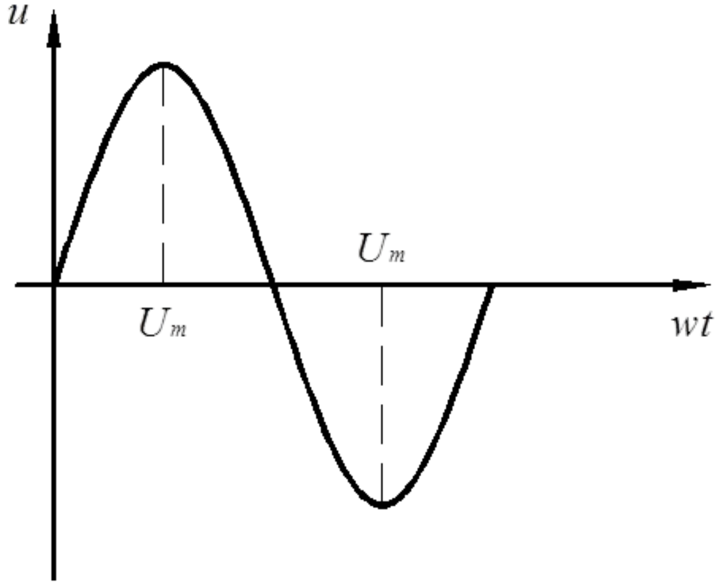
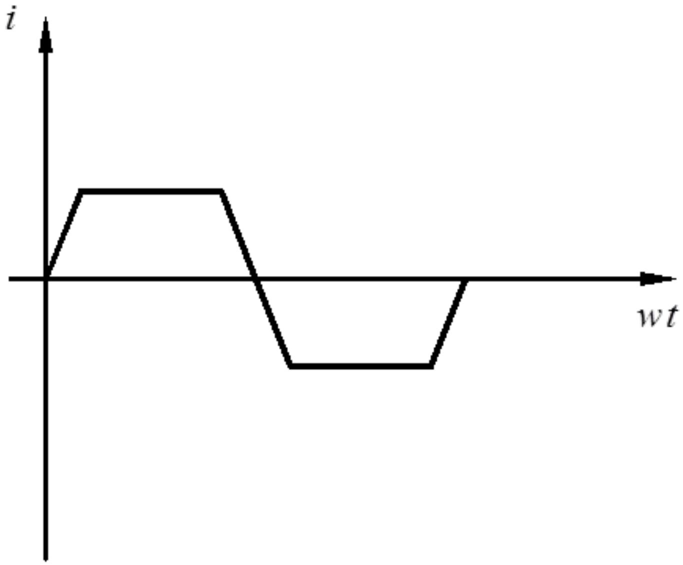
ЛЕКЦИЯ 3

Электрические цепи однофазного переменного тока

Переменным называется электрический ток, величина и направление которого изменяются во времени.

Форма кривой переменного тока разнообразна.





Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют ***мгновенным значением*** и обозначают строчной буквой i.

Мгновенный ток называется ***периодическим***, если значения его повторяются через одинаковые промежутки времени:

$$i(t) = i(t + T)$$

Наименьший промежуток времени, через который значения переменного тока повторяются, называется ***периодом***.

Период T измеряется в секундах [с].

Периодические токи, изменяющиеся по синусоидальному закону, называются ***синусоидальными***.

Мгновенное значение синусоидального тока определяется по формуле:

$$i(t) = I_m \cdot Sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_i\right) = I_m \cdot Sin(2\pi f \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot Sin(\omega t + \varphi_i)$$

где I_m - максимальное, или ***амплитудное***, значение тока.

Амплитудное значение синусоидального тока или напряжения можно измерить с помощью осциллографа.

Аргумент синусоидальной функции $\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_i$

- называют фазой.

Величину ***φ***, равную фазе в момент времени *t = 0*, называют ***начальной фазой.***
Фаза измеряется в радианах [рад] или градусах.

Величину, обратную периоду, называют ***частотой***.

$$\boldsymbol{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathrm{T}}$$

Частота – ток и напряжение меняют свое направление (в секунду)

Частота ***f*** измеряется в герцах [Гц].

Величину $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ называют ***круговой***

(или ***угловой***) ***частотой.***

Угловая частота измеряется в [рад/с].

Если у синусоидальных токов начальные фазы при ***одинаковых частотах одинаковы***, говорят, что эти токи совпадают по фазе.

Если неодинаковы по фазе, говорят, что токи сдвинуты по фазе.

Сдвиг фаз двух синусоидальных токов измеряется разностью начальных фаз:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

*Амперметры и вольтметры электромагнитной системы измеряют **действующие значения** переменного тока и напряжения.*

Действующим значением переменного тока называется среднеквадратичное значение тока за период.

Действующее значение тока для синусоиды $i = I_m \cdot Sin\omega t$ можно определить, как:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cdot Sin^2\omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cdot \frac{(1 - Cos\,2\omega t)}{2} \cdot dt} =$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}}\sqrt{\int_0^T dt - \int_0^T Cos\,2\omega t \cdot dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжений…

Действующие значения переменного тока, напряжения, ЭДС меньше максимальных в $\sqrt{2}$.

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}}.$$

Законы Ома и Кирхгофа справедливы для мгновенных значений токов и напряжений.

Закон Ома для мгновенных значений:

$$i = \frac{u}{R} \quad .$$

Законы Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\sum i = 0 \quad ,$$

$$\sum e = \sum u \; .$$

Изображения синусоидальных функций времени в векторной форме

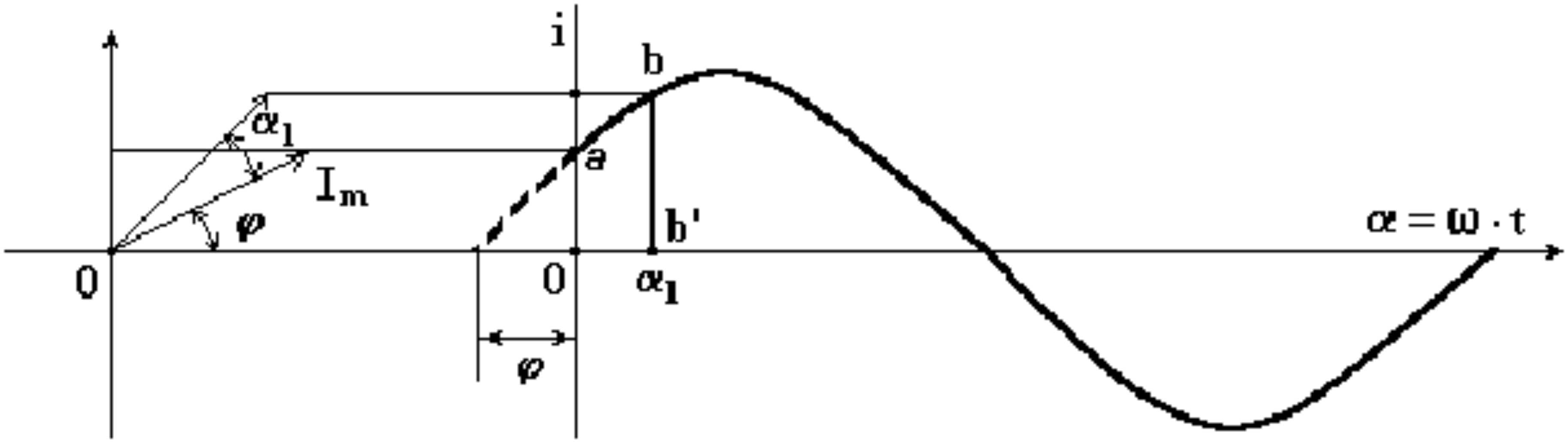
При расчете электрических цепей часто приходится складывать или вычитать величины токов или напряжений, являющиеся синусоидальными функциями времени.

Графические построения или тригонометрические преобразования в этом случае могут оказаться слишком громоздкими.

Задача упрощается, если представить наши синусоидальные функции в векторной форме.

Имеем синусоидальную функцию

$$i=I_m \cdot Sin(\omega t+\varphi)$$

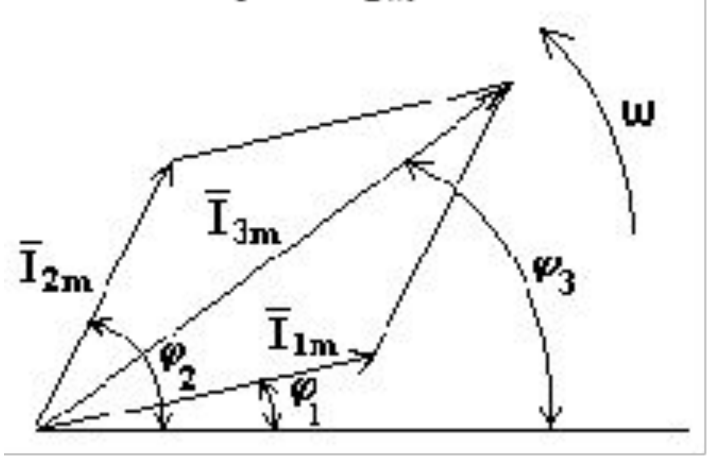


Пусть даны два синусоидальных тока:

$$i_1 = I_{1m} \cdot Sin(\omega t + \varphi_1), \quad i_2 = I_{2m} \cdot Sin(\omega t + \varphi_2)$$

Нужно сложить эти токи и получить результирующий ток:

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_{1m} \cdot Sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \cdot Sin(\omega t + \varphi_2) = I_{m3} \cdot Sin(\omega t + \varphi_3)$$



Векторная диаграмма - это совокупность векторов, изображающих синусоидальные напряжения, токи и ЭДС одинаковой частоты.

Необходимо отметить, что напряжение, ток и ЭДС - это скалярные, а не векторные величины.

Мы представляем их на векторной диаграмме в виде не пространственных, а временных радиус - векторов, вращающихся с одинаковой угловой скоростью.

Изображать на векторной диаграмме два вектора, вращающихся с различной угловой скоростью, бессмысленно.

Положительным считается направление вращения векторов против часовой стрелки.

Векторные диаграммы используются для качественного анализа электрических цепей, а также при решении некоторых электротехнических задач.

Изображение синусоидальных функций времени в комплексной форме

При расчетах цепей синусоидального тока используют символический метод расчета или метод комплексных амплитуд.

В этом методе сложение двух синусоидальных токов заменяют сложением двух комплексных чисел, соответствующих этим токам.

Из курса математики известно, что комплексное число может быть записано в показательной или алгебраической форме:

$$C = c \cdot e^{j\varphi} = a + jb$$

где $\boldsymbol{c}$ - модуль комплексного числа; $\boldsymbol{\varphi}$ - аргумент;

$\boldsymbol{a}$ - вещественная часть комплексного числа;

$\boldsymbol{b}$ - мнимая часть;

$\boldsymbol{j}$ - мнимая единица, $\boldsymbol{j}$ = $\sqrt{-1}$.

С помощью формулы Эйлера можно перейти от показательной формы записи к алгебраической:

$$c \cdot e^{j\varphi} = c \cdot Cos\,\varphi + j \cdot c \cdot Sin\varphi = a + jb$$

$$a = c \cdot Cos\,\varphi, \quad b = c \cdot Sin\varphi$$

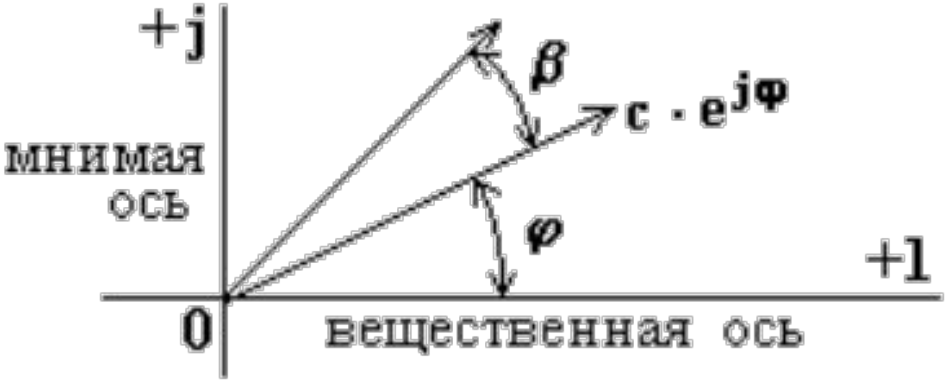
От алгебраической формы записи переходят к показательной форме с помощью формул:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = arcTg\,\frac{b}{a}$$

Комплексное число может быть представлено в виде ***радиус - вектора*** в комплексной плоскости.

Вектор длиной, равной модулю c, расположен в

начальный момент времени под углом φ относительно вещественной оси



- Умножим комплексное число на множитель $e^{j\beta}$.

Радиус - вектор на комплексной плоскости повернется на угол $\boldsymbol{\beta}$.

Множитель $e^{j\beta}$ называется поворотным.

$$c \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\beta} = c \cdot e^{j(\varphi+\beta)}$$

Если $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\omega t}$, то вектор, умноженный на $e^{j\omega t}$, превратится во вращающийся со скоростью $\boldsymbol{\omega}$ радиус - вектор.

Выражение $c \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = c \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$ называется комплексной функцией времени.

Применительно к току, получим:

$I_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ - комплексную функцию времени для тока.

$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi}$- комплексная амплитуда тока (исходное положение вектора в комплексной плоскости).

Зная $\dot{I}_m$, можем найти комплекс действующего значения:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = I \cdot e^{j\varphi} \qquad (1)$$

Определим, чему равна мнимая часть комплексной функции времени для напряжения:

$$Jm\left[\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}\right] = Jm\left[I_m \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\right] =$$
$$= Jm\left[I_m \cdot Cos(\omega t + \varphi) + jI_m \cdot Sin(\omega t + \varphi)\right] = I_m \cdot Sin(\omega t + \varphi) = i \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует:

Правило перехода от тригонометрической формы записи к показательной:

Нужно амплитудное значение поделить на $\sqrt{2}$ ***и умножить на*** $e^{j\varphi}$***.***

Правило перехода от показательной формы к тригонометрической:

Нужно комплекс действующего значения увеличить на $\sqrt{2}$ ***и от полученного значения взять мнимую часть.***

Применительно к напряжению, получим:

$U_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$ - комплексную функцию времени для напряжения.

$\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi}$ - комплексная амплитуда напряжения (исходное положение вектора в комплексной плоскости).

Определим, чему равна мнимая часть комплексной функции времени для напряжения:

$$Jm\left[\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}\right] = Jm\left[\dot{U}_m \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\right] =$$

$$= Jm\left[U_m \cdot Cos(\omega t + \varphi) + jU_m \cdot Sin(\omega t + \varphi)\right] = U_m \cdot Sin(\omega t + \varphi) = u$$

Мгновенное синусоидальное напряжение (ток, ЭДС) является мнимой частью соответствующей комплексной функции времени.

Замечание. В электротехнике над символами, изображающими комплексные напряжения, токи, ЭДС, принято ставить точку.

Синусоидальные функции времени могут быть представлены векторами в комплексной плоскости, вращающимися против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

Проекция вектора на мнимую ось изменяется по синусоидальному закону.

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}}{R}$$ - закон Ома;

$$\sum \dot{I}_m = 0$$ - первый закон Кирхгофа;

$$\sum \dot{E}_m = \sum \dot{U}_m$$ - второй закон Кирхгофа.

Спасибо

за внимание!