

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

Сигнал это физический процесс, предназначенный для передачи информации. Информация - сведения о поведении интересующего нас явления, события или объекта. В электронике это ток или напряжение, отображающее передаваемое сообщение или информацию о состоянии исследуемого объекта, которое изменяется во времени или в пространстве.

Отсюда математически *сигнал* может быть описан некоторой функцией:
1) $s(t)$ – временная. 2) $s(r, t)$ – пространственно-временная функция времени. В дальнейшем будем рассматривать лишь временные сигналы..

Классификация электрических сигналов

1) По характеру изменения сигнала во времени и по величине сигналы разделяются на непрерывные (аналоговые) и импульсные.

Аналоговый сигнал описывается функцией, произвольной по величине и непрерывной во времени.

Импульсные сигналы – это сигналы, существующие не на всей временной оси, или эти сигналы описываются функциями с разрывами.

Импульсные сигналы подразделяются на следующие:

- 1) дискретные,
- 2) квантованные,
- 3) цифровые.

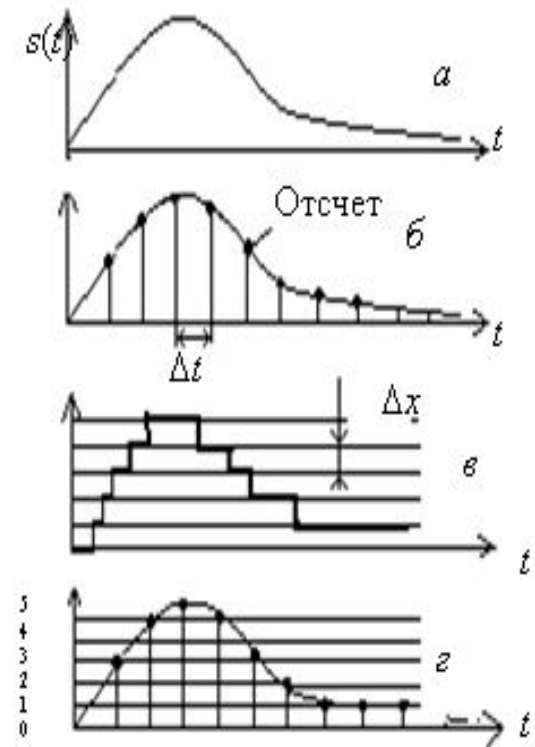


Рис. 2.1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

Сигнал это физический процесс, предназначенный для передачи информации. Информация - сведения о поведении интересующего нас явления, события или объекта, которое изменяется во времени или в пространстве.

В электронике сигналом является ток или напряжение.

Отсюда математически сигнал может быть описан некоторой функцией:
1) $s(t)$ – временная. 2) $s(r, t)$ – пространственно-временная функция времени

В дальнейшем будем рассматривать лишь временные сигналы

Классификация электрических сигналов

1) По характеру изменения сигнала во времени и по величине сигналы разделяются на непрерывные (аналоговые) и импульсные.

1. Аналоговый сигнал описывается функцией, произвольной по величине и непрерывной во времени.

2. Импульсные сигналы – это сигналы, существующие не на всей временной оси, или описываются функциями с разрывами.

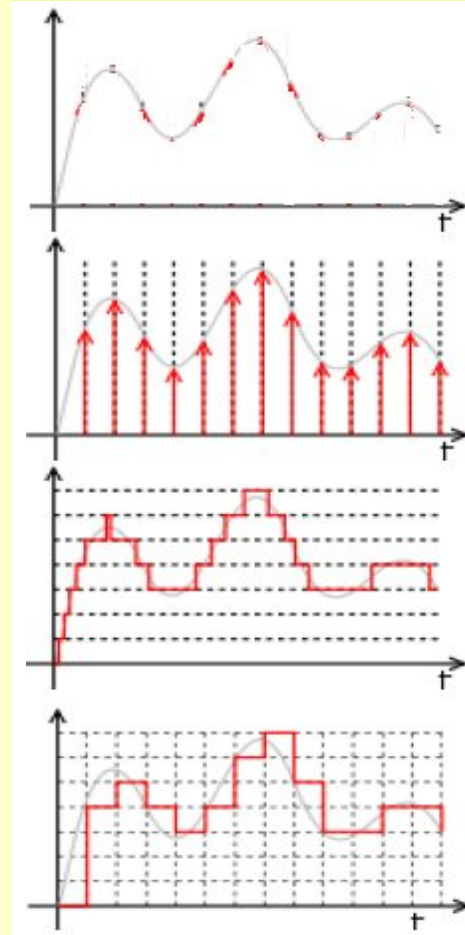
Дискретные это сигналы в виде дискретных функций времени. Шаг дискретизации

$$\Delta t < \frac{1}{2 \cdot F_{max}}$$

2) Квантованные - это сигналы дискретные по уровню. Шаг квантования

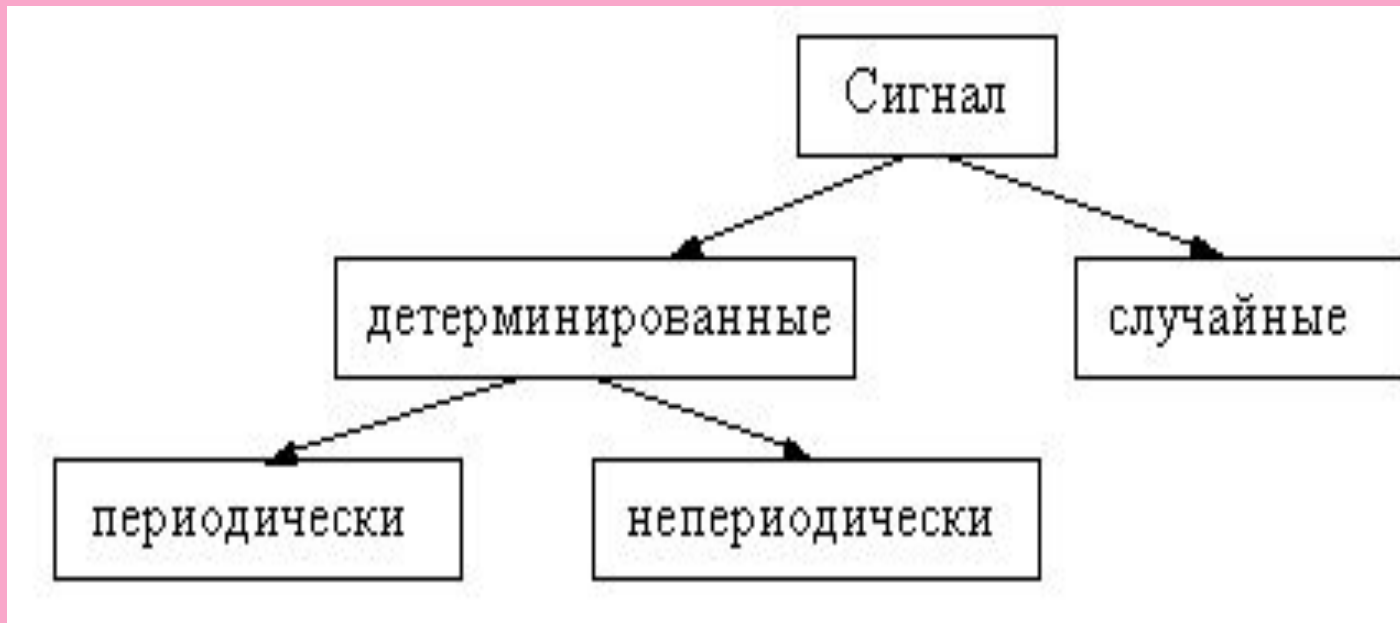
$$\Delta = \frac{U_{max} - U_{min}}{2^n}$$

3) Цифровые - это сигналы дискретные во времени и квантованные по уровню.



2. По математическому представлению

- По математическому описанию все многообразие сигналов принято делить на две основные группы: детерминированные (регулярные) и случайные сигналы (рис. 2.2).



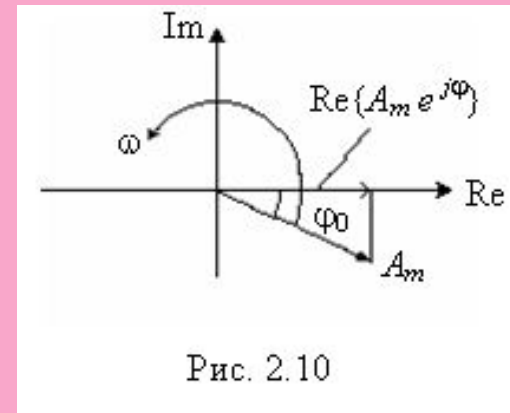
Детерминированные сигналы имеют следующие способы математического описания:

1. временное представление сигнала – в виде аналитической формулы или графика – временная диаграмма;
2. - комплексное представление. Гармонический сигнала – комплексная амплитуда;
3. - векторное представление;
- 4.- спектральное представление
5. - операторное представление

Способы представления сигналов.

Гармоническое колебание

- **2.2.** Гармоническим называется колебание, которое описывается гармонической функцией времени: $\sin(t)$, $\cos(t)$.
- Сигналы произвольной формы могут иметь следующие формы представления:
 - временное представление сигнала; $s(t) = A_m \cos(\omega t - \varphi_0)$
 - комплексное представление; $s(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0) \leftrightarrow \dot{A}_m = A_m e^{j\varphi_0}$
 - векторное представление;
 - спектральное;
 - операторное



2.3. Спектральное представление сигналов

- Спектральный способ представления сигнала $s(t)$ основан на представлении любой функции времени совокупностью (суммой) гармонических составляющих с соответствующими амплитудами, частотами и начальными фазами.
- При спектральном представлении сигнал задается не как функция времени, а как функция частоты, что является очень удобным, поскольку свойства электрических цепей часто задаются их частотными характеристиками

Спектры периодических сигналов

Сигналы, удовлетворяющие условию $S(t)=S(t+T)$, если $T < \infty$, а $-\infty < t < +\infty$ называются периодическими.

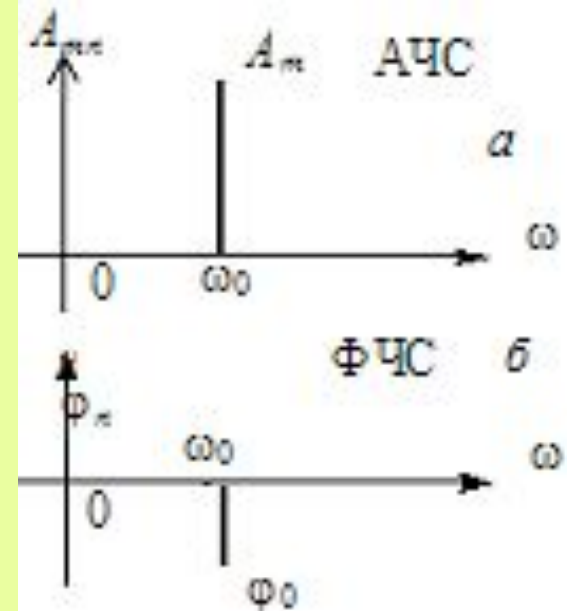
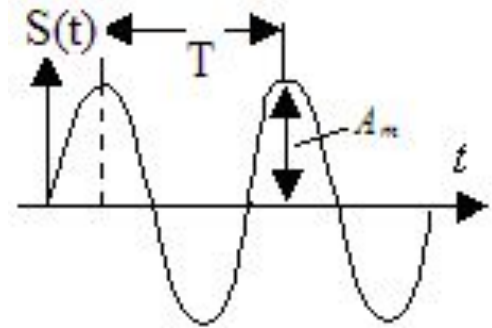
- Простейшим периодическим сигналом является гармоническое сигнал $S(t)=A_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)$.

Он состоит из одной гармонической составляющей с амплитудой A_m и начальной фазой ϕ_0 , которые расположены на частоте ω_0 .

Для наглядного изображения спектры сигналов изображают в виде графиков, различают два вида спектров **амплитудный спектр** и **фазовый спектр**.

- **Амплитудным или амплитудно-частотным спектром (АЧС)** называется зависимость амплитуд гармонических составляющих от частоты (АЧС $\rightarrow A_m(\omega)$, рис 2., а).

- **Фазово-частотным спектром (ФЧС)** называется зависимость начальных фаз гармонических составляющих от частоты (ФЧС $\rightarrow \phi(\omega)$, рис. 2, б).



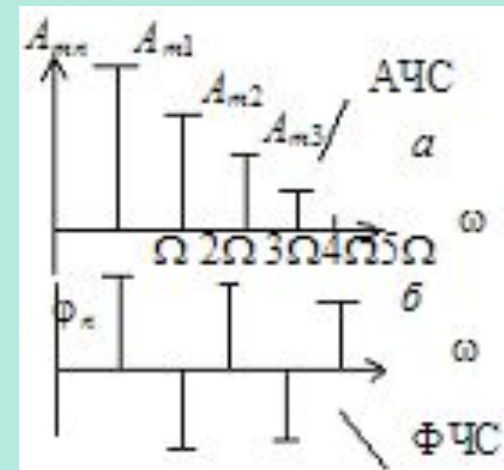
Спектр произвольного периодического сигнала

- Из математики известно, что любой периодический сигнал $s(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле, может быть представлен тригонометрическим рядом Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos(n\Omega t) + b_{mn} \sin(n\Omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\Omega t - \varphi_n)$$

где $\Omega = 2\pi/T$ – основная частота следования сигнала (первая гармоника сигнала), n – номер гармоники сигнала, $n\Omega$ – частота n -й гармоники сигнала, $\frac{a_0}{2}, a_{mn}, b_{mn}$ – коэффициенты ряда Фурье:

- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$ – постоянная (средняя) составляющая сигнала;
 - $a_{mn} = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos n\Omega t dt$ – косинус составляющая амплитуды n -й гармоники спектра сигнала;
 - $b_{mn} = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin n\Omega t dt$ – синус составляющая амплитуды n -й гармоники спектра сигнала;
 - $A_{mn} = \sqrt{a_{mn}^2 + b_{mn}^2}$ – амплитуда n -й гармоники;
 - $\varphi_n = \arctg\left(\frac{b_{mn}}{a_{mn}}\right)$ – начальная фаза n -й гармоники.
- Спектр периодического сигнала имеет дискретный характер**



Спектры непериодических сигналов

• Непериодический сигнал в ряд Фурье разложить нельзя. Для него вводят интеграл Фурье, который является пределом ряда, когда ($T \rightarrow \infty$). При этом:

• 1) основная частота сигнала $\Omega = 2\pi/T \rightarrow 0$, т.е. расстояние между линиями спектра, равное Ω становится бесконечно малым, а **спектр – сплошным**.

• 2) амплитуды гармонических составляющих $A_{mn} \sim \frac{1}{T} \rightarrow 0$, т.е. спектр состоит из гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами.

• Спектр непериодического сигнала характеризуется функцией спектральной плотности амплитуд, т.е. плотность распределения бесконечно малых амплитуд по оси частот. Плотность это число составляющих в диапазоне частот в 1 Гц.

Спектральная плотность $S(j\omega)$ связана с сигналом $s(t)$ преобразованием Фурье:

• $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$ – прямое преобразование Фурье (ППФ).

• $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ – обратное преобразование Фурье (ОПФ).

• Функция спектральной плотности – это комплексная функция частоты

• $S(j\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$,

• где $S(\omega)$ – модуль функции спектральной плотности, или его называют *спектральной плотностью амплитуд*,

• $\varphi(\omega)$ – аргумент функции спектральной плотности – *спектр фаз*.

Спектра непериодического сигнала имеет сплошной, непрерывный характер.

2.4. Операторное представление сигнала

Преобразование Фурье применяется для сигналов $s(t)$ с **конечной энергией**, т. е. для сигналов, удовлетворяющих условию. Функция $s(t)$, удовлетворяющая такому условию, называется абсолютно интегрируемой..

$$\int_t s^2(t) dt < \infty$$

- Более универсальным является операторное представление сигнала, которое основано на преобразовании Лапласа.
- При операторном представлении сигналу $s(t)$ - функции действительной переменной t , ставится в соответствие функция $S(p)$ комплексной переменной p , где $p = \sigma + j\omega$ - называется комплексной частотой.

Связь между ними в виде преобразования Лапласа:

прямое преобразование Лапласа, $(S(p) = L[s(t)])$ -

обратное преобразование Лапласа, $s(t) = L^{-1}[S(p)]$.

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$
$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} S(p)e^{pt} dp$$

Сигнал $s(t)$ называют **оригиналом**, а $S(p)$ – изображением, или операторным представлением сигнала.

Для нахождения функции спектральной плотности амплитуд $S(j\omega)$ сигнала $S(t)$, по известному операторному представлению $S(p)$, необходимо в последнем

оператор p заменить на $j\omega$, т.е. $S(j\omega) = S(p)|_{p = j\omega}$