1
ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

Механика - часть физики, в которой изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

- **Классическая (механика Галилея—Ньютона).** Изучает законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью распространения света в вакууме.
- **Релятивистская.** Изучает законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью распространения света в вакууме (основана на специальной теории относительности, сформулированной А. Эйнштейном.)
- **Квантовая.** Изучает законы движения микроскопических тел (отдельных атомов и элементарных частиц).

Разделы механики

- **Кинематика.** Изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обусловливают.
- **Динамика.** Изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.
- **Статика.** Изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.

- **Материальная точка** - ***тело***, обладающее массой, ***размерами которого в данной задаче можно пренебречь***. Понятие материальной точки — абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение планет по орбитам вокруг Солнца, можно принять их за материальные точки.
- **Система материальных точек** - произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда ***изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы материальных точек***. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

- **Абсолютно твердое тело** - тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (точнее, между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

- **Абсолютно упругое тело** - тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения действия внешних сил принимает свои первоначальные размеры и форму.

- **Абсолютно неупругое тело** - тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

1.1 МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Тело отсчета

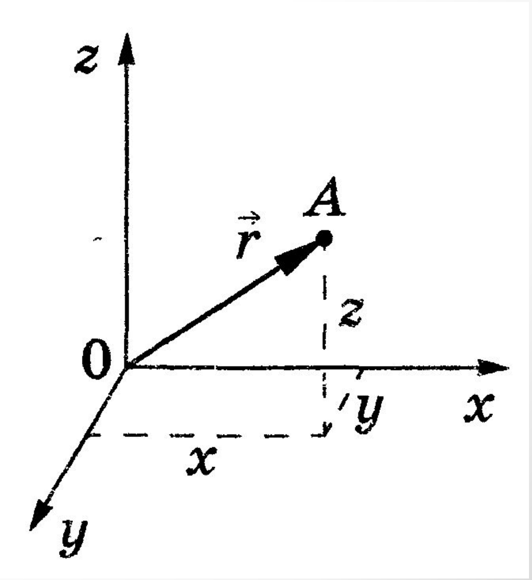
Произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение других (движущихся) тел. Положение любого движущегося тела определяется по отношению к телу отсчета, поэтому механическое движение относительно.

Система координат

Система (в простейшем случае прямоугольная декартова система xyz), связанная с телом отсчета.

Система отсчета

Совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и синхронизированных между собой часов.



Кинематические уравнения движения материальной точки (закон движения)

Положение материальной точки А в декартовой системе координат определяется тремя координатами x,y,z или радиусом-вектором r (он проводится из начала отсчета координат 0 в точку А). При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются, поэтому ее движение определяется записанной системой скалярных уравнений или эквивалентным ей векторным уравнением.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Пример. Определить закон движения материальной точки

Момент времени t, *сек*	1	2	3	4	5	6	7	8
Координата x, *м*	1,75	2,50	3,25	4,00	4,75	5,50	6,25	7,00

x=1+0,75t

Момент времени t, *сек* . .	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Координата z, *м*	0,049	0,196	0,431	0,784	1,22	1,76	2,40	3,14	3,97	4,90

$z=4,9t^2$

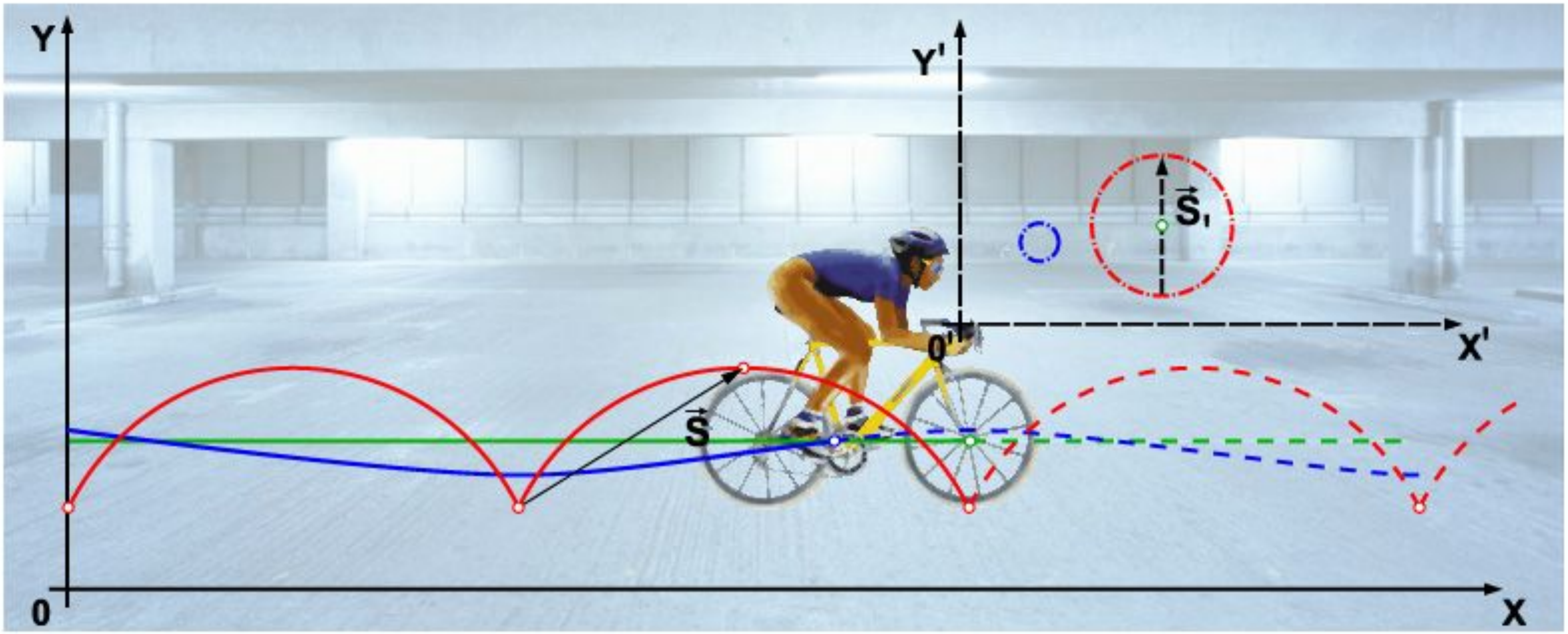
Траектория

Линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчета.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, криволинейное движение, движение по окружности и т. д.

♦ Вид траектории зависит от *характера движения материальной точки и от системы отсчета*.

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ



ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ НИППЕЛЯ КОЛЕСА В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ **XOY**

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ НИППЕЛЯ КОЛЕСА В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ **X'O'Y'**

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЕДАЛИ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ **XOY**

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЕДАЛИ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ **X'O'Y'**

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ОСИ КОЛЕСА В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ **XOY**

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ОСИ КОЛЕСА В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ **X'O'Y'**

$\vec{S}$ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ НИППЕЛЯ КОЛЕСА ЗА 0,5 ОБОРОТА

Пример. Определить вид траектории тела падающего в вагоне

- относительно вагона,
- относительно Земли.

Определить вид траектории какой-либо точки пропеллера движущегося самолета

- относительно самолета,
- относительно Земли.

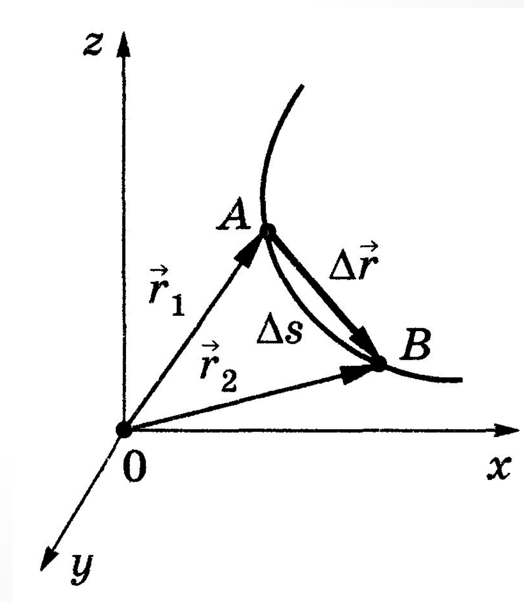
Вектор перемещения

Вектор $\Delta\square r = \square r_2 - \square r_1$ проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени).

Длина пути

Длина участка траектории АВ, пройденного материальной точкой за данный промежуток времени: $\Delta s = \Delta s(t)$ — скалярная функция времени.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\square r|$ равен пройденному пути Δs: $|\Delta\square r| = \Delta s$.



Поступательное движение твердого тела

Движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом и проведенная через две произвольные точки данного тела, остается параллельной самой себе.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому его поступательное движение можно охарактеризовать движением какой-то произвольной точки тела (например, движением центра масс тела).

Вращательное движение твердого тела

Движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Различные точки твердого тела движутся по-разному, поэтому его вращательное движение нельзя охарактеризовать движением какой-то одной точки.

1.2 КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Скорость

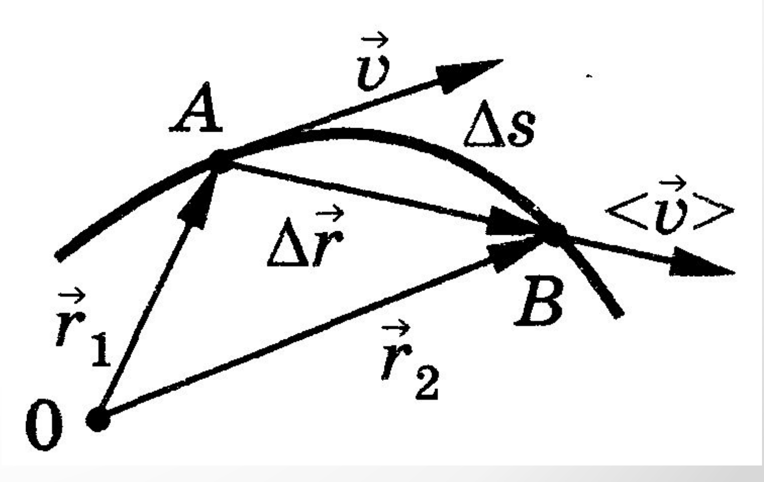
Векторная величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Средняя скорость

Векторная величина, численно равная отношению перемещения к промежутку времени Δt, в течение которого это перемещение произошло.

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением перемещения.

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$



Для оценки численного значения средней скорости на практике иногда пользуются следующим определением: **средняя скорость равна отношению пройденного пути ко времени движения.**

Определенная таким образом средняя скорость является скаляром, а не вектором.

Пример. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 60 км/ч, а вторую со скоростью 40 км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля.

48 км/ч.

Мгновенная скорость

Векторная величина, определяемая первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения.

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Модуль мгновенной скорости

Равен первой производной пути по времени.

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

Единица измерения скорости — 1 м/с

1 метр в секунду — скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой эта точка за время 1 с перемещается на расстояние 1 м.

Пример. Найти мгновенную скорость точки, движущейся по закону $s(t) = t^3$ (s — путь в метрах, t — время в минутах):

а) в начальный момент движения;

б) через 10 сек после начала движения;

в) в момент $t = 5$ мин.

а) 0 м/мин

б) 1/12 м/мин

в) 75 м/мин

Проекции вектора скорости на оси координат

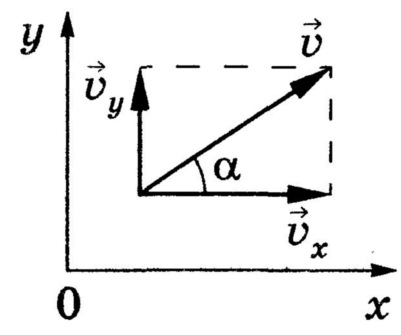
$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

x, y, z — соответственно проекции радиуса-вектора на оси координат.

Движение в одной плоскости

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$v_x = v\cos\alpha, \qquad v_y = v\sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$



v_x, v_y — проекции у вектора скорости v на оси координат.

Ускорение

Характеристика неравномерного движения, определяющая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

Среднее ускорение

Векторная величина, равная отношению изменения скорости Δv к интервалу времени Δt, за которое это изменение произошло.

$$\boxed{\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

Мгновенное ускорение

Векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени.

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Пример. Найти мгновенное ускорение точки, движущейся по закону $s(t) = t^3+2t^2$ (s — путь в метрах, t — время в минутах):

а) в начальный момент движения;

б) через 10 сек после начала движения;

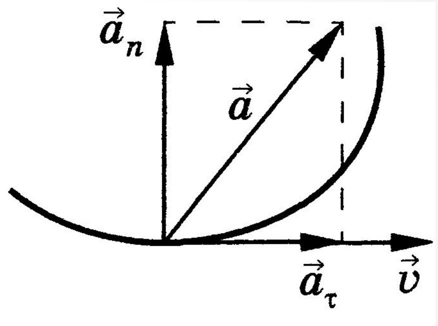
в) в момент $t = 5$ мин.

Составляющие ускорения

- **тангенциальная**

Характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории).

$$\boxed{a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$



- **нормальная**

Характеризует быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

Полное ускорение при криволинейном движении — геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих ускорения.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Модуль полного ускорения.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Единица измерения ускорения — 1 м/с²

Классификация движения в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения

a_τ	a_n	*Движение*
0	0	Прямолинейное равномерное
$a_\tau = a = \mathrm{const}$	0	Прямолинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	0	Прямолинейное с переменным ускорением
0	const	Равномерное по окружности
0	$\neq 0$	Равномерное криволинейное
const	$\neq 0$	Криволинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	$\neq 0$	Криволинейное с переменным ускорением

1.4 ПРИМЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ДВИЖЕНИЯ

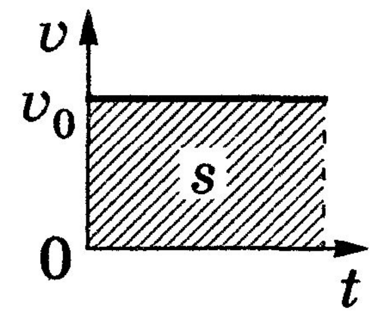
Равномерное движение ($v = v_0 = \text{const}$)

Скорость

$$v = v_0 = \text{const}$$

Ускорение

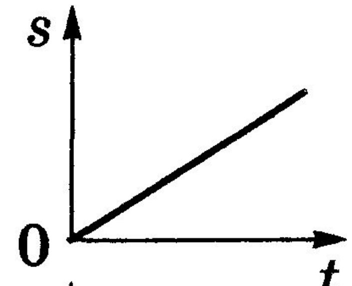
$$a = 0$$



Пройденный путь

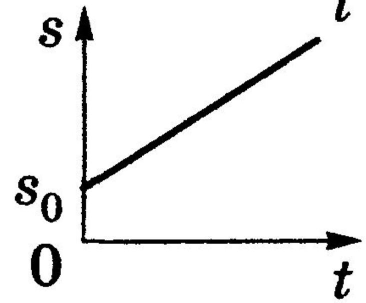
при $s(0) = 0$

$$s = v_0 t$$



при $s(0) = s_0$

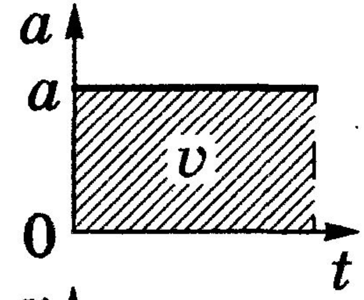
$$s = s_0 + v_0 t$$



Равноускоренное движение ($a = \text{const}$)

Ускорение

$$a = \text{const}$$

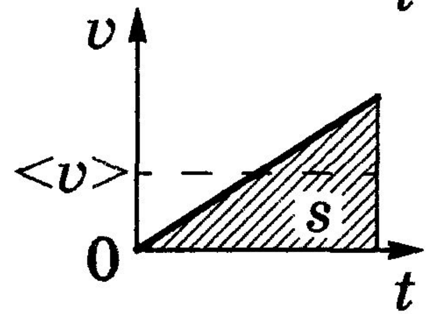


Скорость

при $v\,(0) = 0,$
$s\,(0) = 0$

$$v = at = \sqrt{2as},$$

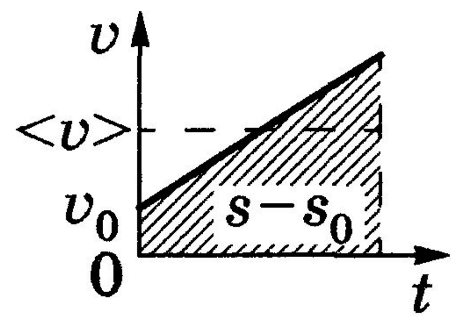
$$\langle v \rangle = at/2 = s/t$$



при $v\,(0) = v_0,$
$s\,(0) = s_0$

$$v = v_0 + at,$$

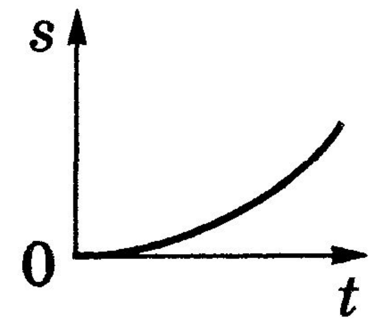
$$\langle v \rangle = v_0 + at/2$$



Пройденный путь

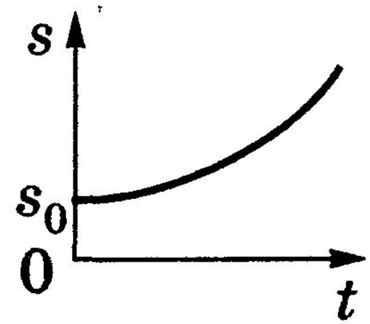
при $v(0) = 0$,
$s(0) = 0$

$$s = \frac{at^2}{2}$$



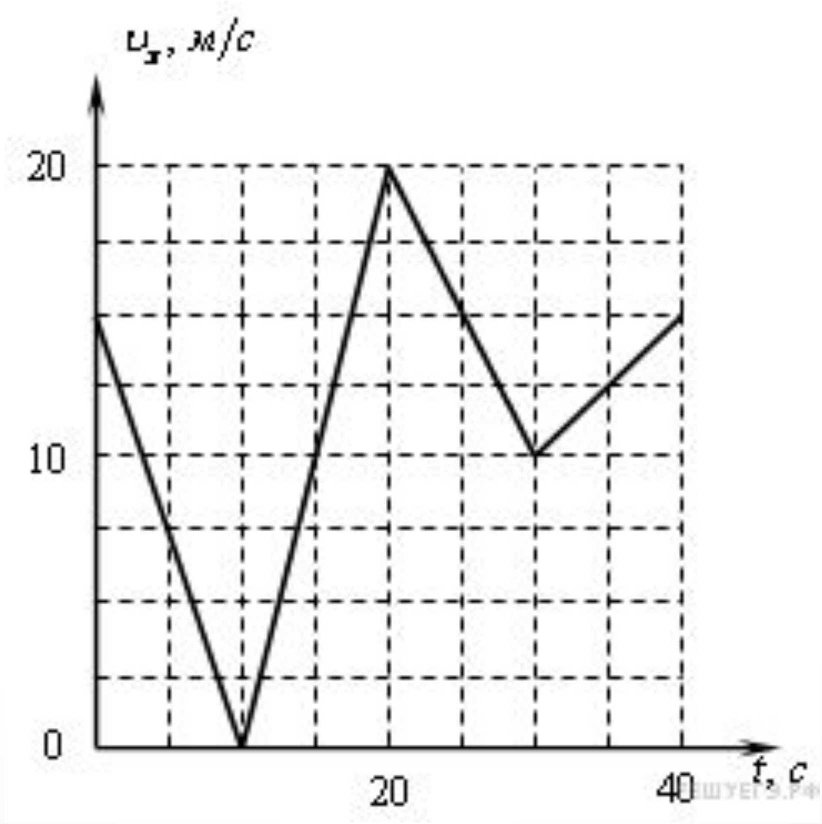
при $v(0) = v_0$,
$s(0) = s_0$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

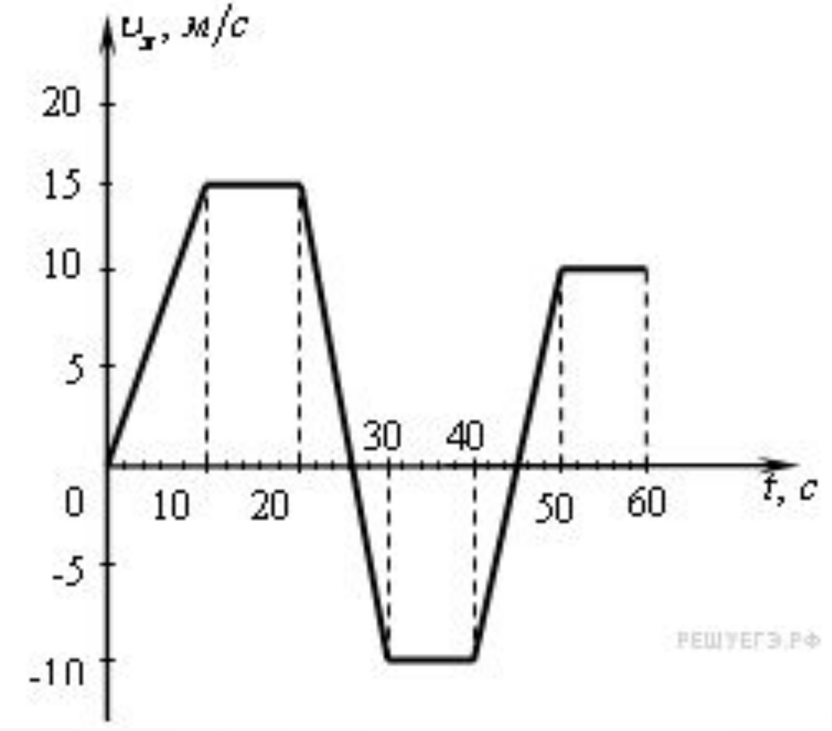


Пример. Автомобиль движется по прямой улице. На графике представлена зависимость скорости автомобиля от времени.

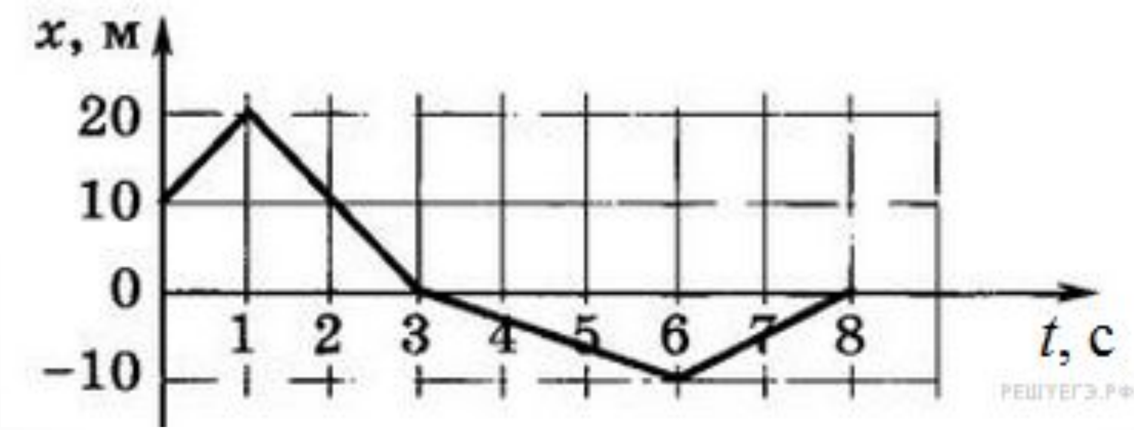
В каком интервале времени максимален модуль ускорения?



Пример. На рисунке приведен график зависимости проекции скорости тела от времени. Нарисуйте график проекции ускорения тела в интервале времени от 30 до 40 с.

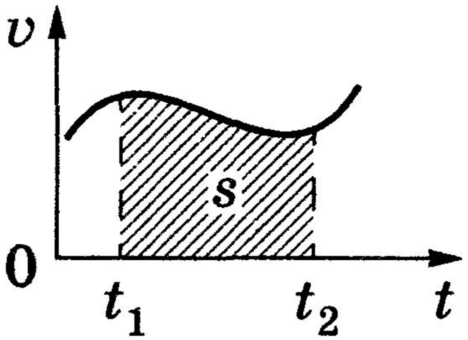


Пример. Тело движется прямолинейно вдоль оси x. На графике представлена зависимость координаты тела от времени. В какой момент времени модуль перемещения относительно исходной точки имел максимальное значение?



Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от t_1 до t_2

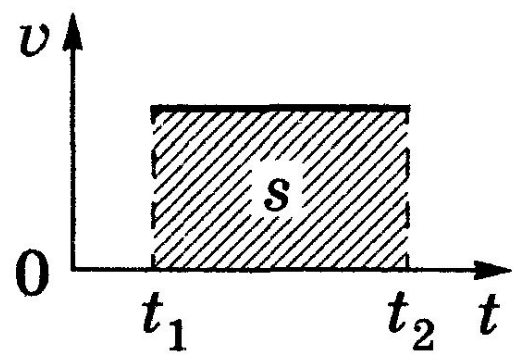
$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$$



Для определения s надо знать функцию $v(t)$. Тогда пройденный путь за промежуток времени от t_1 до t_2 определяется заштрихованной на рисунке площадью.

Путь, пройденный материальной точкой за время t при равномерном движении

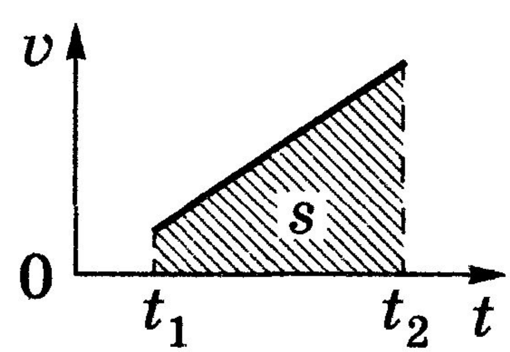
$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = v\int_0^t \mathrm{d}t = vt$$



Для определения s надо знать функцию $v(t)$. Тогда путь, пройденный за промежуток времени от t до t_2, определяется заштрихованной на рисунке площадью.

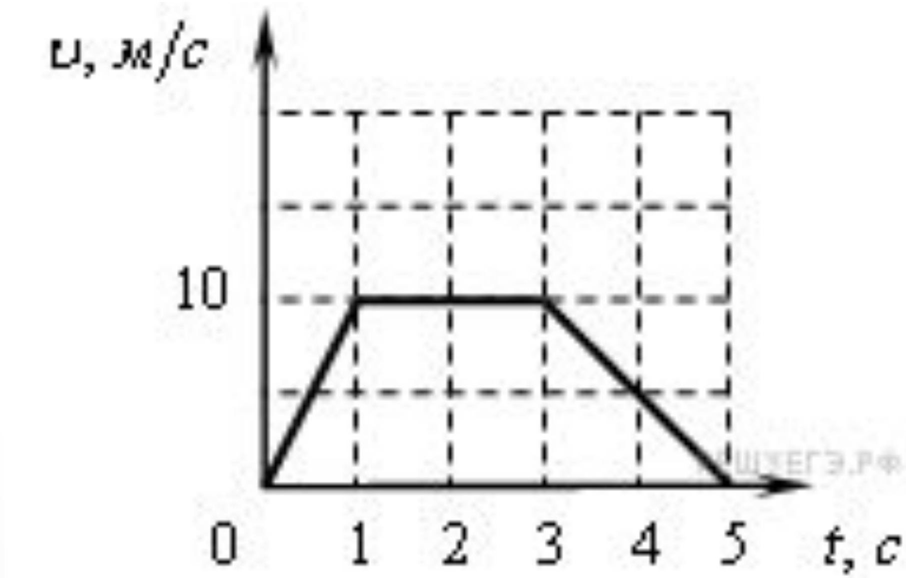
Путь, пройденный материальной точкой за время t при равноускоренном движении

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



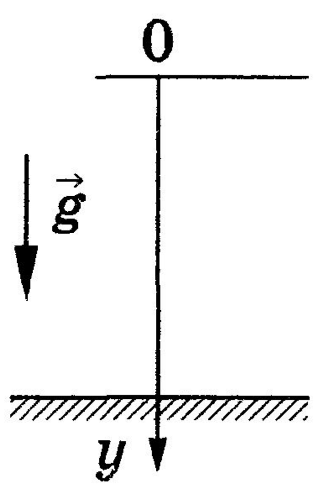
Для определения s надо знать функцию $v(t)$. Тогда путь, пройденный за промежуток времени от t_1 до t_2, определяется заштрихованной на рисунке площадью.

Пример. На рисунке представлен график зависимости модуля скорости автомобиля от времени t. Найдите путь, пройденный автомобилем за 5 с.



Свободное падение тел

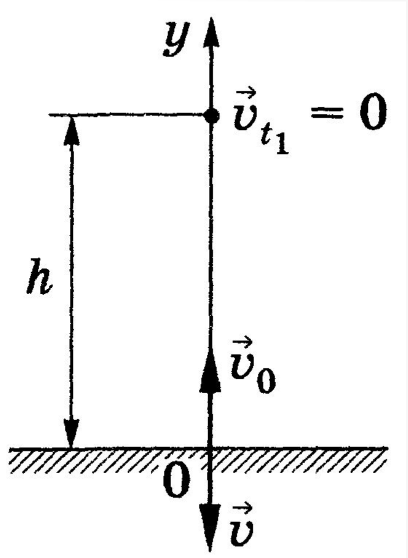
Кинематические уравнения движения	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, $\vec{a} = \vec{g}$
Проекции кинематических уравнений на ось у в любой момент времени	$y = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, $v = v_0 + gt$, $a = g$



Пример. Камень падает с высоты $h=1200$ м. Сколько секунд продолжается падение?

Движение тела, брошенного вертикально вверх

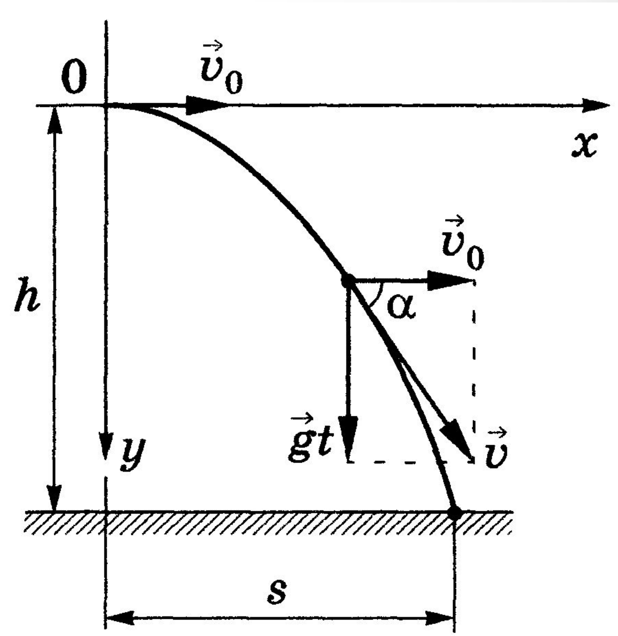
Кинематические уравнения движения	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, $\vec{a} = \vec{g}$
Проекции кинематических уравнений на ось y в любой момент времени	$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, $v = v_0 - gt$, $a = -g$



Пример. На какую высоту поднимется камень, брошенный вертикально вверх с начальной скоростью 5 м/с.

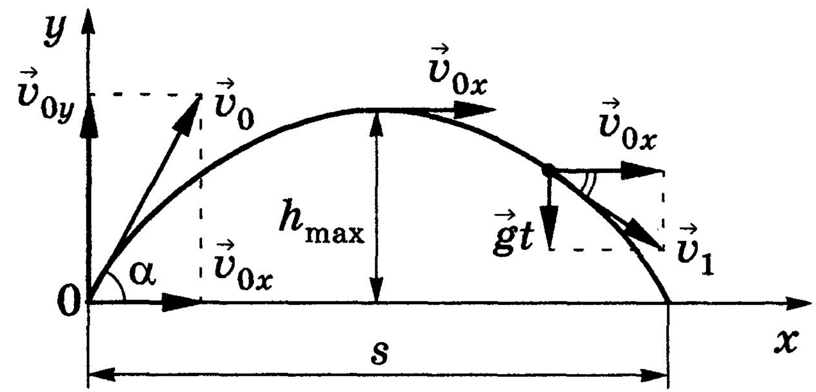
Движение тела, брошенного горизонтально

Кинематические уравнения движения	$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, $\vec{a} = \vec{g}$
Проекции кинематических уравнений на оси координат	Ось x $x = v_0 t$, $v_x = v_0$, $a_x = 0$
Уравнение траектории движения тела, брошенного горизонтально	$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$



Пример. С башни брошено тело в горизонтальном направлении со скоростью 40 м/с. Какова скорость тела через 3 с после начала движения?

Движение тела, брошенного под углом к горизонту



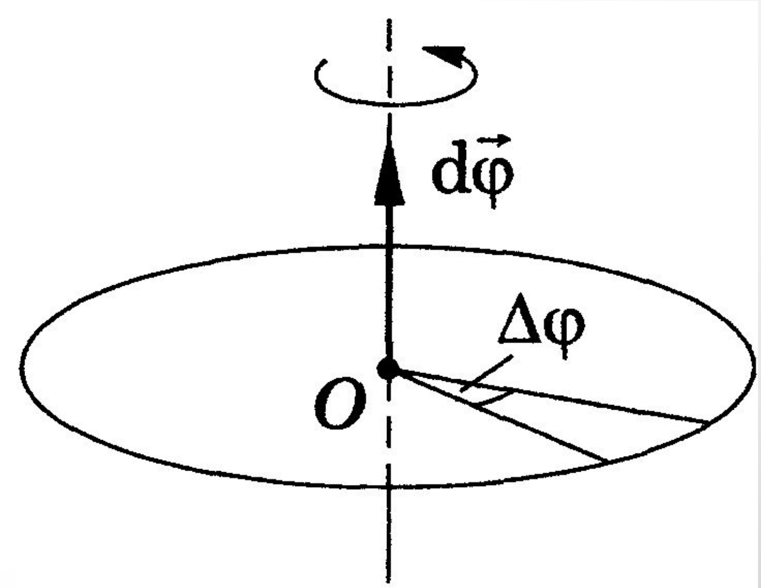
Кинематические уравнения движения	$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, $\vec{a} = \vec{g}$	
Проекции кинематических уравнений на оси координат	**Ось x** $x = v_{0x}t$, $v_x = v_{0x}$, $a_x = 0$	**Ось y** $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$, $v_y = v_{0y} - gt$, $a_y = g$
Проекции начальной скорости на оси координат	**Ось x** $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$	**Ось y** $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

Пример. Снаряд вылетает из орудия с начальной скоростью 490 м/с под углом 30^0 к горизонту. Найти высоту, дальность и время полета снаряда, не учитывая его вращение и сопротивление воздуха.

1.5 КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Элементарный угол поворота (d□φ)

Элементарные (бесконечно малые) **повороты** рассматривают как **векторы**. Модуль вектора d□φ равен углу поворота, а его направление **совпадает с направлением поступательного движения острия винта**, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т. е. *подчиняется правилу правого винта*.



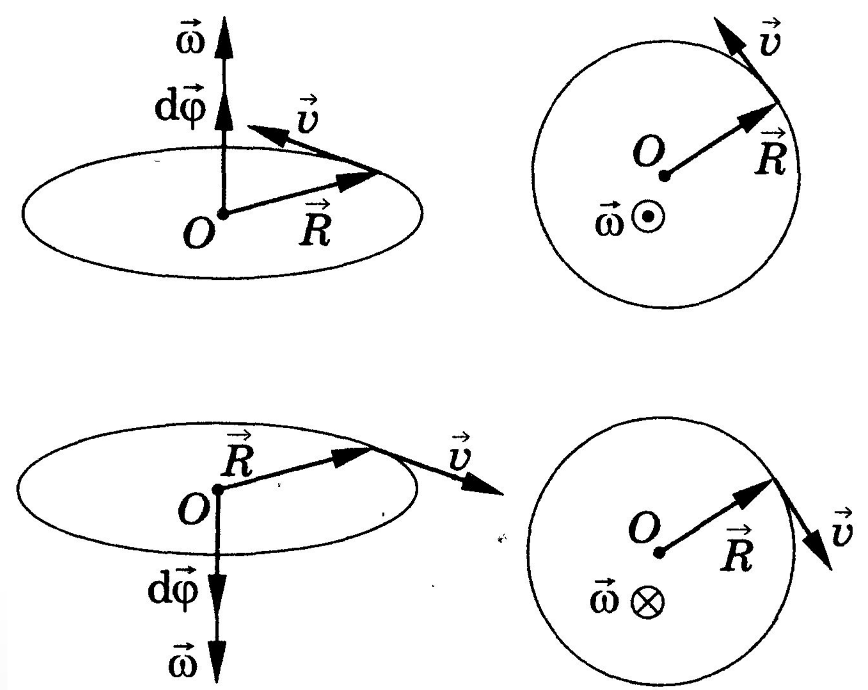
Угловая скорость

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по ***правилу правого винта***, т. е. так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$ (см. рисунок).

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Векторная величина, определяемая первой производной угла поворота тела по времени.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

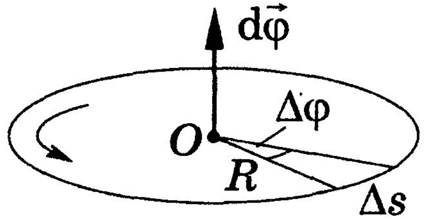


Единица измерения угловой скорости – 1 рад/с

Связь модулей линейной и угловой скоростей

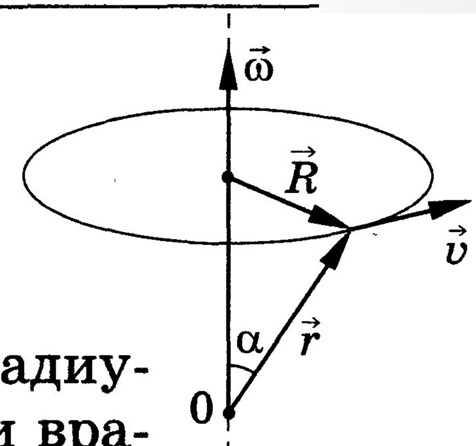
$$\boxed{v = \omega R}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R\omega$$



Связь векторов линейной и угловой скоростей

$$\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]}$$



Положение рассматриваемой точки задается радиус-вектором $\vec{r}$ (проводится из лежащего на оси вращения начала координат 0). Векторное произведение $[\vec{\omega}\vec{r}]$ совпадает по направлению с вектором $\vec{v}$ и имеет модуль, равный $\omega r \sin \alpha = \omega R$, т. е. $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$.

Псевдовекторы (аксиальные векторы)

Векторы, направления которых связываются с направлением вращения (например, $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$). Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки на оси вращения.

Равномерное движение по окружности

Движение, при котором материальная точка (тело) *за равные промежутки времени* проходит *равные по длине дуги окружности*.

Угловая скорость ω = const: $\omega = \phi/t$(ϕ – угол поворота).

Период вращения T – время, за которое материальная точка совершает один полный оборот по окружности, т. е. поворачивается на угол 2π.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

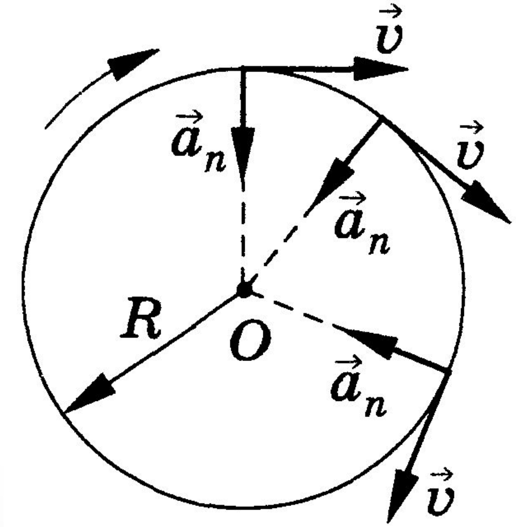
Частота вращения – число полных оборотов, совершаемых материальной точкой при равномерном ее движении по окружности, в единицу времени.

$$\boxed{n = \frac{1}{T}}$$

Характерная особенность равномерного движения по окружности

Равномерное движение по окружности — частный случай криволинейного движения.

Движение по окружности со скоростью, постоянной по модулю (v = const), **является ускоренным.** Это обусловлено тем, что при постоянном модуле направление скорости все время изменяется.



Ускорение материальной точки, равномерно движущейся по окружности

Тангенциальная составляющая ускорения при равномерном движении точки по окружности равна нулю.

$$\boxed{a_\tau = 0}$$

Нормальная составляющая ускорения (центростремительное ускорение) направлена по радиусу к центру окружности. В любой точке окружности вектор нормального ускорения перпендикулярен вектору скорости.

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

Единица измерения углового ускорения – 1 рад/с²

Пример. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением a_τ=0,5 м/с^2. Определить полное ускорение а точки на участке кривой с радиусом кривизны R=3 м, если точка движется на этом участке со скоростью v=2 м/с.

Угловое ускорение - векторная величина, определяемая первой производной угловой скорости по времени.

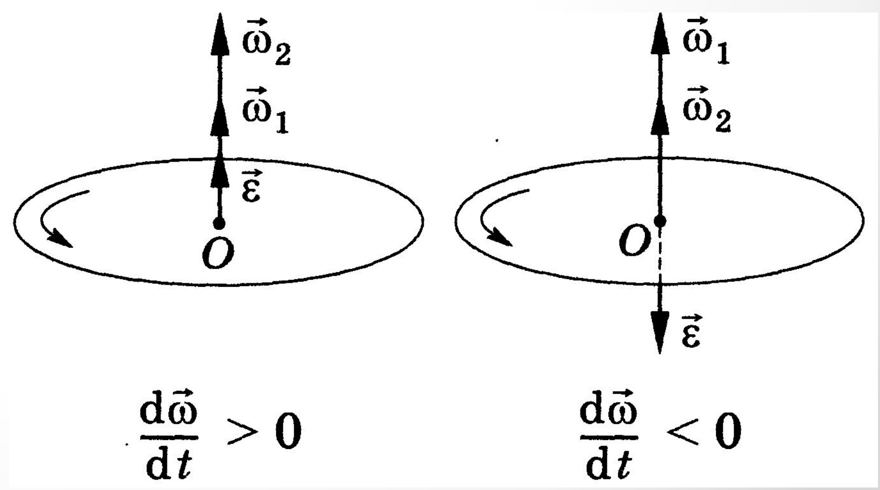
Направление вектора углового ускорения. При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного

приращения угловой скорости.

При **ускоренном движении вектор** □ε

сонаправлен вектору □ω, при **замедленном** — **противонаправлен** ему.

Вектор □ε — псевдовектор.



Связь линейных и угловых величин

$$\boxed{a_\tau = R\varepsilon} \qquad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\omega R)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\varepsilon$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 R} \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

[R — радиус окружности;
v — линейная скорость;
a_τ — тангенциальное ускорение;
a_n — линейное ускорение;
ω — угловая скорость]