

# ЛЕКЦИЯ 6

---

# Переходные процессы в линейных электрических цепях

В электрических цепях возможны включения и отключения отдельных ветвей, короткие замыкания участков цепи, различного рода переключения. Любые изменения в электрических цепях можно представить в виде переключений или коммутаций. Характер коммутации указывается в схеме с помощью рубильника со стрелкой. По направлению стрелки можно судить, замыкается или размыкается рубильник.

***При коммутации в цепи возникают переходные процессы, т.е. процессы перехода токов и напряжений от одного установившегося значения к другому.***

Изменения токов и напряжений вызывают одновременное изменение энергии электрического и магнитного полей, связанных с элементами цепи - емкостями и индуктивностями.

Однако энергия электрического поля и энергия магнитного поля могут изменяться только непрерывно, так как скачкообразное изменение потребовало бы от источника бесконечно большой мощности. На этом рассуждении основаны законы коммутации.

**Первый закон.** В любой ветви с индуктивностью ток не может изменяться скачком и в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел непосредственно перед моментом коммутации

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

где  $i_L(0_+)$  - ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации, сразу после коммутации. Знак "+" в формуле обычно не записывается. Время переходного процесса отсчитывается от момента коммутации;

$i_L(0_-)$  - ток в индуктивности непосредственно перед коммутацией.

**Второй закон.** Напряжение на емкости сразу после коммутации сохраняет то значение, которое оно имело непосредственно перед моментом коммутации.

$$u_L(0_+) = u_L(0_-),$$

где  $u_C(0_+)$  - напряжение на емкости в момент коммутации;

$u_C(0_-)$  - напряжение на емкости непосредственно перед моментом коммутации.

## *Допущения, применяемые при анализе переходных процессов:*

1. Полагают, что переходный процесс длится бесконечно большое время.
2. Считают, что замыкание и размыкание рубильника происходит мгновенно, без образования электрической дуги.
3. Принимают, что к моменту коммутации предыдущие переходные процессы в цепи закончились.

Свободный ток определяют по формуле:

$$i_{CB}(t) = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} + \dots$$

Количество слагаемых в формуле равно числу реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в схеме.

$P_1, P_2$  - корни характеристического уравнения.

$A_1, A_2$  - постоянные интегрирования, определяются с помощью начальных условий.

**Начальные условия** - это переходные токи и напряжения в момент коммутации, в момент времени  $t$ , равный нулю.

Начальные условия могут быть **независимыми** или **зависимыми**.

В соответствии с **классическим методом расчета**, переходный ток в ветви схемы представляют в виде суммы принужденного и свободного токов.

$$i(t) = i_{\text{ПР}}(t) + i_{\text{СВ}}(t)$$

где  $i_{\text{ПР}}(t)$  - принужденный ток, определяется в установившемся режиме после коммутации. Этот ток создается внешним источником питания.

Если в цепь включен источник постоянной ЭДС, принужденный ток будет постоянным, если в цепи действует источник синусоидальной ЭДС, принужденный ток изменяется по периодическому, синусоидальному закону;

$i_{\text{СВ}}(t)$  - свободный ток, определяется в схеме после коммутации, из которой исключен внешний источник питания.

Свободный ток создается внутренними источниками питания: ЭДС самоиндукции индуктивности или напряжением заряженной емкости.

**Независимыми** называют начальные условия, подчиняющиеся законам коммутации, законам постепенного, непрерывного изменения.

Это напряжение на емкости  $u_C(0)$  и ток в ветви с индуктивностью  $i_C(0)$  в момент коммутации.

Остальные начальные условия: напряжение и ток в ветви с сопротивлением  $u_R(0)$  и  $i_R(0)$ , напряжение на индуктивности  $u_C(0)$ , ток в ветви с емкостью  $i_C(0)$  - это **зависимые начальные условия**.

Они не подчиняются законам коммутации и могут изменяться скачком.



# Переходные процессы в цепях одним реактивным элементом

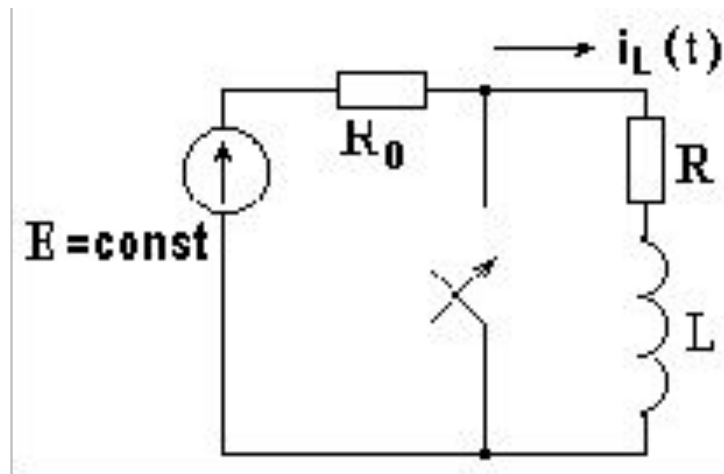
## *Короткое замыкание в R-L цепи*

На рисунке 1 изображена электрическая цепь, в которой включен источник постоянной ЭДС.

В результате коммутации рубильник замыкается и образуется замкнутый на себя контур.

До коммутации по индуктивности протекал ток .

Этот ток создавал постоянное магнитное поле в индуктивной катушке .



• Определим закон изменения тока в индуктивности после коммутации.

В соответствии с классическим методом:

$$i(t) = i_{L_{ПП}}(t) + i_{L_{СВ}}(t) = i_{L_{ПП}}(t) + Ae^{Pt}$$

Принужденный ток после коммутации замыкается через рубильник, имеющий нулевое сопротивление, и через индуктивность не протекает.

Индуктивный ток имеет только свободную составляющую:

$$i_{L_{ПП}} = 0, \quad i_L(t) = 0 + i_{L_{СВ}}(t) = i_{L_{СВ}}(t)$$

Магнитное поле, исчезая, индуцирует в индуктивной катушке ЭДС самоиндукции.

Свободный ток в  $R - L$  контуре существует за счет этой электродвижущей силы.

Запишем уравнение для свободного тока в контуре, используя второй закон Кирхгофа:

$$i_{LCB} \cdot R + L \frac{di_{LCB}}{dt} = 0 \quad (1)$$

Ищем решение этого уравнения в виде экспоненты:

$$i_{LCB} = Ae^{Pt}$$

Производная:

$$\frac{di_{LCB}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt} \quad .$$

Подставим значения свободного тока и производной тока в уравнение (1):

$$A \cdot R \cdot e^{Pt} + L \cdot A \cdot P \cdot e^{Pt} = Ae^{Pt} (R + P \cdot L) = R + L \cdot P = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2), полученное из уравнения (1), называется **характеристическим**.

$P = -R/L$  - корень характеристического уравнения;

$\tau = -\frac{1}{P} = \frac{L}{R}$  - постоянная времени переходного процесса, измеряется в секундах.

**Постоянная времени  $\tau$**  - это интервал времени, за который переходный ток уменьшается в  $e$  раз.

$$i_{LCB} = A \cdot e^{-R/Lt} = A \cdot e^{-t/\tau}$$

Постоянную интегрирования  $A$  определяем с помощью начального условия.

В соответствии с первым законом коммутации,

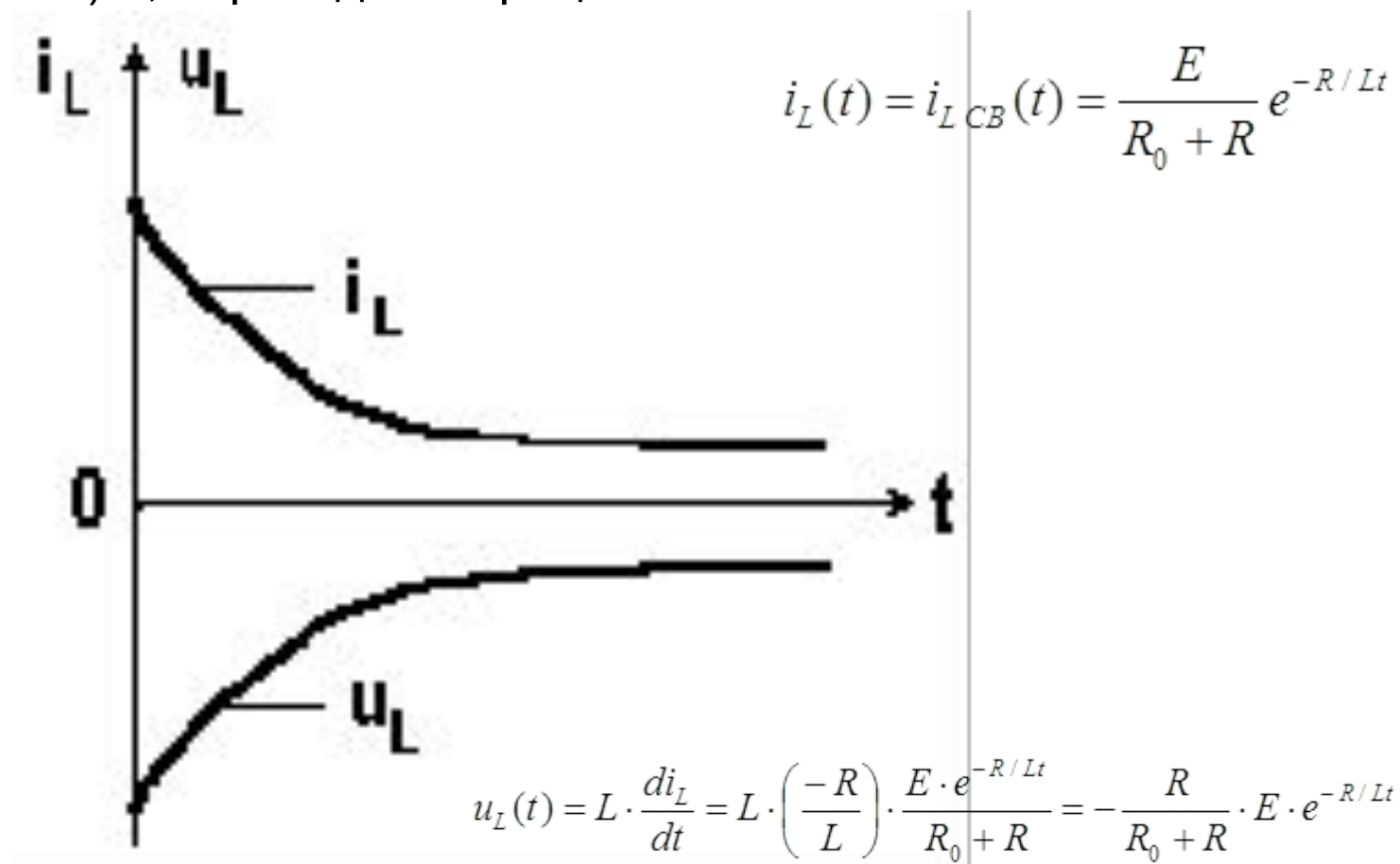
$$i_L(0) = i_{LCB}(0) = A = i_L(0_-) = \frac{E}{R_0 + R}$$

Получим:  $i_L(t) = i_{LCB}(t) = \frac{E}{R_0 + R} e^{-R/Lt}$ .

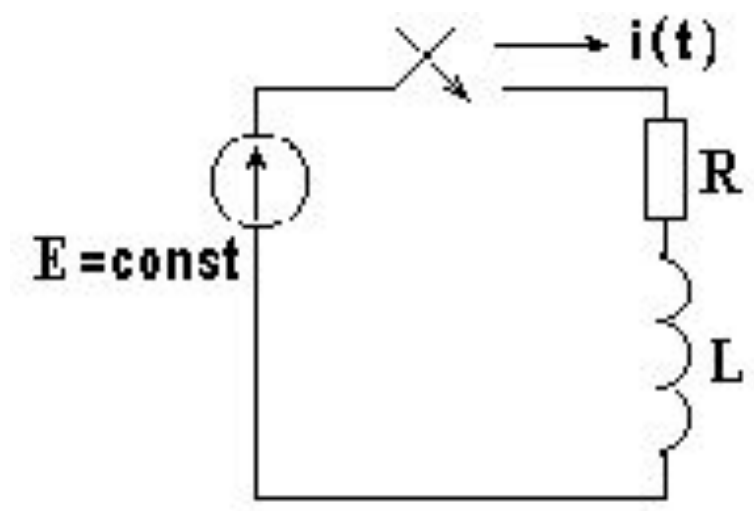
Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \left( \frac{-R}{L} \right) \cdot \frac{E \cdot e^{-R/Lt}}{R_0 + R} = -\frac{R}{R_0 + R} \cdot E \cdot e^{-R/Lt}$$

На рисунке изображены кривые переходного тока в ветви с индуктивностью и переходного напряжения на индуктивности. Переходный ток и напряжение по экспоненте стремятся к нулю. В инженерных расчетах полагают, что через интервал времени, равный  $(4 \div 5) \tau$ , переходный процесс заканчивается.



## Подключение R-L цепи к источнику постоянной ЭДС



В схеме на рисунке 2 до коммутации рубильник разомкнут. В результате коммутации рубильник замыкается и подключает  $R - L$  цепь к источнику постоянной ЭДС. Определим закон изменения тока  $i(t)$ .

$$i(t) = i_{\text{ПР}} + i_{\text{СВ}}(t) = i_{\text{ПР}} + Ae^{Pt}$$

Принужденный ток в установившемся режиме после коммутации:

$$i_{\text{ПР}} = \frac{E}{R}.$$

В свободном режиме из схемы исключен внешний источник питания. Схема на рис. 2 без источника ЭДС ничем не отличается от схемы на рис.1.

Свободный ток определяется по формуле:

$$i_{LCB} = A \cdot e^{-R/Lt} .$$

Запишем значение переходного тока для момента коммутации, ( $t = 0$ ).

$$i(0) = i_{\text{ПР}} + i_{CB}(0) = i_{\text{ПР}} + A ,$$

откуда

$$A = i(0) - i_{\text{ПР}} .$$



До коммутации рубильник был разомкнут, и ток в схеме отсутствовал. Сразу после коммутации ток в индуктивности остается равным нулю.

$$i(0) = i(0_-) = 0 .$$

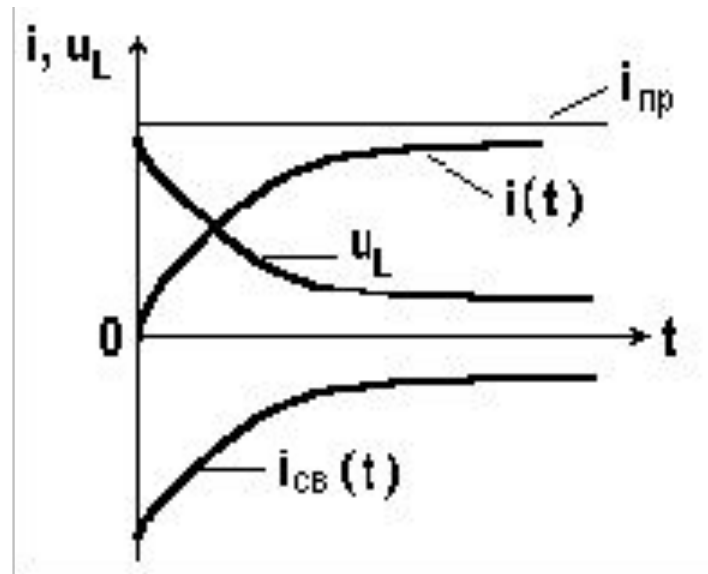
$$A = 0 - i_{\text{ПР}} = -i_{\text{ПР}} = -\frac{E}{R} .$$

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-R/Lt} = \frac{E}{R} (1 - e^{-R/Lt}) .$$

Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -L \left( -\frac{R}{L} \right) \frac{E}{R} e^{-R/Lt} = E \cdot e^{-R/Lt} .$$

На рисунке 3 изображены кривые переходного, принужденного, свободного токов и переходного напряжения на индуктивности.



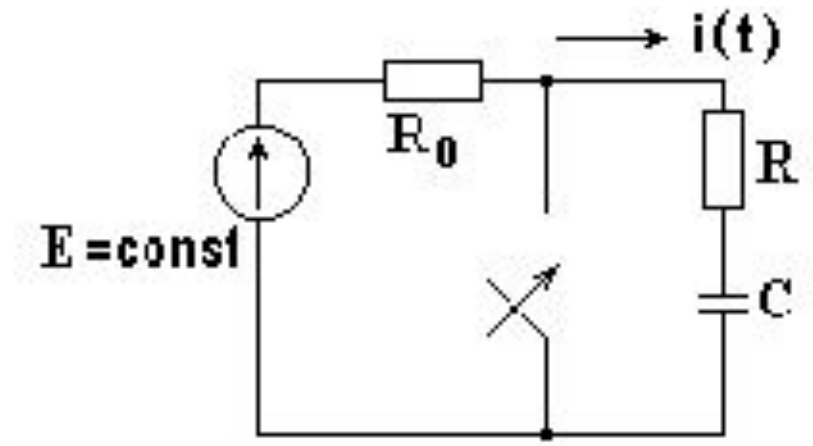
Свободный ток и напряжение на индуктивности плавно уменьшаются до нуля.

В момент коммутации свободный и принужденный токи одинаковы по абсолютной величине.

Переходный ток начинается при включении с нуля, затем возрастает, приближаясь к установившемуся постоянному значению.

# Переходные процессы в цепях одним реактивным элементом

## Короткое замыкание в R-C цепи



В схеме в результате коммутации рубильник замыкается, и образуется замкнутый на себя  $R - C$  контур.

До коммутации емкость полностью зарядилась до напряжения, равного ЭДС источника питания, то есть  $u_C(0_-) = E$

После коммутации емкость полностью разряжается, следовательно, принужденный ток в  $R - C$  цепи и принужденное напряжение на конденсаторе равны нулю.

В цепи существует только свободный ток за счет напряжения заряженного конденсатора.

Запишем для  $R - C$  контура уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$u_{C_{CB}} + R \cdot i_{CB} = 0$$

Ток через конденсатор:  $i_{CB} = C \frac{du_{C_{CB}}}{dt}$

Получим дифференциальное уравнение

$$u_{C_{CB}} + R \cdot C \frac{du_{C_{CB}}}{dt} = 0 \quad (1)$$

Решение этого уравнения:

$$u_{C_{CB}} = A e^{Pt}$$

Подставим значение свободного напряжения и производной от напряжения  $\frac{du_{C_{CB}}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}$  в уравнение (1).

$$A \cdot e^{Pt} + R \cdot C \cdot P \cdot A \cdot e^{Pt} = Ae^{Pt}(1 + R \cdot C \cdot P) = 0 \Rightarrow 1 + RCP = 0$$

Уравнение  $1 + RCP = 0$  называется **характеристическим**.

$$P = -\frac{1}{RC} \text{ - корень характеристического уравнения;}$$

$$\tau = -\frac{1}{P} = RC \text{ - постоянная времени переходного процесса;}$$

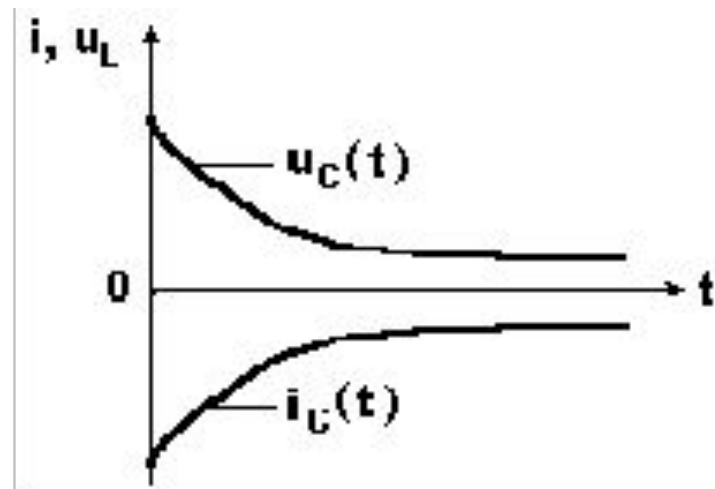
$$u_{C_{CB}} = A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0) = u_{C_{CB}}(0) = A = u_c(0-) = E$$

$$A = E$$

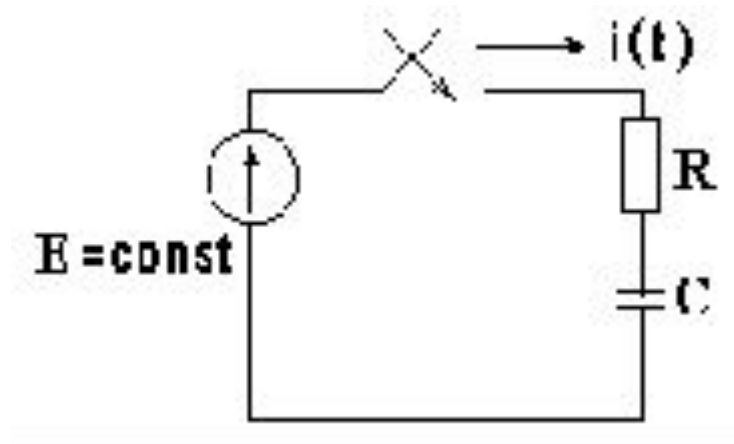
$$u_C = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \left( -\frac{1}{RC} \right) \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Переходный ток и переходное напряжение на конденсаторе по показательному закону уменьшаются до нуля

## Подключение R-C цепи к источнику постоянной ЭДС



Полагаем, что до коммутации конденсатор не заряжен, напряжение на нем  $u_C(0_-) = 0$ .

*В результате коммутации рубильник замыкается, и конденсатор полностью заряжается.*

Принужденное напряжение на емкости равно ЭДС источника питания:

$$u_{C \text{ ПР}} = E$$

Переходное напряжение:

$$u_C(t) = u_{C \text{ ПР}} + u_{C \text{ СВ}} = u_{C \text{ ПР}} + A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

В момент коммутации  $u_C(0) = u_{C\text{ПР}} + A$

Постоянная интегрирования  $A = u_C(0) - u_{C\text{ПР}}$

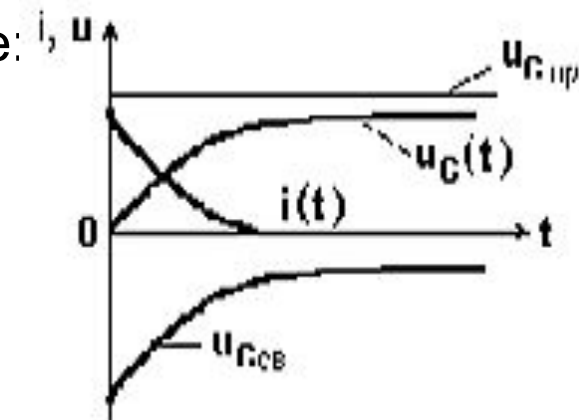
В соответствии со вторым законом коммутации  $u_C(0) = u_C(0-) = 0$

$$A = 0 - u_{C\text{ПР}} = -u_{C\text{ПР}} = -E$$

Переходное напряжение:  $u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

Переходный ток:  $i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

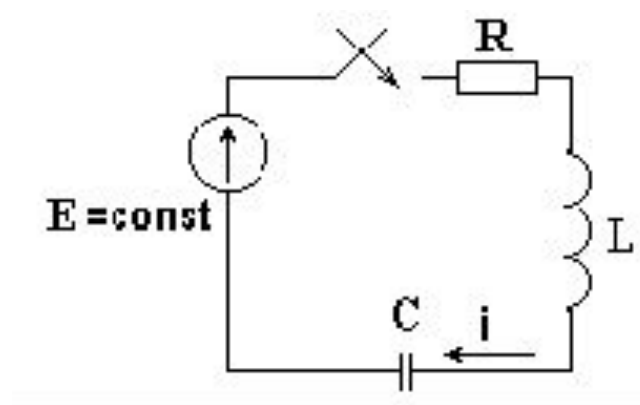
Кривые напряжений и тока изображены на рисунке:





## Переходные процессы в цепях с двумя реактивными элементами

При последовательном соединении сопротивления  $R$ , катушки индуктивности  $L$  и конденсатора  $C$  образуется электрический  $R - L - C$  контур.



Дифференциальное уравнение для тока в контуре:

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = E$$

• После дифференцирования по  $t$  и деления на  $L$  получим:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (2)$$

Решение уравнения (2) равно сумме принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{ПР}} + i_{\text{СВ}}$$

В нашем случае принужденная составляющая переходного тока равна нулю, так как в схеме имеется емкость, являющаяся разрывом цепи для постоянного тока.

Свободная составляющая является общим решением уравнения:

$$\frac{d^2 i_{\text{СВ}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di_{\text{СВ}}}{dt} + \frac{1}{LC} i_{\text{СВ}} = 0 \quad (3)$$

Пусть  $i_{CB} = Ae^{Pt}$ ,  $\frac{di_{CB}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}$ ,  $\frac{d^2i_{CB}}{dt^2} = A \cdot P^2 \cdot e^{Pt}$

После подстановки этих выражений в уравнение (3) получим характеристическое уравнение:

$$P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC} = 0$$

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

где  $\alpha = \frac{R}{2L}$  - коэффициент затухания;

потерь.  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  - угловая резонансная частота контура без

Получим:  $i = i_{CB} = A_1 \cdot e^{P_1 t} + A_2 \cdot e^{P_2 t}$

Вид корней зависит от отношения

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2Q}$$

где  $\rho = \sqrt{L/C}$  - характеристическое или волновое сопротивление контура;

$Q = \rho / R$  - добротность контура.

***Спасибо  
за внимание!***