ замкнутой САУ

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Составим определитель Гурвица из коэффициентов ХУ:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{(2)}$$

Как видно из (2):

- На главной диагонали определителя Гурвица располагаются сверху вниз коэффициенты ХУ начиная со второго.
- Выше элементов главной диагонали выписываются коэффициенты при младших степенях “p” по мере их убывания.
- Ниже элементов главной диагонали выписываются коэффициенты при старших степенях “p” по мере их возрастания.
- Остальные элементы определителя Гурвица равны “0”.

Составим главные диагональные миноры

$\Delta_1 = \mathbf{a_{n-1}}$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

1. Критерий Гурвица:

Для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы при $a_n>0$ все главные диагональные миноры определителя Гурвица были бы положительны.

Примеры

1. $n=1 \quad a_1p+a_0=0$

Условия устойчивости

$a_1>0 \quad \Delta_1=a_0>0$

2. $n=2 \quad a_2p^2+a_1p+a_0=0$

Условия устойчивости

$a_2>0 \quad \Delta_1=a_1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}= a_1a_0>0$$

3. $n=3$ $a_3p3+a_2p^2+a_1p=0$

Условия устойчивости

$a_3>0$ $\Delta_1=a_2>0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} =a_2a_1-a_3a_0>0$$

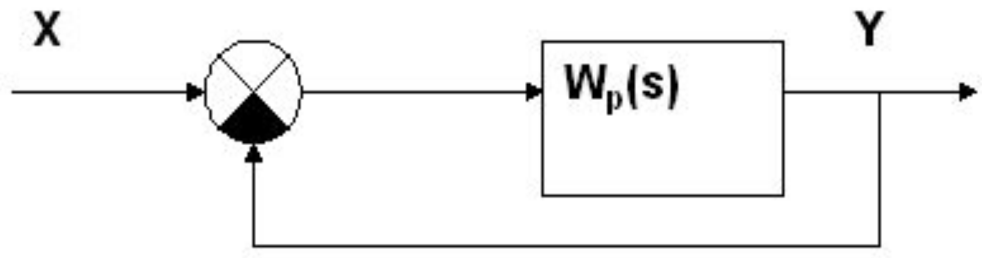
$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}=a_0*\Delta_2>0$$

Недостаток критерия Гурвица

- С увеличением “n” раскрывать определители становится трудно.

Пример для КСР

Пусть дана структура замкнутой САУ



$$w_p(s) = \frac{100}{S(0{,}55+1)(0{,}25+1)(0{,}15+1)}$$

Необходимо с помощью критерия Гурвица определить устойчивость САУ. План исследований:

- 1. Найти передаточную функцию замкнутой САУ.
- 2. Определить ХУ замкнутой САУ и его коэффициенты.
- 3. Составить определитель Гурвица.
- 4. Определить все главные диагональные миноры и оценить устойчивость САУ по критерию Гурвица.

2. Критерий Рауса

Пусть дано ХУ замкнутой САУ “n”–го порядка:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Составим таблицу Рауса из коэффициентов ХУ:

-	$c_{11} = a_n$	$c_{21} = a_{n-2}$	$c_{31} = a_{n-4}$	$c_{41} = a_{n-6}$
-	$c_{12} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{32} = a_{n-5}$	$c_{42} = a_{n-7}$
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{12}}$	$c_{13} = c_{21} - - r_3 * c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3 * c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3 * c_{42}$	…
$r_4 = \frac{c_{12}}{c_{13}}$	$c_{14} = c_{22} - r_4 * c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4 * c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_4 * c_{43}$	…
…	…	…	…	…

Критерий Рауса

Для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительны, т. е.:

$C_{11} > 0 \qquad c_{12} > 0 \qquad \ldots \qquad c_{1,n+1} > 0$

Пример I для КСР

Пусть ХУ замкнутой САУ:

$P^6 + 6p^5 + 21p^4 + 44p^3 + 62p^2 + 52 + 100 = 0$

Необходимо исследовать устойчивость этой системы используя критерий Рауса.

План исследования

1. Составим таблицу Рауса и заполним ее первые две строки.
2. Вычислим последовательно коэффициенты последующих строк.
3. Оценим знаки первого столбца таблицы и устойчивость САУ.

Итак, составим таблицу Рауса

-	$a_6 = 1$	$a_4 = 21$	$a_2 = 62$	$a_0 = 100$
-	$a_5 = 6$	$a_3 = 44$	$a_1 = 52$	0
$r_3 = \frac{1}{6}$	$21 - \frac{44}{6} = 13{,}65$	$62 - \frac{52}{6} = 53{,}3$	100	
$r_4 = \frac{6}{13{,}65}$				

Задание по КСР:

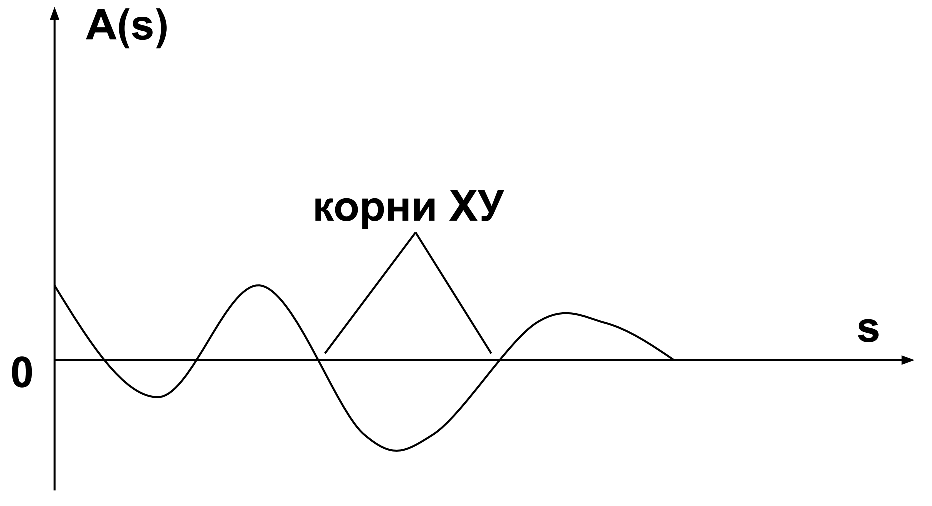
Завершить заполнение таблицы Рауса и оценить устойчивость САУ.

Б. Частотные критерии устойчивости САУ

I. Критерий Михайлова (1938)

Дано ХУ замкнутой линейной САУ:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad (1)$$



Представим полином (1) в виде:

$$A(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n) \qquad (2)$$

Где s_i – корни ХУ

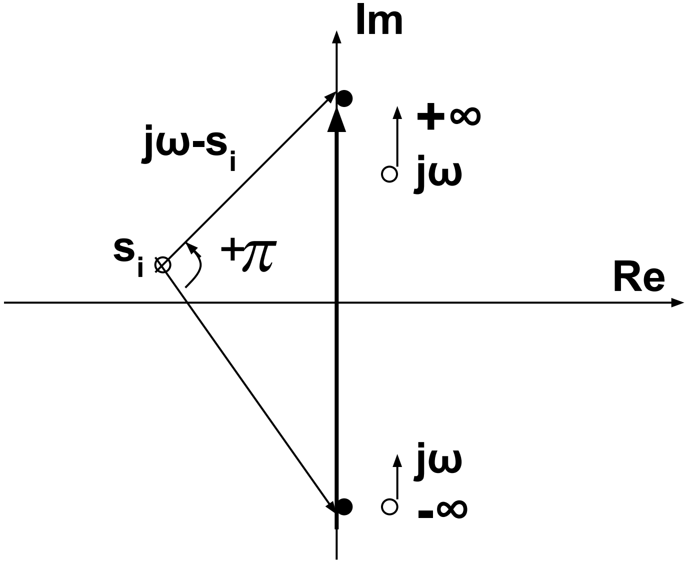
$i = 1, 2 \ldots n$

Положим $s = j\omega$, тогда:

$$A(j\omega) = a_n (j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \ldots (j\omega - s_n) \qquad (3)$$

Каждая из скобок (3) представляет собой вектор, начало которого лежит в т. s_i, а конец находится на мнимой оси $j\omega$. При этом возможно два варианта:

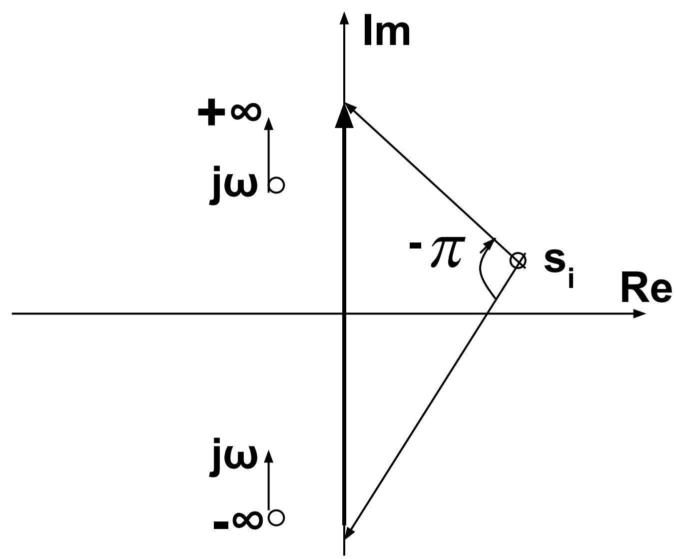
1 – корень лежит в левой полуплоскости



При $-\infty < j\omega < +\infty$

$\Delta \arg (j\omega - s_i) = +\pi$

2-корень лежит в правой полуплоскости



При $-\infty < j\omega < +\infty$

$\Delta \arg (j\omega - s_i) = -\pi$

π

Итак, если ХУ A(s) = 0 содержит L корней в правой полуплоскости, то

$$\underset{-\infty<\omega<+\infty}{\Delta\arg} A(j\omega) = (n-2L)\pi = (n-L)\pi - L\pi$$

Для устойчивости линейной САУ необходимо, чтобы $L = 0$, т.е.:

$$\Delta \arg A(j\omega) = n\pi \qquad (4)$$
$$-\infty < \omega < +\infty$$

$\frac{\pi}{2}$

Критерий Михайлова является графической интерпретацией выражения (4).

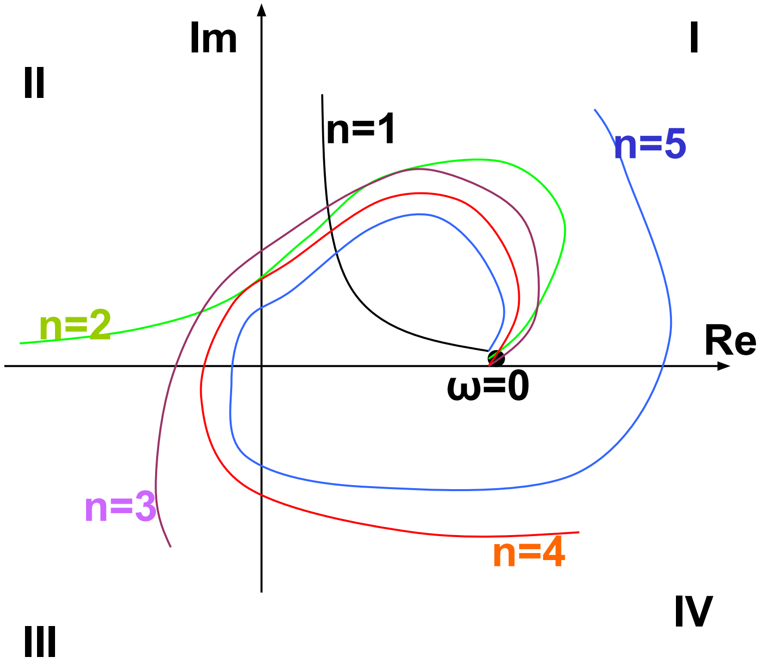
При этом рассматриваются лишь положительные частоты, т.е.:

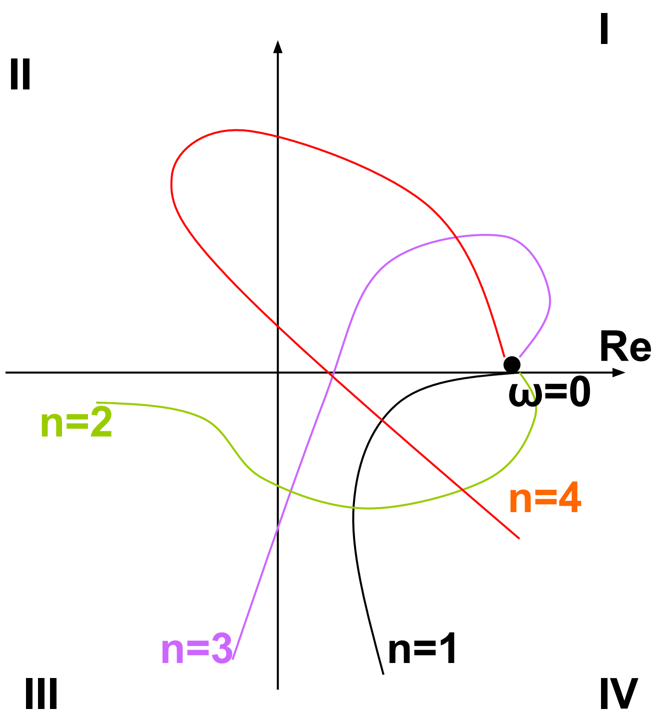
$$\Delta \underset{0 < \omega < +\infty}{\arg} A(j\omega) = n * \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

Критерий Михайлова

Для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова (5) $A(j\omega)$, начинаясь при $\omega = 0$ на действительной оси с ростом “ω” от “0” до “∞” обходил последовательно “n” квадрантов против часовой стрелки (где n – порядок характеристического уравнения).

Системы устойчивы



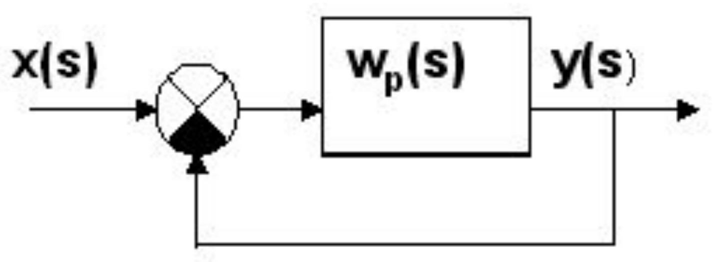


Системы устойчивы

Системы не устойчивы

ПРИМЕР

Определить предельный коэффициент Кпр при котором САУ теряет устойчивость, если ее структура имеет вид:



$$w_p(s) = \frac{K}{(T_1S+1)(T_2S+1)(T_3S+1)} = \frac{K}{D(s)}$$

1. Найдем передаточную функцию замкнутой САУ:

$$\Phi(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{K}{D(s) + K}$$

2. ХУ САУ – это знаменатель ее передаточной функции приравненный к 0 т.е.:

$$A(s) = D(s) + K = 0$$

3. Годограф Михайлова (при $s = j\omega$):

$A(j\omega) = D(j\omega) + К$

$0 < \omega < \infty$

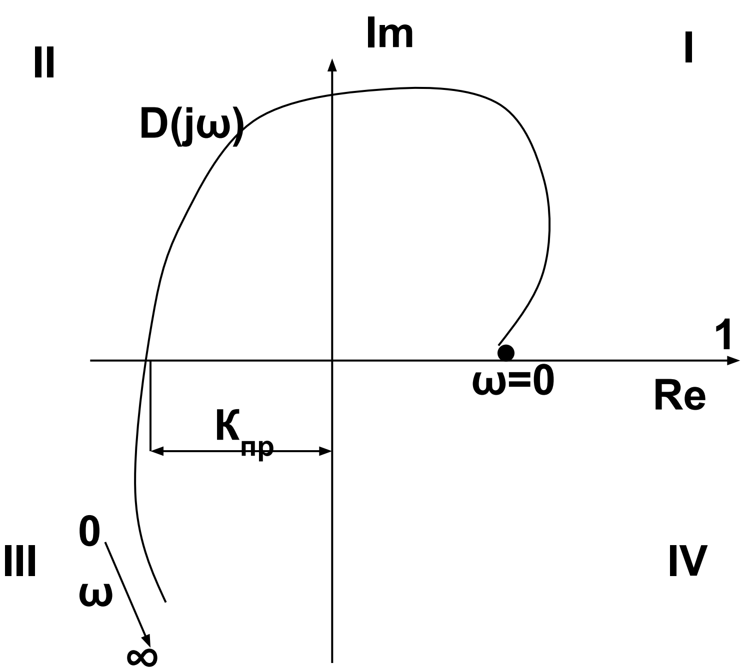
4. Построим, вначале, $D(j\omega)$:

$D(j\omega) = (T_1 j\omega+1)(T_2 j\omega+1)(T_3 j\omega+1) = Re(\omega) + jIm(\omega)$

$Re(\omega) = 1 – (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\omega^2$

$Im(\omega) = (T_1 + T_2 + T_3)\omega – T_1T_2T_3\omega^3$

К$_{пр}$ определим из уравнений



К$_{пр}$ определим из уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(\omega_\pi) = 0 \\ -\mathrm{Re}(\omega_\pi) = K_{np} \end{cases}$$

$$\omega_\pi^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}$$

$$\boxed{K_{np} = \frac{(T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3)(T_1 + T_2 + T_3)}{T_1T_2T_3} - 1}$$

НЕДОСТАТОК критерия Михайлова

Годограф Михайлова не имеет физической сущности (его нельзя получить экспериментально). Между тем при исследовании сложных систем хотелось бы опираться на характеристики получаемые не только аналитически, но и экспериментально.

2. Критерий Найквиста (1932)

Основан на использовании $w_p(s)$, которую можно получить экспериментально.

Пусть: $$W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$ - ПФ разомкнутой САУ

Тогда: $$\Phi(s) = \frac{W_p(s)}{1+W_p(s)} = \frac{M(s)}{M(s)+N(s)}$$ - ПФ замкнутой САУ

Образуем функцию:

$$F(s) = 1 + w_p(s) = \frac{\boxed{M(s) + N(s)}}{\boxed{N(s)}}$$

- ХУ замкнутой САУ
- ХУ разомкнутой САУ

РАССМОТРИМ

1-й случай – разомкнутая САУ устойчива.

Тогда, согласно критерию Михайлова:

$\Delta \arg N(j\omega) = n^*$

$0 < \omega < \infty$ $\qquad \dfrac{\pi}{2}$

Чтобы система и в замкнутом состоянии была устойчива необходимо чтобы:

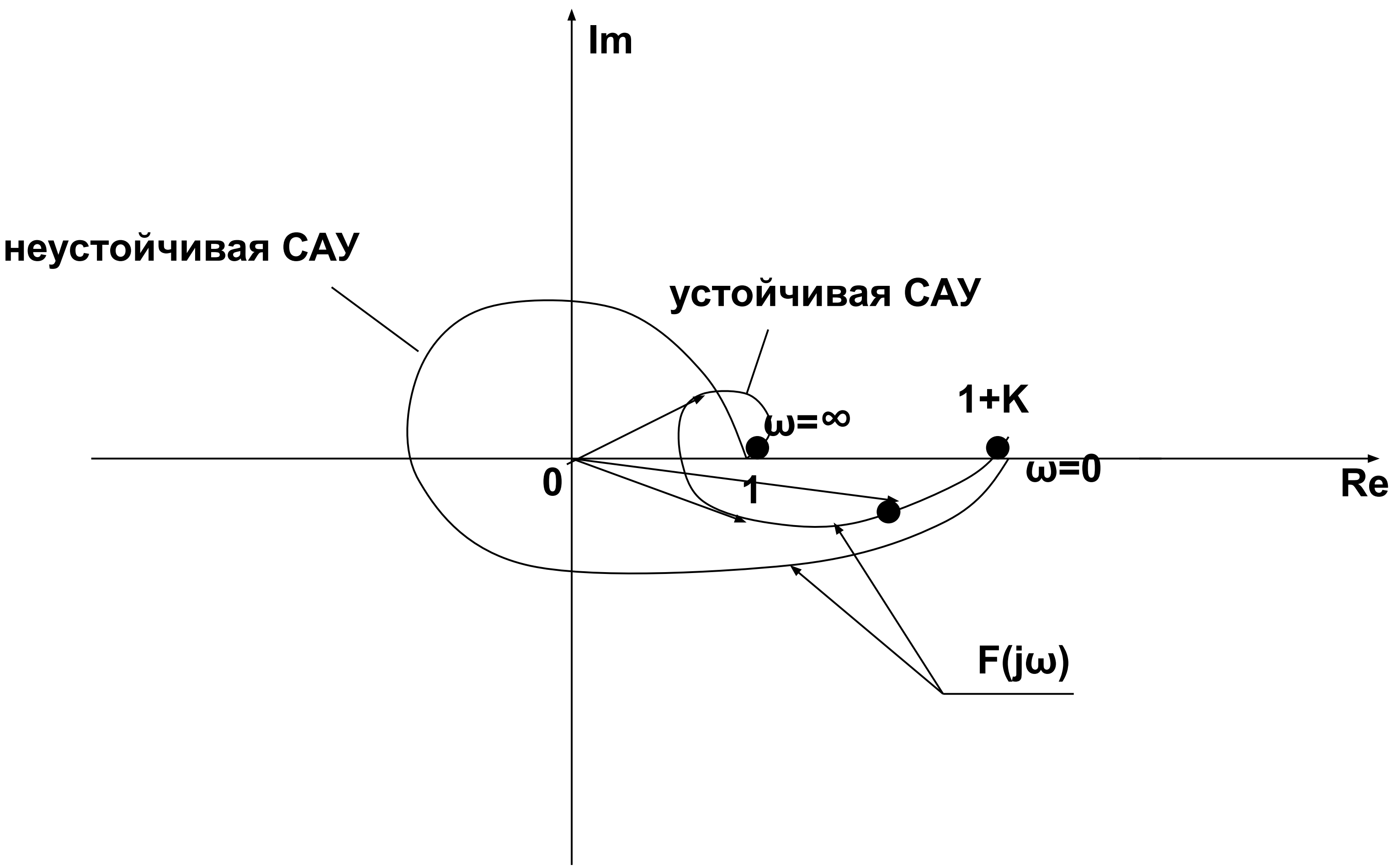
$$\Delta\arg\left[M(j\omega)+N(j\omega)\right]=n*\frac{\pi}{2}$$

$0 < \omega < \infty$

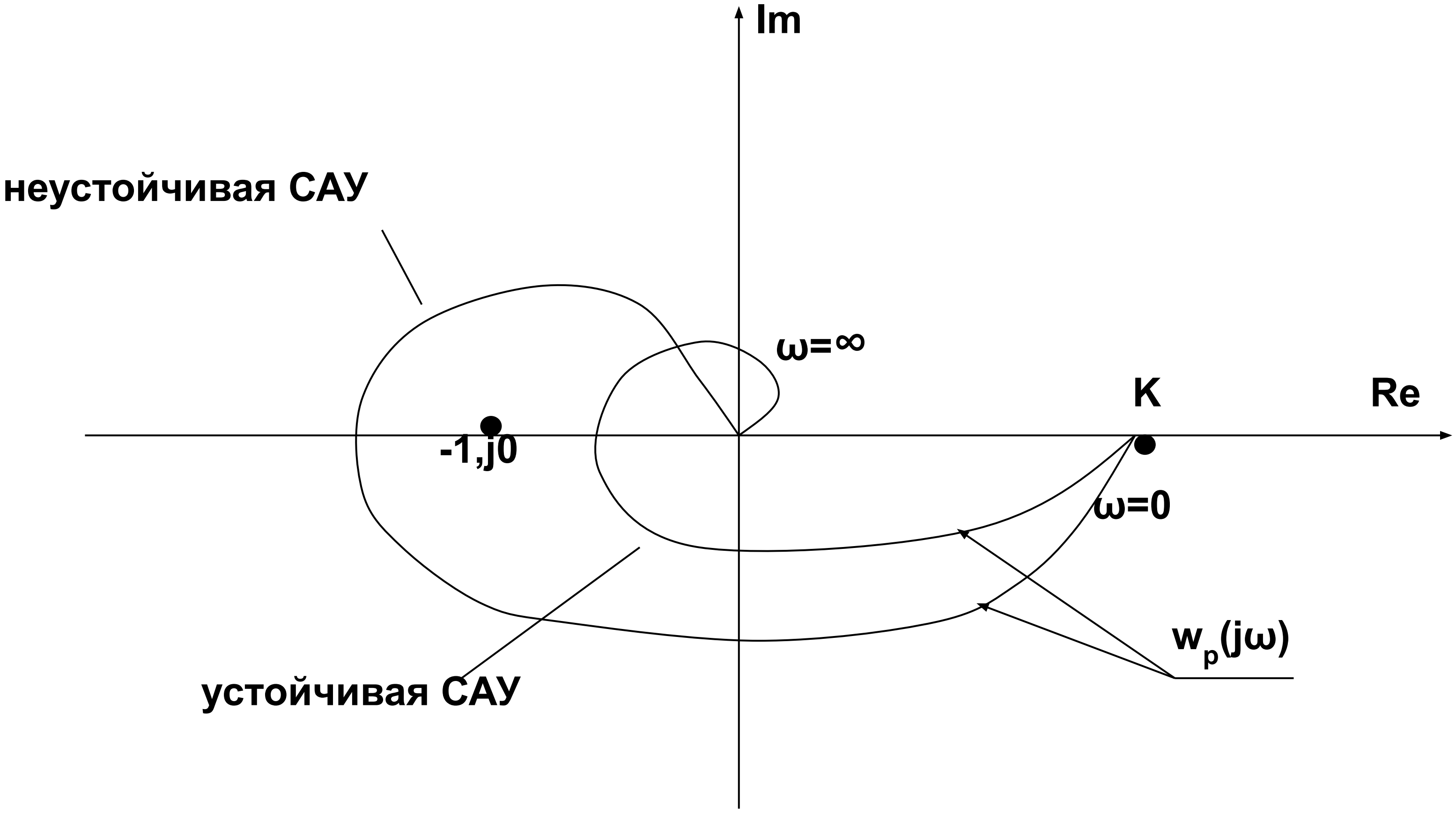
Это значит что: $\Delta\arg F(j\omega) = 0$

$0 < \omega < \infty$

Изобразим F(jω) на комплексной плоскости



Сдвинем теперь F(jω) влево на “1” и получим, таким образом, $w_p(j\omega)$



Критерий устойчивости Найквиста:

Если разомкнутая САУ устойчива, то для ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ $w_p(j\omega)$ при $0<\omega<\infty$ не охватывала точку с координатами (-1; j0).

ПРИМЕР

Найти, используя критерий Найквиста, предельный коэффициент Кпр при котором САУ потеряет устойчивость если:

$$W_p(s) = \frac{K}{(T_1S+1)(T_2S+1)(T_3S+1)}$$

По критерию Найквиста САУ находится на границе устойчивости если:

$$\frac{K_{np}}{(T_1 j\omega_\pi + 1)(T_2 j\omega_\pi + 1)(T_3 j\omega_\pi + 1)} = -1 = \frac{K_{np}}{\mathrm{Re}(\omega_\pi) + j\,\mathrm{Im}(\omega_\pi)}$$

Полагая Im(ω_π) = 0 найдем:

$$\omega_\pi^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}$$

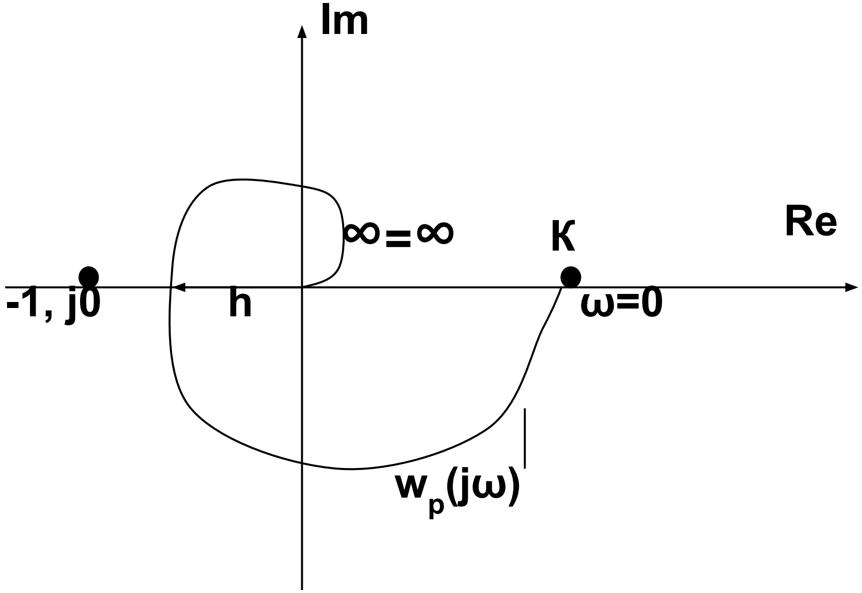
Подставив ω_{π}^{2} в Re(ω_{π}) найдем:

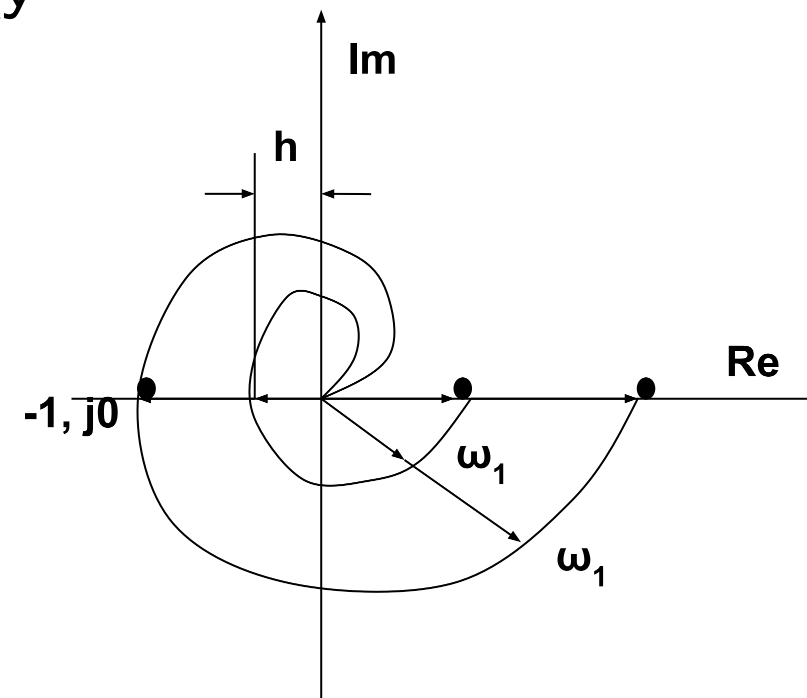
$$K_{np} = \frac{(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3)}{T_1T_2T_3} - 1$$

Т.е. результат такой же, как и при использовании критерия Михайлова.

Запасы устойчивости САУ – это количественные оценки степени устойчивости систем. Удобнее всего такие оценки (запасы) получить используя критерий Найквиста

Рассмотрим АФЧХ устойчивой САУ





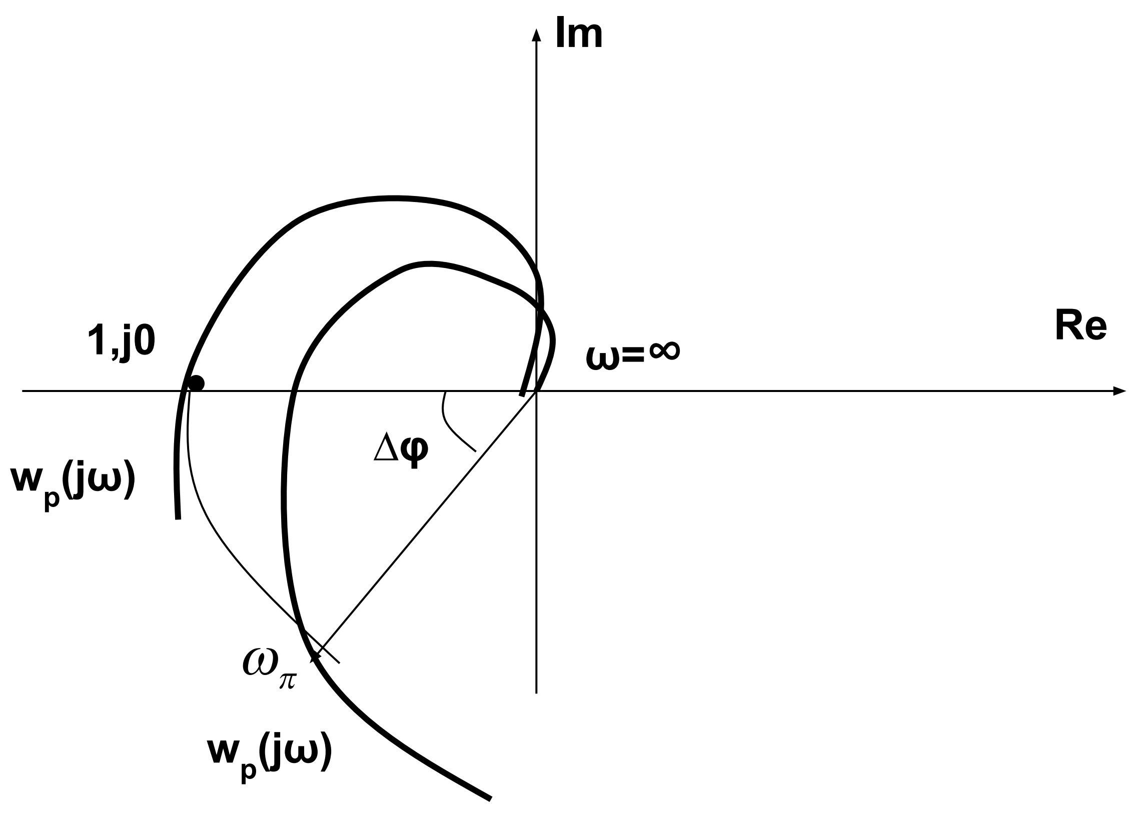
$W_p(j\omega)$ при $0<\omega<\infty$ не охватывает т.(-1, j0). Следовательно САУ устойчива.

САУ может потерять устойчивость по двум причинам:

а) <u>увеличения</u> К без изменения фаз - все вектора $w_p(j\omega)$ увеличиваются и когда-нибудь САУ станет неустойчивой. Очевидно, что увеличивать К можно в $\frac{1}{h}$ раз т.ч.

$\boxed{\Delta A = \frac{1}{h}}$ - запас устойчивости САУ по амплитуде.

б) <u>увеличения</u> $\varphi(\omega)$ без изменения К – все вектора характеристики $w_p(j\omega)$ поворачиваются по часовой стрелке на некоторые углы $\Delta\varphi$. На рисунке видно на какой угол $\Delta\varphi$ можно повернуть $w_p(j\omega)$ прежде чем САУ потеряет устойчивость.



Проводя окружность радиусом “1” можно найти ту точку ω_π, которая попадет в точку (-1; j0) если на частоте ω_π $\varphi(\omega_\pi)$ увеличится на угол $\Delta\varphi$.

Следовательно $\Delta\varphi$ – запас устойчивости САУ на фазе.

Итак, существуют две количественные оценки степени устойчивости САУ

1) Запас “по амплитуде” - ΔA= $\frac{1}{h}$

2) Запас “по фазе” - $\Delta\varphi$

Недостаток частотных критериев устойчивости – сложно строить кривые A(jω) и $w_p(j\omega)$

Анализ устойчивости САУ по логарифмическим характеристикам

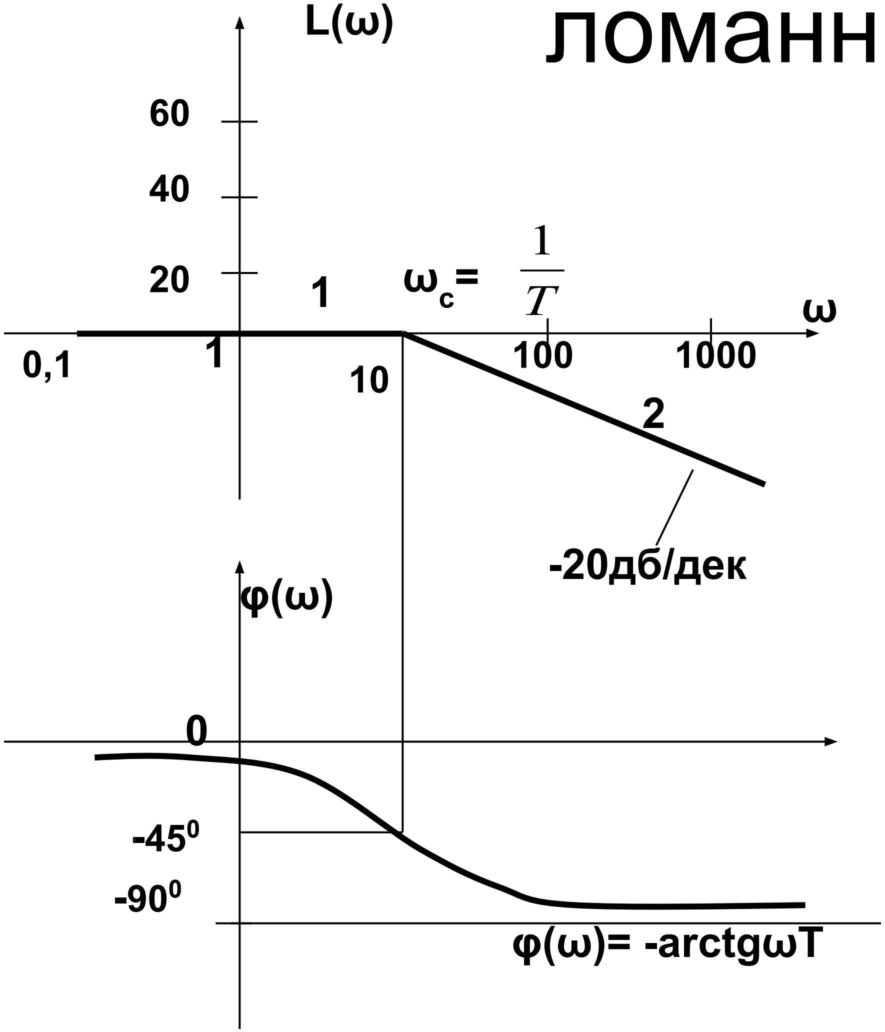
АФЧХ можно построить в логарифмическом масштабе в виде двух характеристик:

$L(\omega)$ – логарифмической амплитудной частотной характеристики

$\varphi(\omega)$ – фазовой частотной характеристики.

Тогда анализ устойчивости заметно упрощается. Особенно просто строятся т.н. асимптотические $L(\omega)$ – в виде кусочно-прямолинейных характеристик.

РАССМОТРИМ вначале два элемента таких кусочно-ломанных L(ω)



Пусть:

$$W(s) = \frac{1}{TS+1}$$

Тогда:

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T+1}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg 1 - 20\lg\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

Пусть:

$$W(s) = \frac{1}{TS + 1}$$

Тогда:

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg 1 - 20\lg\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

Приближенно:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg 1 = 0 & \text{при } \omega < \frac{1}{T} \\ 20\lg 1 - 20\lg \omega T & \text{при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

Итак L(ω) состоит из двух прямых (асимптот):

1 – совпадающей с осью ω при ω < $\frac{1}{T}$

2 – имеющей наклон –20 дб/дек при ω > $\frac{1}{T}$

Частота $\omega = \frac{1}{T} = \omega_c$ называется сопрягающей.

На сопрягающей частота $\omega_c = \frac{1}{T}$

$\varphi(\omega) = -\ arctg1 = -45^0$

При $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi(\omega) = -arctg\infty \rightarrow -90^0$

$\omega \rightarrow 0$ $\varphi(\omega) = -arctg0 \rightarrow 0^0$

Итак, чтобы построить $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для этого элемента – $w(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega T + 1}$ нужно:

1. Найти сопрягающую частоту:
2. Вдоль оси ω построить участок 1 для

$$\omega < \omega_c$$

3. Построить участок 2 с наклоном -20 дб/дек для

$$\omega < \omega_c$$

4. По формуле $\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega T$
   задаваясь разными частотами $0 < \omega < \infty$ построить фазовую частотную характеристику $L(\omega)$

Пусть теперь:

$$W(s) = TS + 1$$

Тогда:

$$W(j\omega) = j\omega T + 1$$

$$A(\omega) = \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

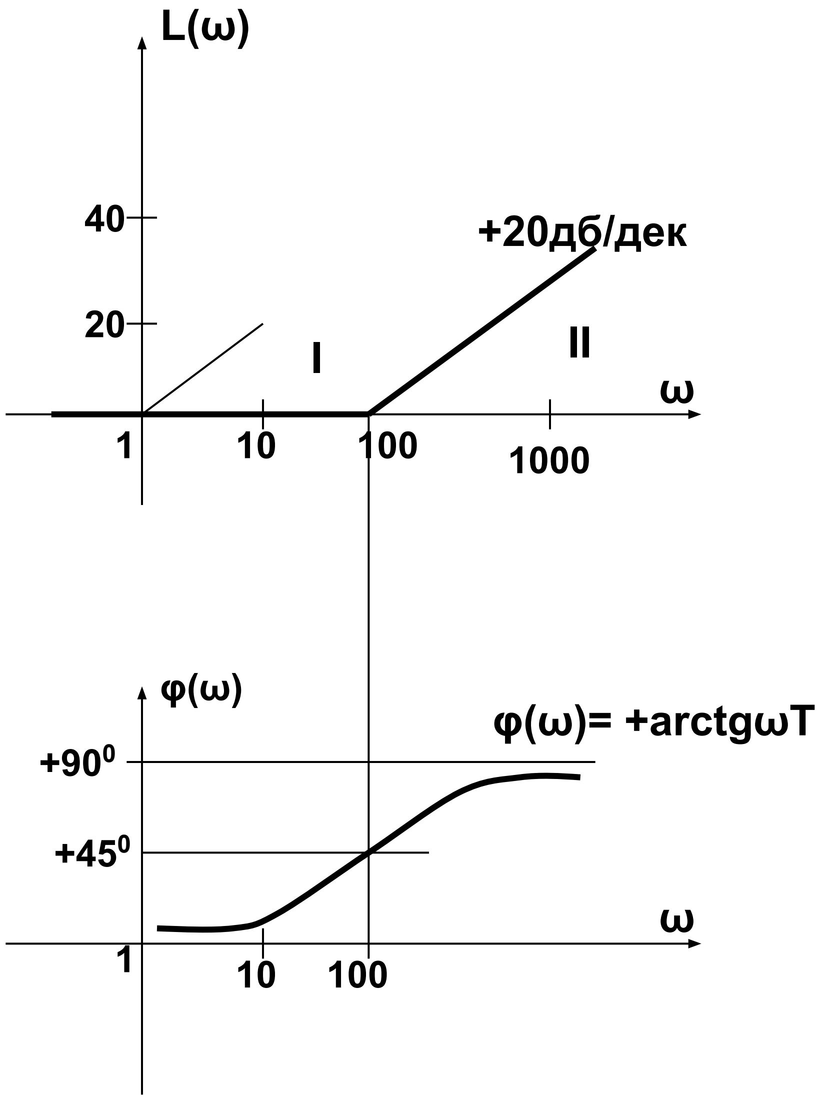
Приближенно:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg 1 = 0 & \text{при } \omega < \frac{1}{T} \\ 20\lg \omega T & \text{при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

Т.О. и здесь L(ω) состоит из двух участков:

1 – вдоль оси ω до $\omega \le \omega_c = \frac{1}{T}$

2 – с наклоном +20дб/дек при $\omega > \frac{1}{\mathrm{T}}$



L(ω)
40
+20дб/дек
20
I
II
ω
1
10
100
1000
φ(ω)
φ(ω)= +arctgωT
+90⁰
+45⁰
ω
1
10
100

Построение асимптотических **L(ω)** и **φ(ω)** для сложных САУ.

Пусть например:

$$w_p(s) = \frac{100\,(0,1S+1)}{S(S+1)(0,01S+1)}$$

Заменив S→jω получим амплитудно-фазовые частотные характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{100(0,1j\omega+1)}{j\omega(j\omega+1)(0,01j\omega+1)}$$

Представим последнюю характеристику в виде произведения характеристик элементарных звеньев:

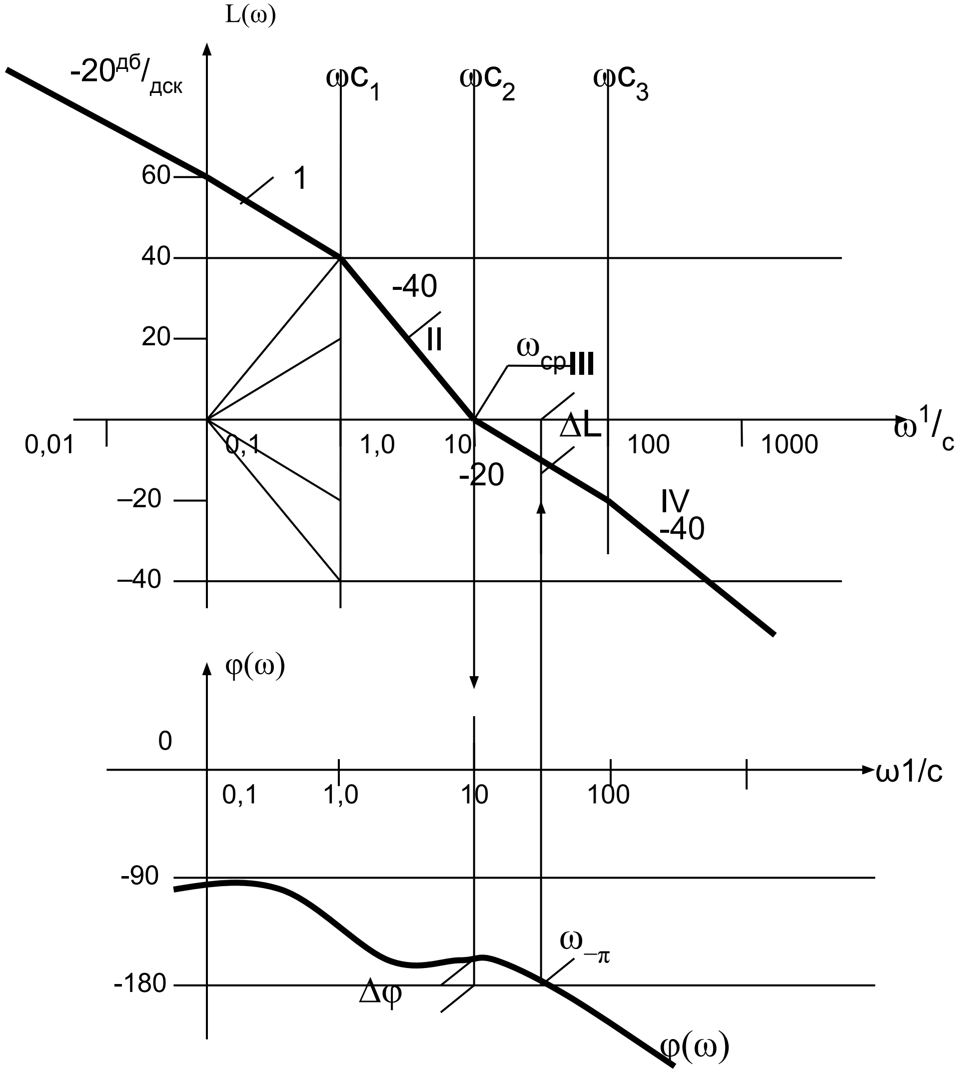
$$w(j\omega) = \underbrace{\frac{100}{j\omega}}_{1\text{интегратор}} * \underbrace{\frac{1}{j\omega + 1}}_{2\text{инерционное звено}} * \underbrace{(0{,}1\,j\omega + 1)}_{3\text{дифференцирующее звено}} * \underbrace{\frac{1}{0{,}01\,j\omega + 1}}_{4\text{инерционное звено}}$$

Определим сопрягающие частоты:

$$w_{c1} = 1\ {}^{1}\!/_{c}$$

$$w_{c2} = \frac{1}{0{,}1}\ {}^{1}\!/_{c}$$

$$w_{c3} = \frac{1}{0{,}01}\ {}^{1}\!/_{c}$$



Построим участок 1:

$W(i\omega) = 100/j\omega$

$A(\omega)= 100/\omega$

$L(\omega)= 20 \lg 100 – 20 \lg \omega$

При $\omega=1$

$L(\omega)= 20 \lg 100= 40^{дб}/_{дск}$

Построив участок 1 до $\omega = \omega_{c1}$, строим участок II. Изменив наклон на $-20^{дб}/_{дск}$ (т.к. скобка **($j\omega$+1)** - в знаменателе!!!).

Участок II продляем до $\omega = \omega c_2$ с наклоном $-40^{дб}/_{дск}$.

На $\omega \geq \omega_{c2}$ снова изменяем наклон, но уже на $+20^{дб}/_{дск}$, т.к. скобка **(0,1S+1)** стоит в числителе **Wp(S)**. Т.о. на участке III наклон снова становится $-20^{дб}/_{дск}$ до частоты $\omega = \omega c_3$. На частоте ωc_3 наклон участка IV снова равен $-40^{дб}/_{дск}$, т.к.скобка **(0,01S+1)** стоит в знаменателе **Wp(S)**

Фазовая характеристика **φ(ω)** САУ

складывается из фазовых характеристик отдельных звеньев **Wp(S)**:

- $\boldsymbol{\varphi(\omega) = -90^\circ - (\mathrm{arctg}\,1\omega) + (\mathrm{arctg}\,0{,}1\omega) - (\mathrm{arctg}\,0{,}01\omega)}$

Для ее построения удобно построить таблицу

	$\omega_1=1$	$\omega_2=10$	$\omega_3=100$	ω_4	ω_5
φ_1	-90	-90	-90	-90	-90
φ_2	-45	-	-	-	-
φ_3	+	-45	+	+	+
φ_4	-	-	-45	-	-
φ					

Фазовая характеристика строится по точкам под амплитудной,
причем масштаб по оси “ω” тот же.

- Об устойчивости САУ судят по расположению точек пересечения $\mathbf{L(\omega)}$ оси частот $\boldsymbol{\omega_{ср}}$ –частота среза и $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$ оси -180°.

Критерий устойчивости по ЛАЧХ

- Для устойчивости линейных САУ необходимо и достаточно, чтобы:

$$\boldsymbol{\omega_{ср} < \omega_{-\pi}}$$

- Логарифмические характеристики позволяют определить запасы устойчивости:

Δ**L (дб)** – запасы по амплитуде

Δ**φ (град) –** запас по фазе

как это показано на рисунке.