Факультет Фундаментальной подготовки

Кафедра Теории электрических цепей и связи
(ТЭЦ и С)
располагается на 3,5 и 6-м этажах
В аудиториях №607, №609, №611, 510,512, 516.

Дисциплина

Общая теория связи

Лектор:

Заведующий кафедрой
Шумаков Павел Петрович

Лекция № 2

Векторные и спектральные модели сигналов в инфотелекоммуникации

Учебные вопросы:

1. Векторные модели сигналов. Обобщенный ряд Фурье.
2. Спектры периодических сигналов.
3. Спектры непериодических сигналов.
4. Теоремы о спектрах.

Литература:

Стр. 28..37; 37..40; 40..52

Используя MathCAD расчитать и построить энергетические спектры для импульсных сигналов из таблицы 2.1 на стр 45.
Четные номера : треугольный (2) и косинусоидальный (3).
Нечетные номера :
Прямоугольный (1) и SINC-образный (5).

Используя MathCAD рассчитать и построить энергетические спектры для импульсных сигналов вида:
Четные номера : пилообразный возрастающий.
Нечетные номера : пилообразный ниспдающий.

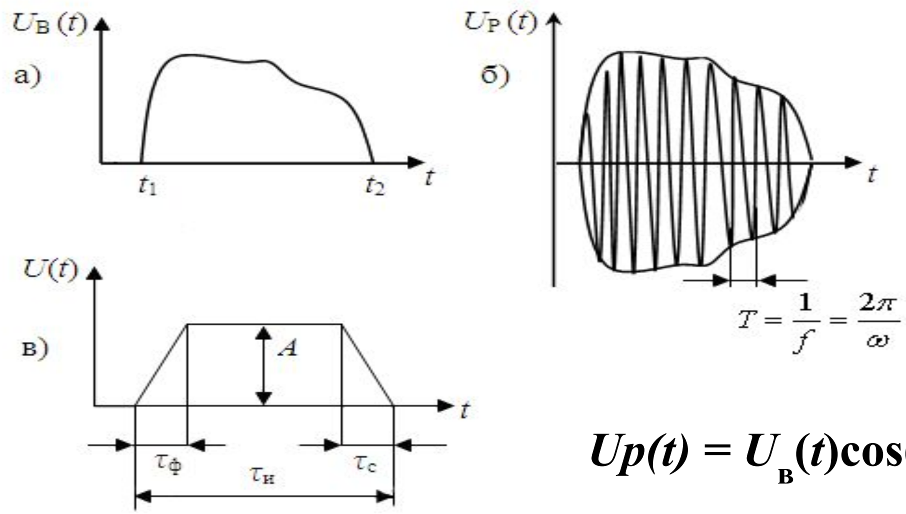
Задание на самостоятельную отработку

Теория электрической связи :учебное пособие для студентов высших учебных заведений

/Биккенин Р. Р., Чесноков М. Н. –М.:Издательский центр «Академия», 2010.

-28-37;37-40;40-52 с.

Импульсные сигналы: а) *видеоимпульсы*; б) *радиоимпульсы*



$$Up(t) = U_в(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

$U_в(t)$ — огибающая радиоимпульса

ω — опорная (несущая) частота

φ — фаза

Вопрос №1. Векторное представление сигнала. Понятие базиса, нормы, скалярного произведения сигналов, ортогональности сигналов, ортонормированного базиса сигналов.

Сигналы могут быть *одномерными* $U_1(t)$, и *многомерными* $\{U_N(t)\}$,

***Многомерный (векторный*) - сигнал образованный упорядоченным множеством одномерных сигналов $V(t) = \{U_1(t), U_2(t), \ldots, U_N(t)\}$,**
N — размерность сигнала.

Пространство сигналов

называется **пространством** сигналов. Структура пространства сигналов определяется алгебраическими и геометрическими свойствами.

Алгебраическая структура пространства сигналов

Множество сигналов образует **<u>Вещественное Линейное Пространство Сигналов L</u>** если справедливые следующие аксиомы:

1.Все сигналы при любом времени **t** принимают только вещественные значения.

2.Сумма любого числа сигналов данного множества также принадлежит этому множеству, при чем эта сумма подчиняется свойствам: для $x = S_i(t)$ $y = S_j(t)$

- ✔ $x + y = y + x$ — коммутативность;
- ✔ $x + (y + z) = (x + y) + z$ — ассоциативность;
- ✔ $x + \varnothing = x$, где $\varnothing$ — нулевой элемент;
- ✔ $x + (-x) = 0$, где $-x$ — противоположный элемент.

3. Умножение сигнала на скаляр (число) **α** определяет новый сигнал принадлежащий исходному множеству $\alpha s_i(t) \in M$.

4. Операция умножения на скаляр подчиняется свойствам:

- $\alpha(bx) = (\alpha b)x$
- $1x = x$
- $(\alpha + b)x = \alpha x + bx$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

- **Если $\boldsymbol{\alpha}$** будет произвольным **комплексным** числом, то множество сигналов образует
- **Комплексное Линейное Пространство Сигналов С.**
- Элементы структурированного пространства в математике называются точками, функциями, **векторами.**

Геометрическая структура пространства сигналов

Норма сигнала .

Эквивалентом длины вектора для аналоговых и дискретных сигналов является ***норма***

Для вещественного сигнала норма определяется :
$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_T s^2(t)dt}$$

Для комплексного сигнала норма определяется :
$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_T s(t)s^*(t)dt}$$

Норма подчиняется следующим аксиомам:

$$\|s(t)\| \geq 0 \qquad \|\alpha \cdot s(t)\| = \|\alpha\| \cdot \|s(t)\| \qquad \|s_1(t) + s_2(t)\| \leq \|s_1(t)\| + \|s_2(t)\|$$

Если $\boldsymbol{S}$ — это вектор, то норма – это его длина или расстояние от конца вектора до начала координат.

Энергия сигнала

Пусть $\boldsymbol{s(t)}$ — напряжение на резисторе с сопротивлением в 1 Ом, тогда $\boldsymbol{s^2(t)}$ — мгновенная мощность, а квадрат нормы — есть энергия, выделяемая на резисторе за время $\boldsymbol{T}$.

$$\|s(t)\|^2 = \int_T s^2(t)dt = E_s$$

Геометрическая структура пространства сигналов

Метрика пространства сигналов

Для усовершенствовании структуры пространства вводится ***расстояние*** между его элементами, которое называют также ***метрикой***.

Каждой паре элементов пространства ставится в соответствие положительное число, которое трактуется как расстояние между элементами. В качестве расстояния используется функционал $d(x,y) = R$, называемый ***метрикой*** и обладающий следующими свойствами:

- $d(x,y) \geq 0$ **и** $d(x,y) = 0$, только если $x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$ – свойство симметрии;
- $d(x,y) < d(x,z) + d(z,y)$ – неравенство треугольника.

В качестве метрики можно выбрать величину $$d(x,y) = \|x - y\|$$

Линейное метрическое пространство с квадратичной нормой обозначается:

Вещественное L_2 **комплексное** C_2

Геометрическая структура пространства сигналов

Скалярное произведение сигналов

Найдем энергию суммы двух сигналов u(t) и v(t).

$$\|u(t)+v(t)\|^2 = \int_T u(t)^2 dt + \int_T v(t)^2 dt + 2\int_T u(t)v^*(t)dt$$

Если сигналы рассматривать как вектора **U** и **V** получим

$$|U+V|^2 = |U|^2 + |V|^2 + 2\cdot|U|\cdot|V|\cos(\varphi)$$

Где $(U,V) = |U|\cdot|V|\cos(\varphi)$ скалярное произведение двух векторов

$\varphi = \angle UV$ угол между векторами

Сопоставляя сигналы с векторами в пространстве L_2 получим что скалярное произведение двух сигналов

$$(u(t),v(t)) = \int_T u(t)v^*(t)dt = \|u(t)\|\cdot\|v(t)\|\cdot\cos(\varphi)$$

Свойства скалярного произведения сигналов

Для комплексных сигналов скалярное произведение должно удовлетворять следующим условиям:

$(x, y) = (y, x)^*$, где знак * означает комплексно сопряженную величину;

$(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

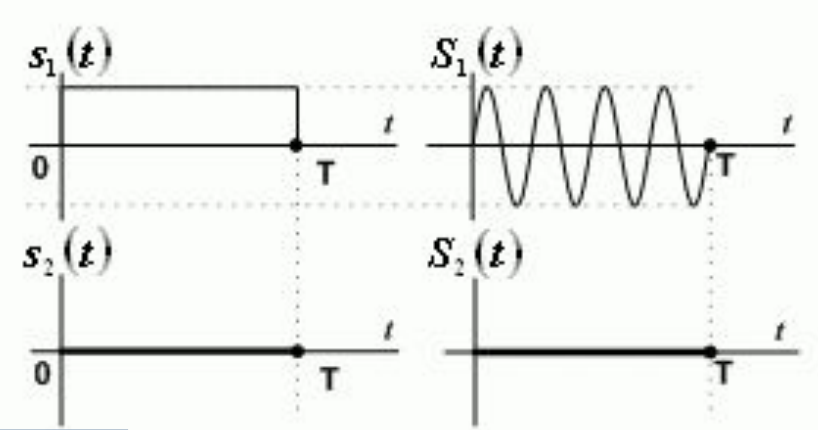
$(x, x) \geq 0$.

Ортогональность двух сигналов

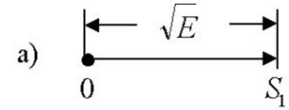
Если $$\varphi = \angle UV = 90\left[\text{ãðàäóñî â}\right] = {}^{\pi}\!/_{2}\left[\text{ðàäèàí}\right]$$

$$\cos({}^{\pi}\!/_{2}) = 0$$

то скалярное произведение двух сигналов равно нулю , значит взаимная энергия этих сигналов равна нулю , а такие сигналы - ***ортогональные.***



Сигналы с пассивной паузой

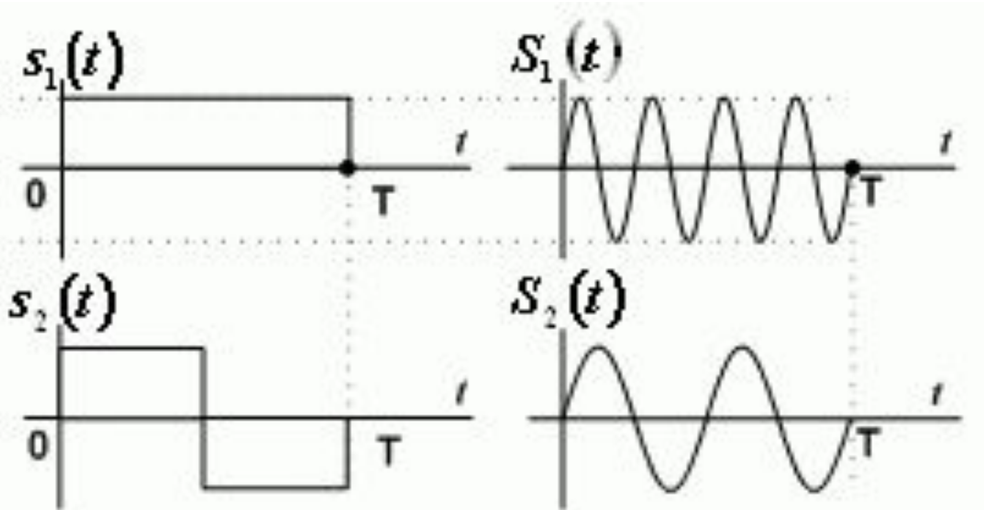


Если **$S_2(t)$ = 0** *то имеем* **систему передачи с пассивной паузой**

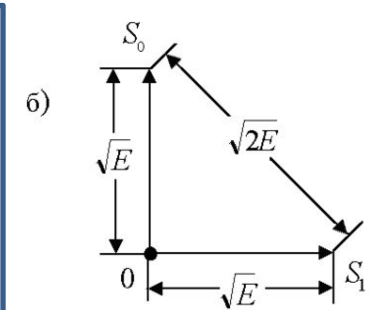
$S_1(t) = U_c \sin(\omega_0 t + \phi)$, $t \in [0,T]$, $S_1(t)$ = 0

$$(S_0, S_1) = \frac{1}{T}\int_0^T S_0(t)S_1(t)dt = 0$$

$$d^2(S_0(t), S_1(t)) = \int_0^T S_0{}^2(t)dt = E_1$$



Ортогональные сигналы



$$S_1(t) = U_c \cos(\omega_1 t + \phi_1), \qquad t \in [0,T], \qquad S_2(t) = U_c \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Пусть $\omega_1 = 2\pi k_1/T$, $\omega_2 = 2\pi k_2/T$, где k_1 и k_2 — целые числа, ϕ_1 и ϕ_2 принимают любые значения. Тогда:

$$(S_1, S_2) = \frac{1}{T}\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt = \frac{1}{T}U_1 \cdot U_2 \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}k_1 t + \varphi_1\right)\cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}k_2 t + \varphi_2\right)dt = 0$$

$$d^2(S_1(t), S_2(t)) = \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \int_0^T S_1^2(t)dt + \int_0^T S_2^2(t)dt - 2\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt = E_0 + E_1 = 2E,$$

Базисные сигналы

В линейном пространстве сигналов можно определить совокупность **линейно независимых** сигналов $\{e_i(t)\}$ таких, что весовая сумма $\sum \alpha_i e_i = 0$ возможна только при одновременном равенстве нулю всех коэффициентов **α.** Эти сигналы называются **координатным базисом**. **Базисные сигналы попарно ортогональные.**

Обобщенный ряд Фурье

Если выбраны сигналы координатного базиса, то любой сигнал **s(t)** в линейном пространстве может быть представлен **взвешенной суммой ортогональных сигналов координатного базиса** $\sum C_i e_i(t) = s(t)$

Такое представление сигнала называется обобщенный ряд Фурье.

Французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830

Весовые коэффициенты этого ряда рассчитываются как скалярное произведение сигнала s(t) и соответствующего *i*- того базисного сигнала ei(t):

$$C_i = (s(t), e_i(t)) = \frac{1}{\|e_i\|^2} \int_T s(t) e_i^*(t) dt = \|s(t)\| \cdot \|e_i(t)\| \cdot cos(\varphi) = \|s(t)\| \cdot cos(\varphi)$$

Совокупность коэффициентов обобщенного ряда Фурье **{Ci}** называется **спектром** сигнала **s(t)** в базисе ортогональных сигналов $\{e_i(t)\}$

Выводы по первому вопросу

1.Сигналы в радиотехнике рассматриваются как проявления электромагнитного поля в элементах радиотехнических цепей в виде колебаний напряжения или тока.

2.Обобщенной математической моделью сигналов является их описание как элементов функционального пространства (векторов).

3.Вещественные и комплексные сигналы можно рассматривать как элементы множества векторного линейного нормированного метрического пространства.

4.Скалярное произведение двух сигналов по физическому смыслу представляет собой взаимную энергию между двумя сигналами , действующими суммарно на сопротивление в один Ом.

5.Скалярное произведение двух сигналов определяется углом между ними. Если угол между двумя сигналами равен 90 градусов то скалярное произведение равно нулю, и такие сигналы являются ортогональными.

6. Набор ортогональных сигналов называется координатным базисом пространства сигналов.

7. При известном базисе , любой сигнал можно представить взвешенной суммой сигналов ортогонального базиса в виде обобщенного ряда Фурье. Весовые коэффициенты этого ряда называются спектром сигнала.

Вопрос 2. Спектры периодических сигналов.

- Периодическим называют сигнал, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени – ***T***
- Модель такого сигнала имеет вид $$s(t)=s(t+k\cdot T),$$

  где **T**- период повторения, а **F=1/T**-частота повторения периодического сигнала (ПС)
- Основной математический аппарат спектрального анализа таких сигналов –**<u>ряд Фурье в базисе гармонических сигналов с кратными частотами.</u>**

Формы спектрального представления периодического сигнала

Квадратурная

$$s(t+k\cdot T)=s_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right\}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}S(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt-\text{àì ïëèò óäà ñèí ôàçí ûõ ãàðì îí èê}$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}S(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt-\text{àì ïëèò óäà êâàäðàò óðí ûõ ãàðì îí èê}$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}S(t)dt-\text{ïî ñò îÿí í àÿ ñî ñò àâëÿþ ù àÿ}$$

Амплитудно – фазовая форма ряда Фурье

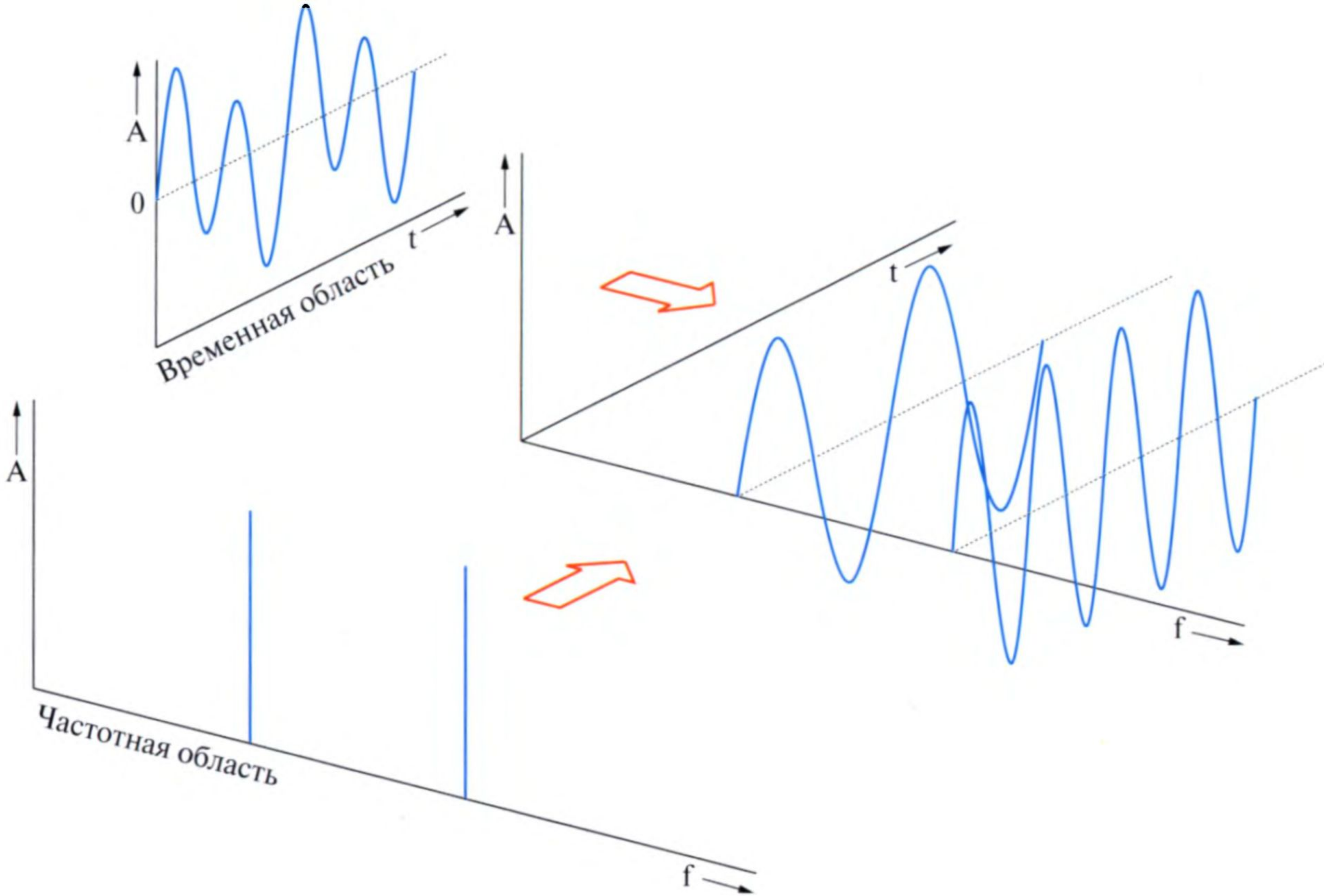
$$s_T(t) = s(t - k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(x_k - \varphi_k)$$

$$a_k \cos x_k + b_k \sin x_k = \sqrt{a_k^{\,2} + b_k^{\,2}} \cos(x_k - \varphi_k)$$

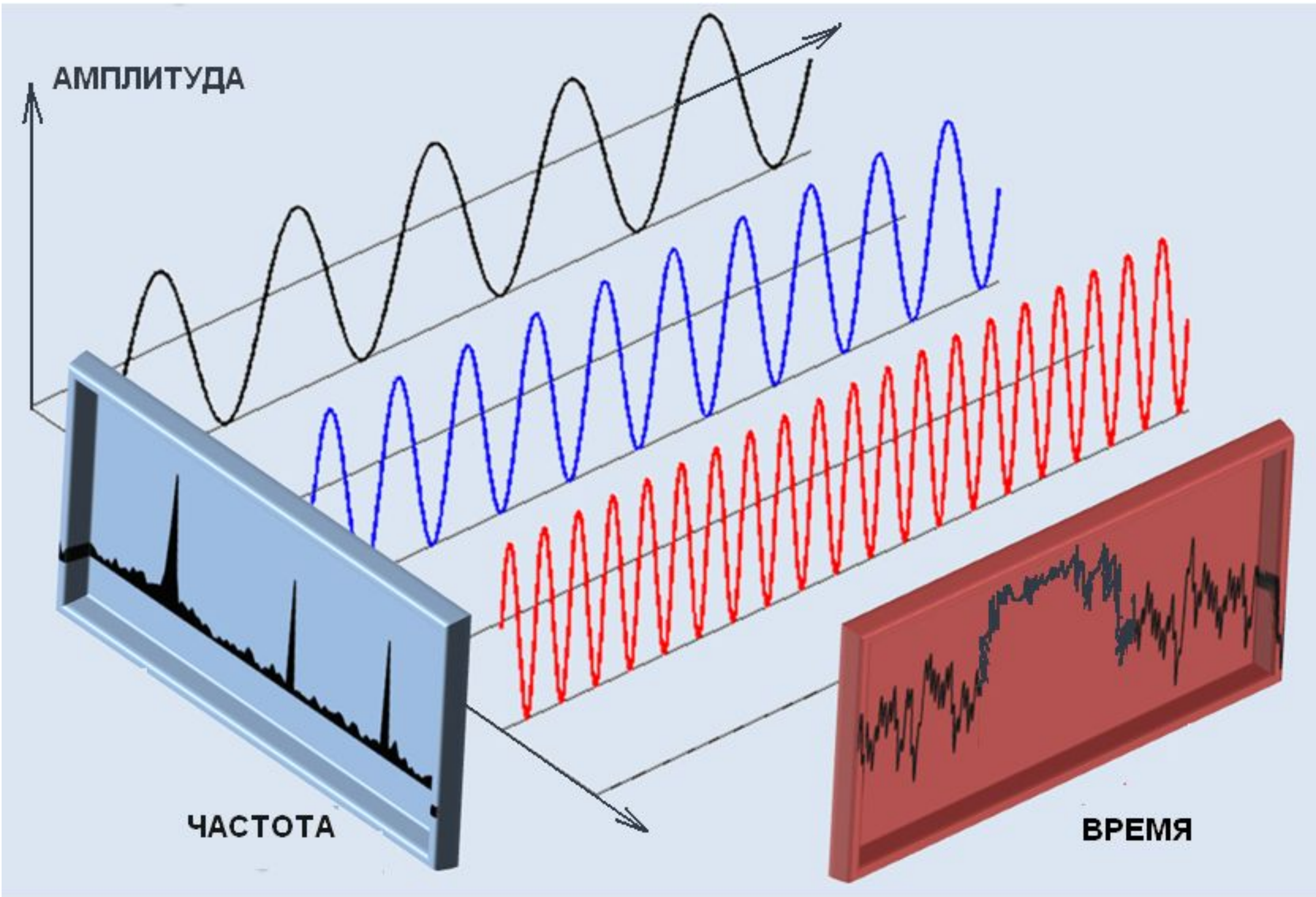
$$x_k = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t = k \cdot 2\pi f_1 \cdot t = k \cdot \omega_1 \cdot t = \omega_k t;$$

$\sqrt{a_k^{\,2} + b_k^{\,2}} = A_k -$ À× Ñ $\varphi_k = arctg \dfrac{b_k}{a_k} -$ Ô× Ñ

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k) \qquad b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$$



2. Сигналы, наблюдаемые во временной и частотной областях


АМПЛИТУДА
ЧАСТОТА
ВРЕМЯ

Комплексная форма ряда Фурье

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2}$$

$$s(t + k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{T}t} + e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \right) + \frac{b_k}{j2} \left(e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \right) \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{j\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + jb_k) e^{-j\frac{2\pi}{T}t}$$

$$s(t + k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{-j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Комплексная форма ряда Фурье

$$\dot{C}_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} S(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

$$\dot{A}_k = a_k - jb_k, \quad \dot{A}_{-k} = a_k + jb_k$$

$$a_k = \frac{1}{2}\left(\dot{A}_k + \dot{A}_{-k}\right) \qquad b_k = j\frac{1}{2}\left(\dot{A}_k + \dot{A}_{-k}\right)$$

ì î äóëü $\left|\dot{C}_k\right| = \frac{A_k}{2}$ – À×Ñ

àðãóì åí ò $\varphi_k = \arg \dot{C}_k$ – Ô×Ñ

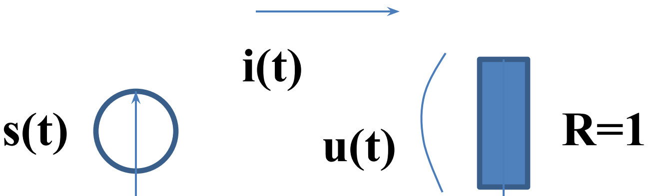
АЧС –четная функция частоты (обладает симметрией в области положительных и отрицательных частот)

ФЧС – нечетная функция (обладает центральной симметрией)

Мощность и энергия периодического сигнала.

Основными энергетическими характеристиками вещественного сигнала **s(t)** являются его мощность и энергия.

Мгновенная мощность определяется как квадрат мгновенного значения **s(t)**:



$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = i(t)R\cdot i(t) = i^2(t) =$$

$$= u(t)\cdot\frac{u(t)}{R} = u^2(t) = s^2(t)$$

Энергия сигнала на интервале **t_2, t_1** определяется как интеграл от мгновенной мощности:

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt \qquad \text{Åñëè} \quad t_2 - t_1 = T \qquad E_s = \int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T s^2(t)\,dt$$

Средняя мощность сигнала **s(t)** на интервале **t_2, t_1**.

$$\frac{E_s}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt = \overline{s^2(t)} \qquad \text{Åñëè} \quad t_2 - t_1 = T \qquad \frac{E_s}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt = \overline{s^2(t)}$$

Равенство Парсеваля.

Периодические сигналы имеют дискретные спектры. Спектр периодического сигнала представляет собой совокупность гармонических сигналов с частотами, кратными частоте повторения сигнала. Амплитуды гармоник спектра зависят от временной формы, а начальные фазы от временной задержки.

Средняя мощность гармонического колебания за период его повторения пропорциональна квадрату действующего значения и не зависит от начальной фазы. Квадрат действующего значения гармонического сигнала равен половине квадрата амплитуды сигнала.

$$A_n^2 = {A_{m\,n}^2}\big/{2}$$

Средняя за период повторения Энергия периодического сигнала определяется как интеграл от мгновенной мощности усредненный за период повторения.

$$E_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2$$

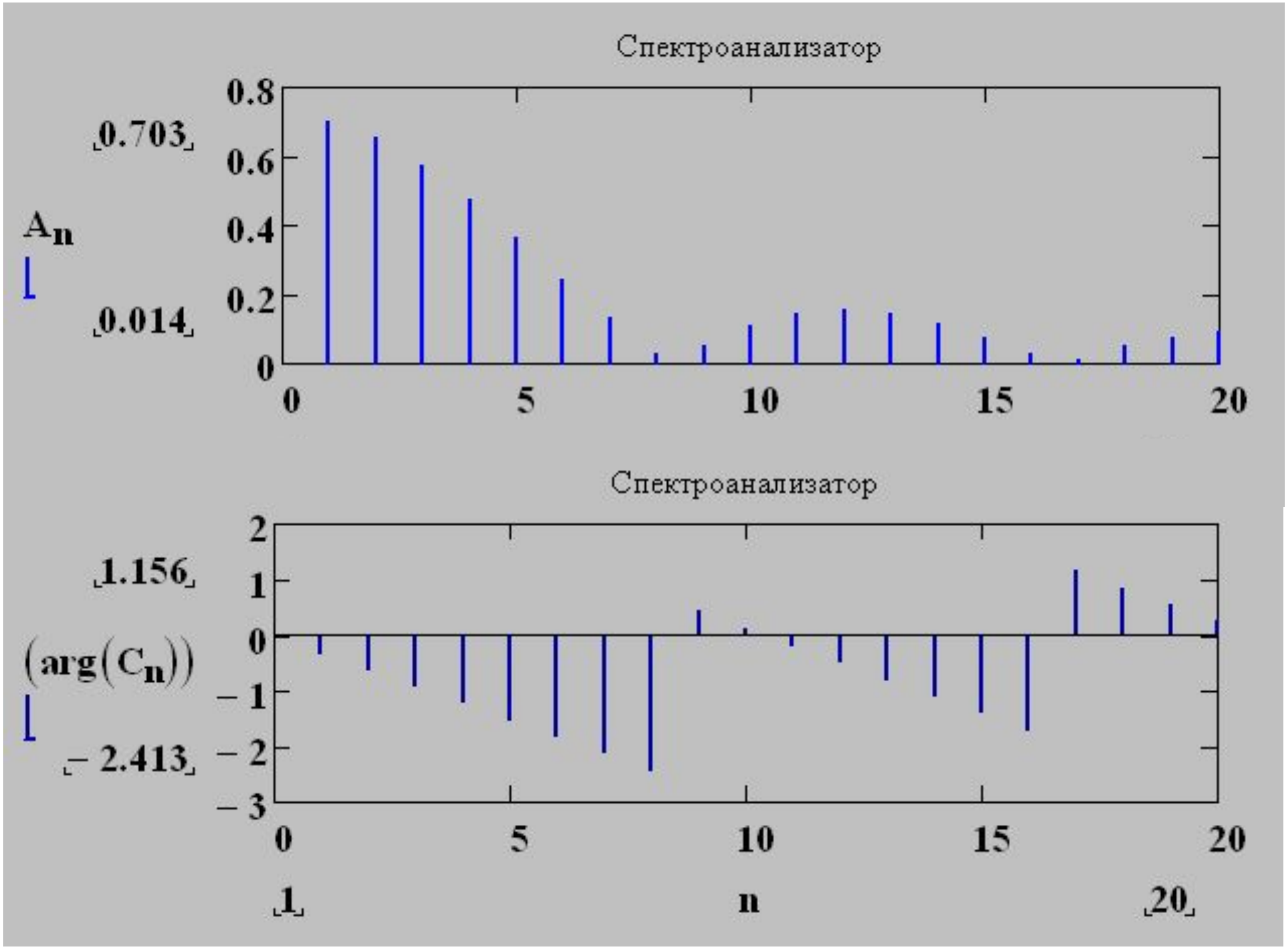
Энергия сигнала, представленного во временной области должна равняться сумме энергий всех его спектральных составляющих, т.е. сумме энергий постоянной составляющей и энергии всех гармоник спектра.

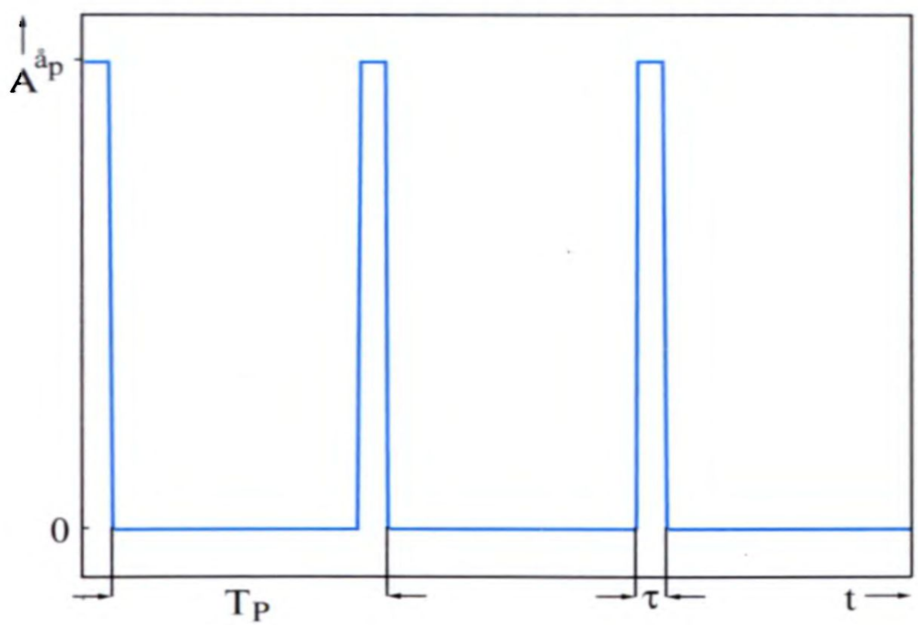
Данное соотношение называется **равенством Парсеваля** для вещественных сигналов.

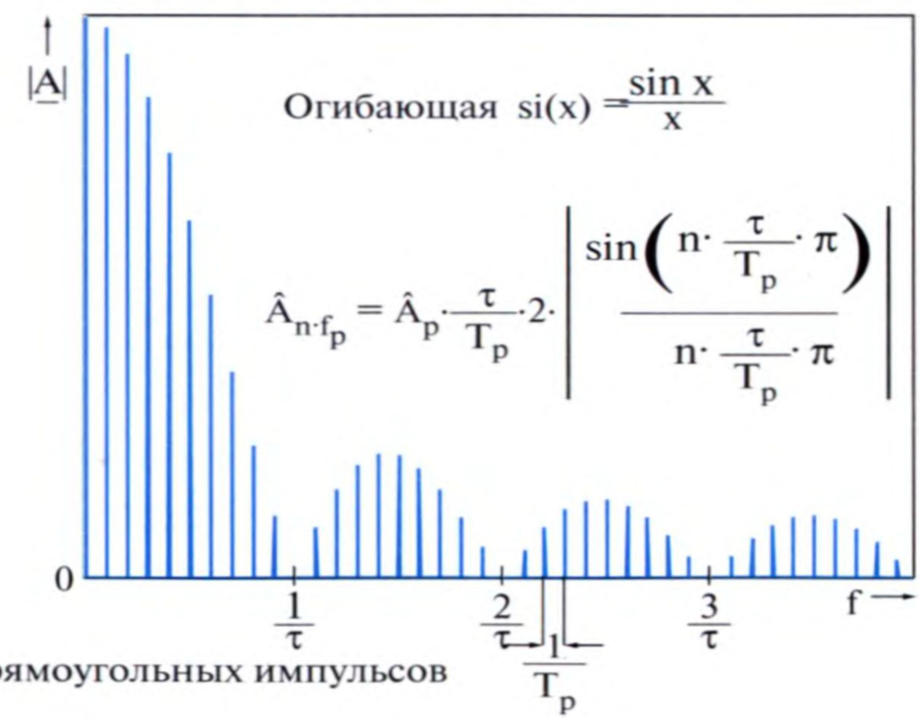
$$A_n = {A_{m\,n}}\big/{\sqrt{2}}$$

Равенство Парсеваля

$$\frac{1}{T}\int_0^T |s(t)|^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$


Спектроанализатор
0.8
0.703
0.6
A_n
0.4
0.014
0.2
0
0
5
10
15
20
Спектроанализатор
2
1.156
1
$(\arg(C_n))$
0
−1
−2.413
−2
−3
0
5
10
15
20
1
n
20





Сигнал в виде периодических прямоугольных импульсов

Периодические сигналы во временной и частотной областях (спектр амплитуд)

Вопрос 3. Спектры непериодических сигналов. Теоремы о спектрах.

В подавляющем большинстве случаев в теории и технике связи приходится иметь дело с сигналами, которые по существу являются непериодическими. К таким сигналам аппарат рядов Фурье не применим.

Модель непериодического сигнала как предельного случая периодического сигнала , когда период стремится к бесконечности

Устремим в периодическом сигнале $T \to \infty$ или $f_1 = 1/T = \omega_1/2\pi \to 0$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta\omega$$

где $\Delta\omega = \omega_1 = [k\omega_1 - (k-1)\omega_1]$ — разность между частотами соседних гармоник

$$S(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \dot{A}_k T = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\dot{A}_k}{\Delta\omega} 2\pi - \text{ñïåêòðàëüíàÿ ïëîòíîñòü ñèãíàëà}$$

Вопрос 3. Спектры непериодических сигналов.

В подавляющем большинстве случаев в теории и технике связи приходится иметь дело с сигналами, которые по существу являются непериодическими. К таким сигналам аппарат рядов Фурье не применим.

Модель непериодического сигнала как предельного случая периодического сигнала , когда период стремится к бесконечности

Устремим в периодическом сигнале $T \to \infty$ или $f_1 = 1/T = \omega_1/2\pi \to 0$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta\omega$$

где $\Delta\omega = \omega_1 = [k\omega_1 - (k-1)\omega_1]$ — разность между частотами соседних гармоник

$$S(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \dot{A}_k T = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\dot{A}_k}{\Delta\omega} 2\pi - \text{ñï åêò ðàëüí àÿ ïëî ò í î ñò üñèãí àëà}$$

Прямое и обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{- Î Ï Ô}$$

$$s(t) \xleftrightarrow[\text{Î Ï Ô}]{\text{Ï Ï Ô}} \dot{S}(j\omega)$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{- Ï Ï Ô}$$

Обратное преобразование Фурье **для сигнала *s(t)* -** ***операция синтеза*****, поскольку с ее помощью сигнал восстанавливается (синтезируется) из спектральных составляющих.**

Прямое преобразование Фурье – ***операция анализа*** **сигнала на основе определения его спектральных составляющих.**

Физический смысл спектральной плотности сигнала

Учитывая чётность модуля $S(\omega)$ и нечётность фазы $\varphi(\omega)$, обратное преобразование Фурье можно записать следующим образом

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |S(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

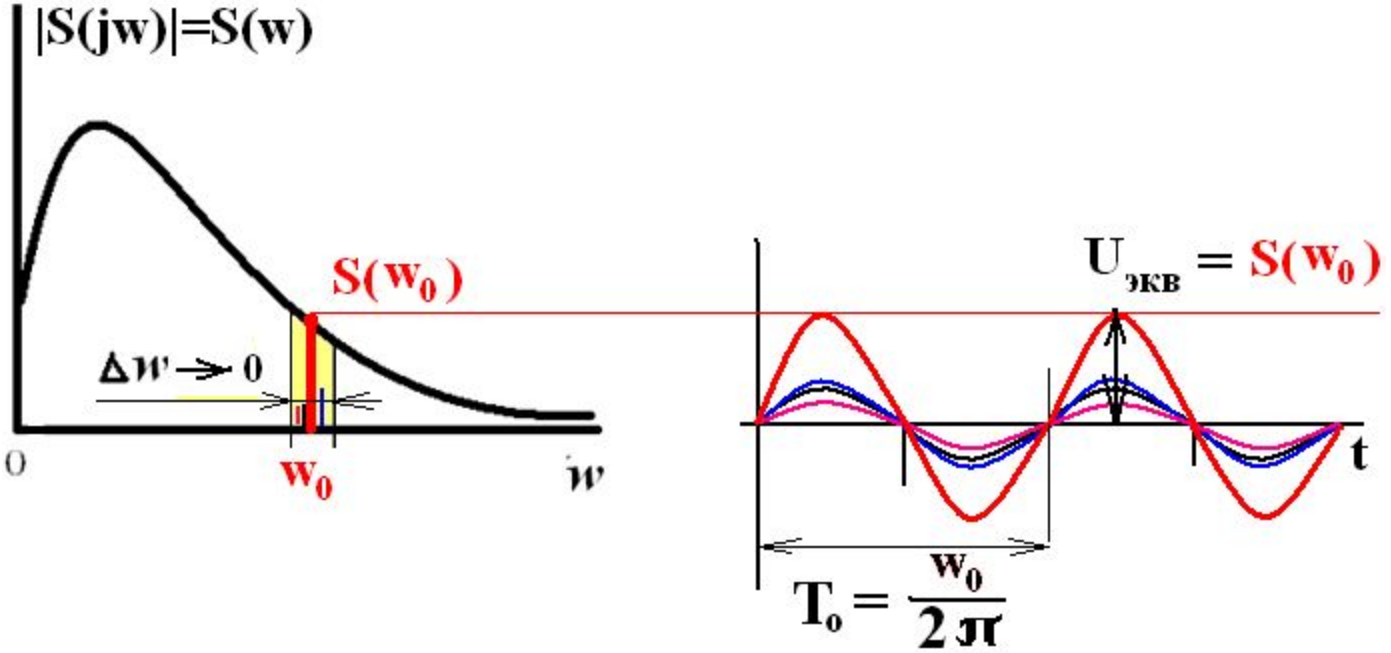
$$\frac{1}{2\pi} S(j\omega) d\omega e^{j\omega t} \qquad \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{c}\frac{A_m}{d\omega} \qquad \frac{1}{c} = \pi$$

Спектральная плотность сигнала является комплексной амплитудой эквивалентной гармоники на соответствующей опорной частоте .

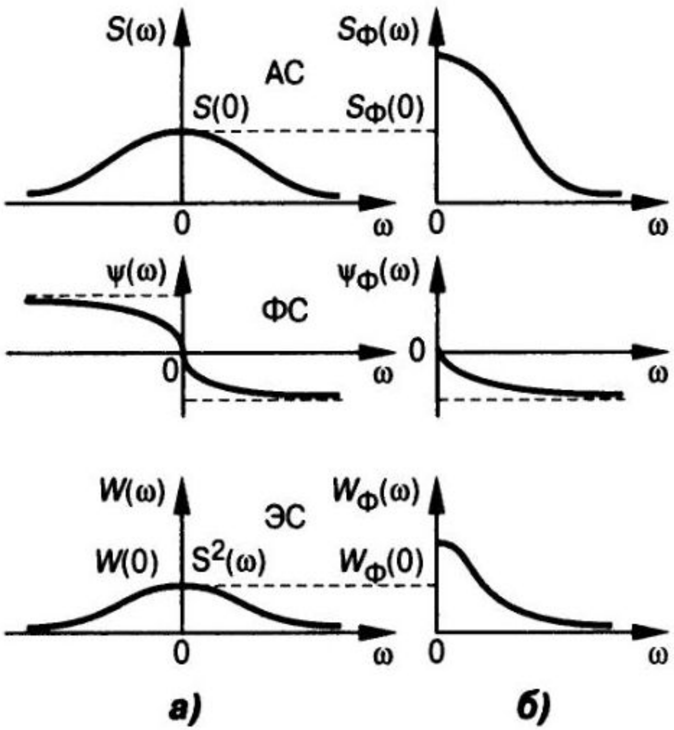
Эквивалентная гармоника есть результат когерентного сложения бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами расположенными в бесконечно малом по частоте диапазоне в районе выбранной (опорной) частоты.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ и ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ГАРМОНИКА



Математический и Физический спектр непериодического сигнала

Сопоставим комплексную и амплитудно-фазовую формы ОПФ.
Учитывая чётность модуля $S(\omega)$ и нечётность фазы $\varphi(\omega)$, обратное преобразование Фурье можно записать следующим образом



$$s(t) = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_0^{\infty} 2S(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]d\omega$$

$$s(t) = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot e^{j\cdot[\omega t+\varphi(\omega)]}d\omega$$

$$S_{\Phi}(\omega) = 2S(\omega)1(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega); & \omega \ge 0 \\ S(0); & \omega = 0 \\ 0; & \omega < 0 \end{cases}$$

Вопрос 4. Свойства преобразования Фурье

Теорема сложения спектров гласит: спектр суммы колебаний равен сумме спектров слагаемых колебаний.

Теорема временного сдвига (запаздывания) формулируется следующим образом: при сдвиге колебания во времени (изменении начального момента отсчёта времени) спектральная плотность амплитуд сохраняется постоянной, а спектр фаз изменяется на величину, пропорциональную частоте и времени сдвига с учётом его знака.

Теорема смещения (модуляции): умножение колебания *S(t)* на $e^{j\omega_0 t}$ **приводит к смещению его спектра на величину** ω_0**.**

Теорема об изменении масштаба: растяжение колебания во времени ($a>1$**) влечёт за собой сжатие его частотного спектра и увеличение спектральной плотности амплитуд. Сжатие колебания во времени (**$a<1$**) приводит к расширению его частотного спектра и уменьшению спектральной плотности амплитуд.**

Теорема о свёртке: свёртка двух колебаний $S_1(t)$ **и** $S_2(t)$ **соответствует перемножению их спектров.**

Вопрос 4. Свойства преобразования Фурье

№ п/п	Название теоремы	Временное представление	Спектральное представление
1	**Теорема сложения**	$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$	$S(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega)$
2	**Теорема временного сдвига**	$S_1(t) = S(t \mp t_0)$	$S_1(j\omega) = S(j\omega)e^{\mp j\omega t_0}$
3	**Теорема смещения (модуляции)**	$S_1(t) = S(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$S_1(j\omega) = S(j(\omega \mp \omega_0))$
4	**Теорема об изменении масштаба**	$S_1(t) = S\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$S_1(j\omega) = aS(ja\omega)$
5	**Теорема о дифференцировании**	$S_1(t) = \dfrac{dS(t)}{dt}$	$S_1(j\omega) = j\omega S(j\omega)$
6	**Теорема об интегрировании**	$S_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} S(t)dt$	$S_1(j\omega) = \left(\dfrac{1}{j\omega}\right)S(j\omega)$
7	**Теорема о свёртке**	$S(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau)S_2(t-\tau)d\tau = S_1(t) * S_2(t)$	$S(j\omega) = S_1(j\omega)S_2(j\omega)$
8	**Преобразование Фурье**	$\begin{cases} S_1(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ S(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt \end{cases}$	

Лекция № 3

Энергетические и корреляционные модели непериодических сигналов.

Учебные вопросы:

1. **Энергетические модели Т-финитных сигналов.**
2. **Распределение энергии в спектре непериодического сигнала**
3. **Эффективная ширина спектра сигнала.**
4. **Корреляционные модели детерминированных сигналов**
5. **Свертка двух сигналов во временной и частотной области**

Литература:

Стр. 53..54;

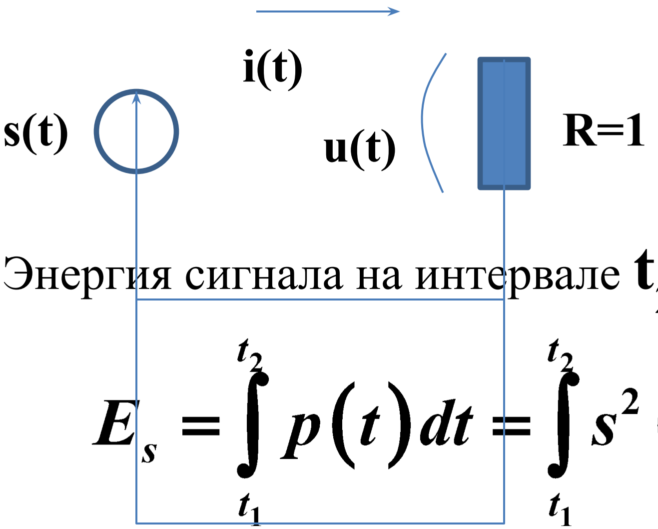
Используя MathCAD расчитать и построить АКФ
Четные номера : Прямоугольный (1) и SINC-образный (5)
Нечетные номера : треугольный (2) и косинусоидальный (3).

Используя MathCAD рассчитать и построить энергетические спектры для импульсных сигналов с использованием обратного преобразования Фурье от АКФ сигнала
Четные номера : пилообразный возрастающий.
Нечетные номера : пилообразный ниспадающий.

Вопрос 1. Энергетические модели Т-финитных сигналов.

Основными энергетическими характеристиками вещественного сигнала **s(t)** являются его мощность и энергия.

Мгновенная мощность определяется как квадрат мгновенного значения **s(t)**:



$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=i(t)R\cdot i(t)=i^2(t)=$$

$$=u(t)\cdot\frac{u(t)}{R}=u^2(t)=s^2(t)$$

Энергия сигнала на интервале t_2, t_1 определяется как интеграл от мгновенной мощности:

$$E_s=\int_{t_1}^{t_2}p(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}s^2(t)dt$$

Средняя мощность сигнала **s(t)** на интервале t_2, t_1.

$$\frac{E_s}{t_2-t_1}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}s^2(t)dt=\overline{s^2(t)}$$

Вопрос2. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала

Рассмотрим выражение скалярного произведения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \quad , \qquad \text{в котором } f(t)=g(t)=s(t).$$

Равенства Парсеваля и обобщенная формула Рэлея.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)d\omega = E_s$$

Энергетический спектр сигнала

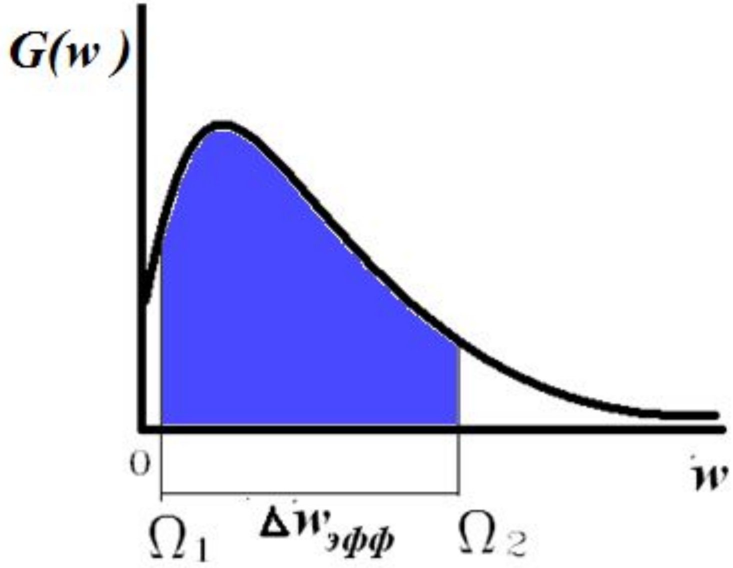
$$\dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega) = \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 = G(\omega)$$

Распределение энергии в спектре вещественного непериодического сигнала

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)S(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [S(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [S(\omega)]^2 d\omega = E_s$$

Вопрос 3. Эффективная ширина спектра сигнала

Полоса частот $\Delta\omega_{эфф}$ физического спектра сигнала в пределах которой находится основная часть энергии спектральных гармоник (например >90%)



$$\frac{E_{\Delta\omega}}{E_s} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2}^{\Omega_1} |S(\omega)|^2\, d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\, d\omega} > 90\% E_s$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega_1}^{\Omega_2} G(\omega)\, d\omega = 0.9 E_s$$

$$\Delta\omega = \Omega_2 - \Omega_1$$

Вопрос№4. Корреляционные модели детерминированных сигналов

Корреляция – количественная характеристика степени подобия (похожести) двух сигналов.

Корреляционная функция.

Корреляционная функция – зависимость корреляции двух в общем случае комплексных сигналов от временного сдвига τ между ними.

Для сигналов с ограниченной энергией.

$$B_{u,v}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)v^*(t+\tau)dt.$$

Для сигналов с конечной средней мощностью.

$$B_{u,v}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)v^*(t+\tau)dt.$$

Для периодических сигналов .

$$B_{u,v}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)v^*(t+\tau)dt.$$

Автокорреляционная функция вещественного сигнала (АКФ).

Это корреляционная функция двух одинаковых сигналов - самого сигнала **s(t)** и его копии, задержанной во времени **s(t-τ),** рассматриваемая как функция времени задержки **τ**.

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(t)dt.$$

Свойства АКФ вещественного сигнала R(τ).

- **АКФ** определяет ***взаимную энергию*** сигнала и его копии, задержанной во времени и измеряется в Джоулях.
- **АКФ** ***действительная*** и ***четная функция*** сдвига во времени **τ** : **R(τ)=R(- τ)** . График АКФ симметричен .
- **АКФ** достигает максимума при **τ=0** и максимальное значение АКФ равно ***ЭНЕРГИИ*** сигнала **Es.** Поэтому **R(0)=Es>R(τ)**

Связь АКФ сигнала R(τ) с его энергетическим спектром W(ω).

АКФ $R(\tau)$ и энергетический спектр сигнала $\dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega)=|\dot{S}(\omega)|^2=W(\omega)$ ***ОДНОЗНАЧНО*** связаны парой преобразований Фурье.

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Однозначно восстановить сигнал $s(t)$ по его АКФ $R(\tau)$ невозможно, так как энергетический спектр $G(\omega)$, а значит и АКФ не содержат информацию о фазовом спектре сигнала.

АКФ периодического вещественного сигнала s(t+kT).

Это действительная периодическая корреляционная функция , измеряемая единицами средней мощности за период повторения (ВАТТЫ), четная по аргументу τ , максимумы повторяются через период повторения **T.**

$$R_s(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t+\tau)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t-\tau)s(t)dt.$$

АКФ периодического сигнала связана с его линейчатым спектром через ряд Фурье:

$$R_s(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|C_k\right|^2 e^{j\frac{2\cdot\pi}{T}k\tau}=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=0}^{\infty}A_k{}^2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot k\cdot\tau\right).$$

Примеры:

Пример1.

Свертка двух сигналов во временной и частотной области

Под сверткой понимается математическая операция , которая выполняется в соответствии со следующим алгоритмом:

1. **Второй сигнал отображается зеркально симметрично.**
2. **Второй сигнал задерживается по времени от – ∞ до +∞ .**
3. **Для каждого времени задержки находится произведение с первым сигналом.**
4. **Результаты произведений , полученные при каждом времени задержки суммируются.**

$$y_{s,g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)g(t-\tau)d\tau = s(t)\otimes g(t).$$

Согласно свойства преобразования Фурье свертке во временной области соответствует перемножение спектров двух сигналов в частотной области.

$$y_{s,g}(t)=s(t)\otimes g(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y_{s,g}(j\omega)=S(j\omega)\cdot G(j\omega).$$

Если второй сигнал является зеркальной комплексно-сопряженной копией первого сигнала , то результатом свертки таких сигналов является АКФ сигнала.

Свертка сигналов

Сигнал на выходе линейной системы

ННУ

ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

$\delta(t)$

ЛС (фильтр)

$g(t)$

$s(t)$

$y(t)=s(t)\otimes g(t)$ СВЕРТКА

Частотная характеристика линейной системы

$$S_y(j\omega)=S_s(j\omega)\cdot K(j\omega)$$

$$K(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\left|K(j\omega)\right|\cdot e^{j\cdot arg[K(j\omega)]}$$

$$\left|K(j\omega)\right|=\sqrt{Re^2[K(j\omega)]+Im^2[K(j\omega)]}$$

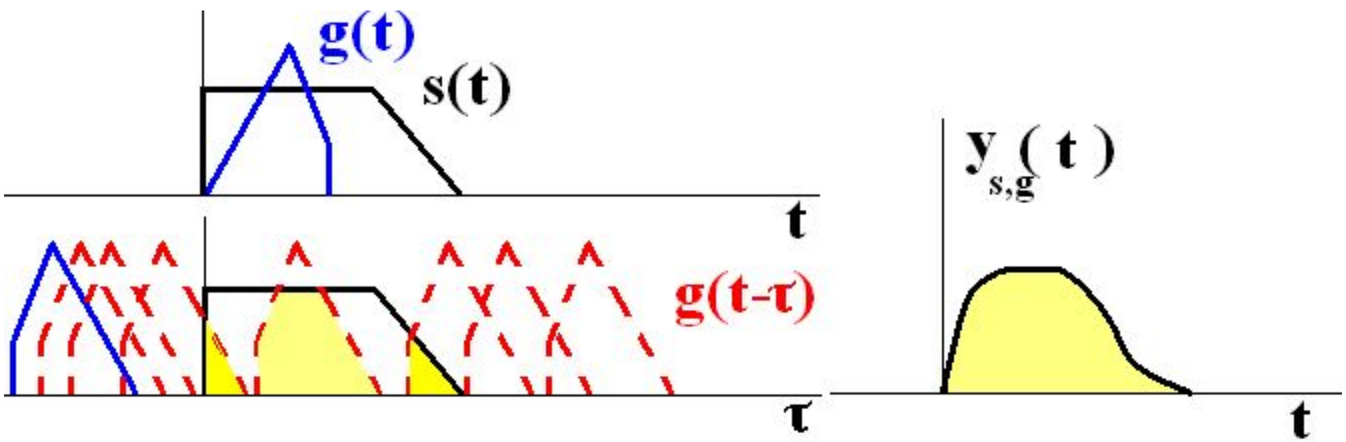
$$arg[K(j\omega)]=\psi(\omega)=arctg\frac{Im[K(j\omega)]}{Re[K(j\omega)]}$$

Свертка двух сигналов во временной и частотной области

Под сверткой понимается математическая операция , которая выполняется в соответствии со следующим алгоритмом:

1. **Второй сигнал отображается зеркально симметрично.**
2. **Второй сигнал задерживается по времени от – ∞ до +∞ .**
3. **Для каждого времени задержки находится произведение с первым сигналом.**
4. **Результаты произведений , полученные при каждом времени задержки суммируются.**

$$y_{s,g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)g(t-\tau)d\tau = s(t)\otimes g(t).$$



Свойства свертки

коммутативность

$$s(t)\otimes g(t)=g(t)\otimes s(t).$$

$$y_{s,g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau)g(t-\tau)d\tau=y_{g,s}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)s(t-\tau)d\tau.$$

дистрибутивность

$$s(t)\otimes\left[g(t)+u(t)\right]=s(t)\otimes g(t)+s(t)\otimes u(t).$$

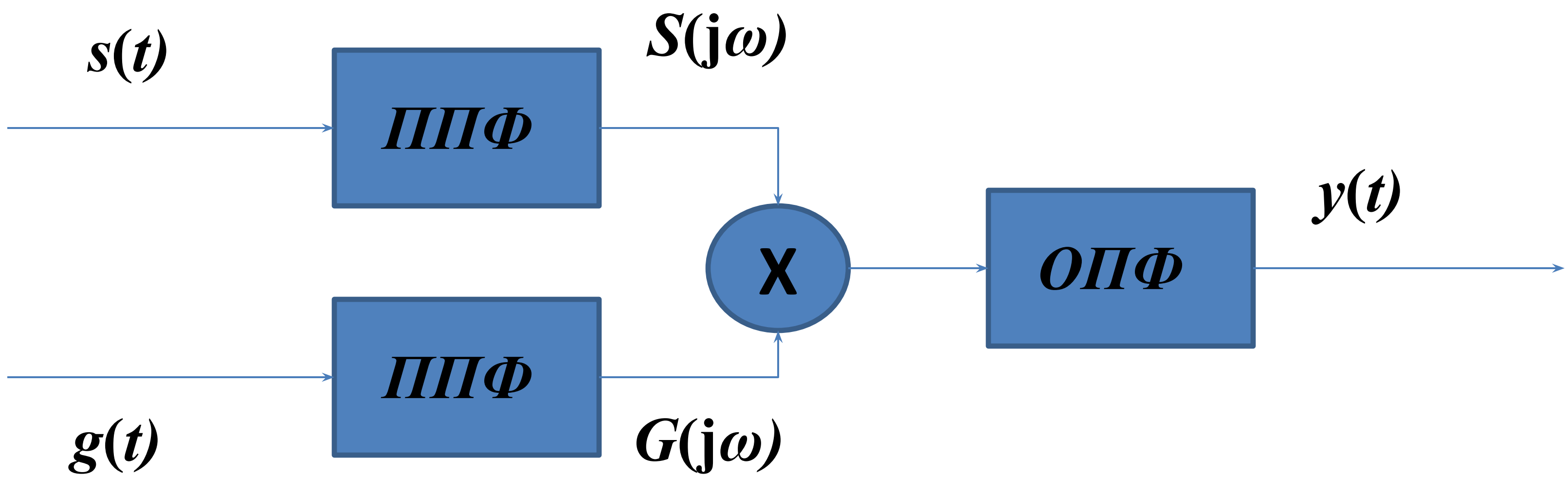
ассоциативность

$$s(t)\otimes\left[g(t)\otimes u(t)\right]=\left[s(t)\otimes g(t)\right]\otimes u(t).$$

Выполнение свертки в частотной области

Согласно свойства преобразования Фурье свертке во временной области соответствует перемножение спектров двух сигналов в частотной области.

$$y_{s,g}(t) = s(t) \otimes g(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y_{s,g}(j\omega) = S(j\omega) \cdot G(j\omega).$$

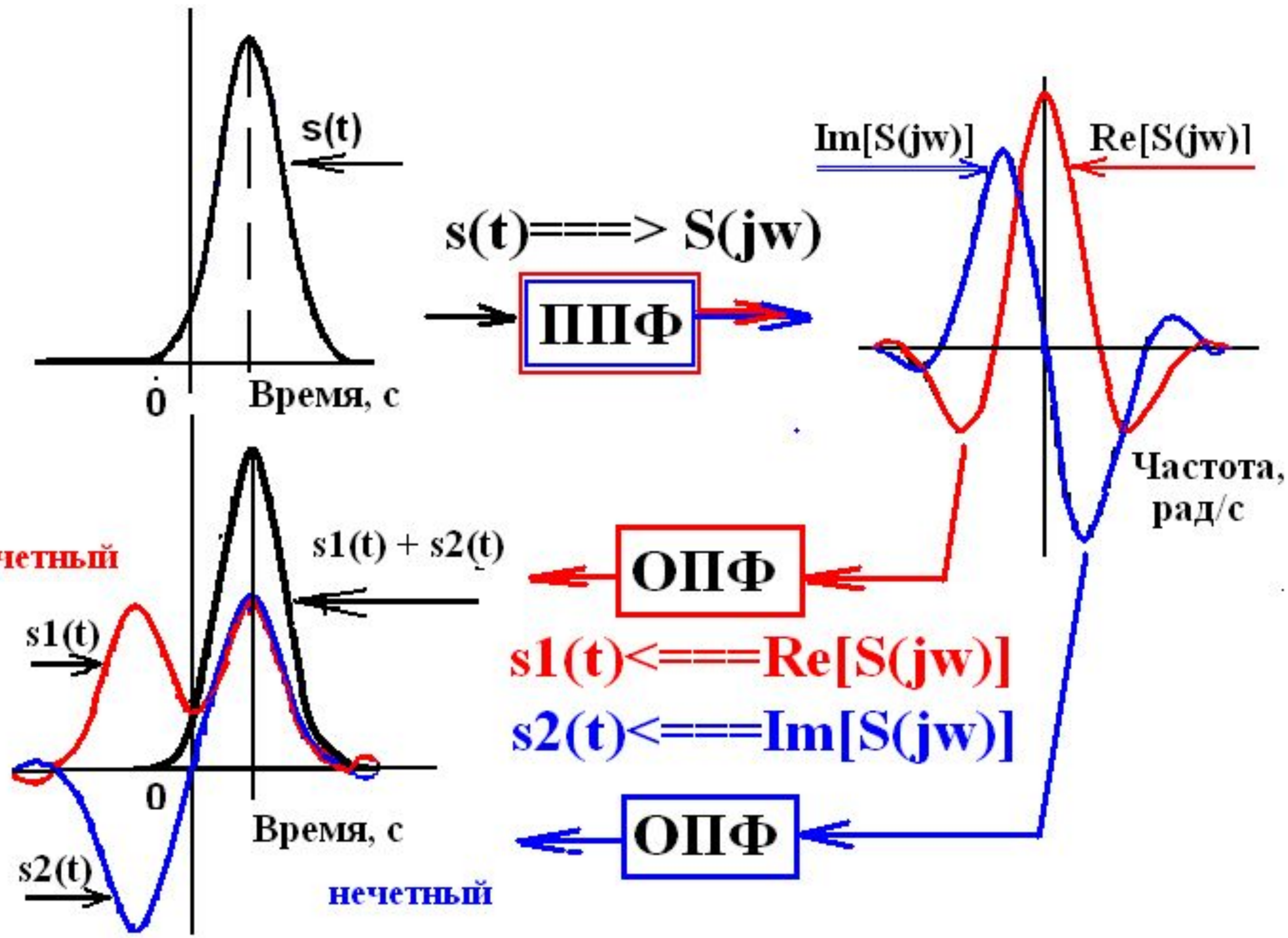


Если второй сигнал является зеркальной комплексно-сопряженной копией первого сигнала , то результатом свертки таких сигналов является АКФ сигнала.

Вопрос 4. Аналитический сигнала

Комплексное представление вещественного сигнала

$$s(t) = Re\left[s(t)\right] \qquad u(t) = U \cdot cos(\omega t + \varphi) = Re\left[U \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}\right]$$



Сигнал, сопряженный с вещественным сигналом.

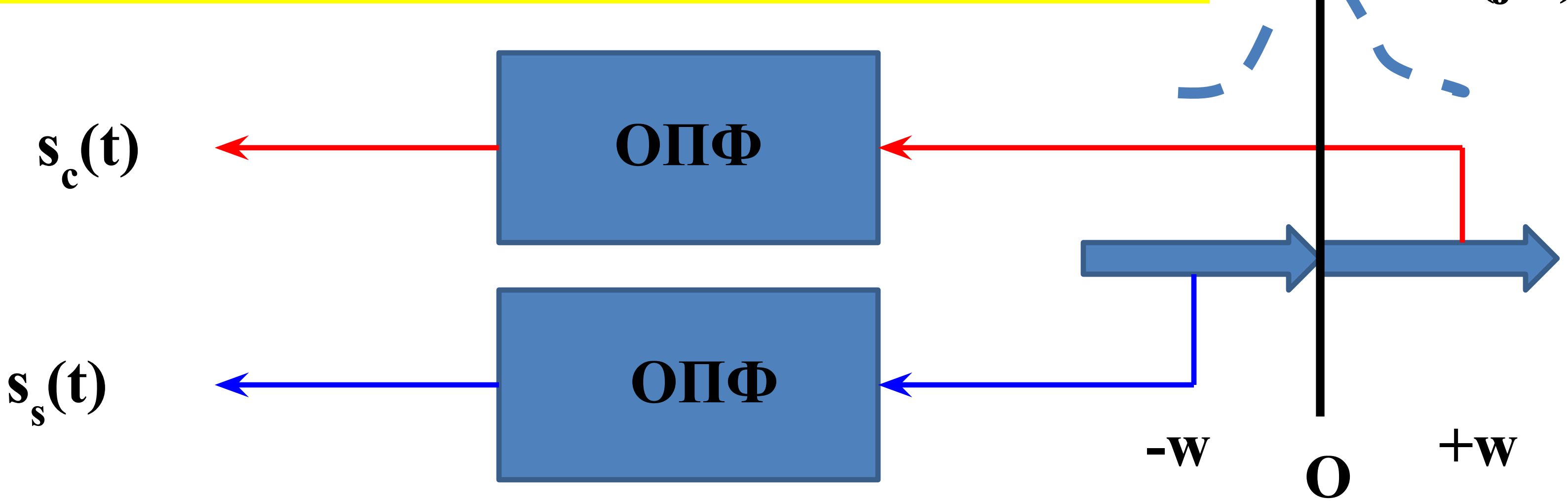
$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=s_c(t)+s_s(t)$$

Аналитический сигнал, отображающий вещественный сигнал

$$\dot{z}_S(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=Re\left[\dot{z}_S(t)\right]+j\cdot Im\left[\dot{z}_S(t)\right]$$

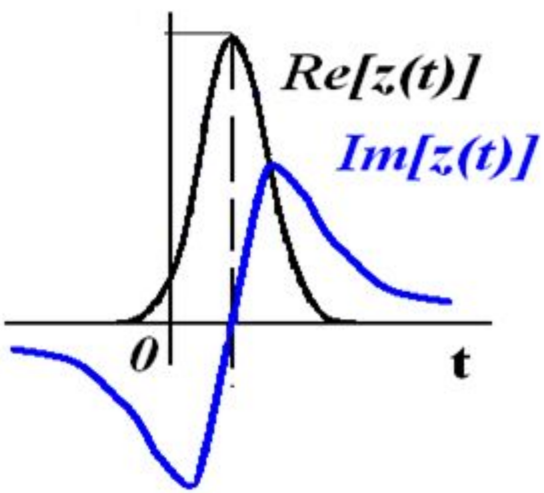
$$\dot{z}_S(t)=s(t)+j\cdot\bar{s}(t) \qquad \dot{z}_s^{*}(t)=s(t)-j\cdot\bar{s}(t)$$

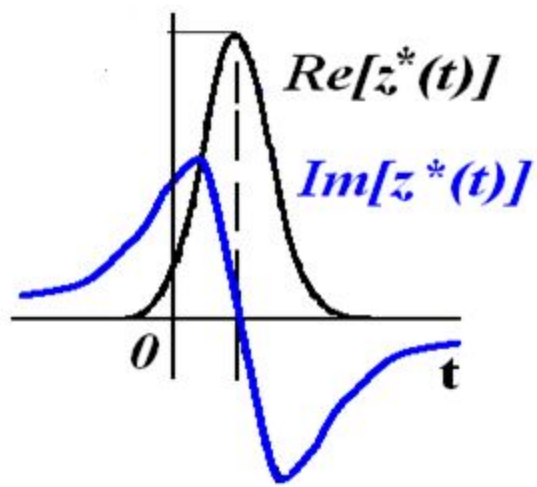
$\bar{s}(t)$ *квадратурное дополнение аналитического сигнала.*

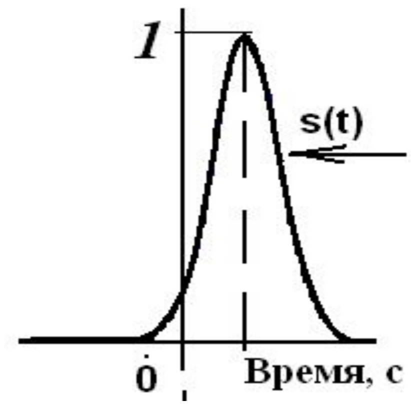


Представление вещественного сигнала с использованием аналитического сигнала

$$s(t)=\frac{z_S(t)+z_S^*(t)}{2}=Re\left[z_s(t)\right]$$







Реальная и мнимая части спектра произвольных каузальных сигналов связаны преобразованием Гильберта.

Вещественный сигнал и его квадратурное дополнение связаны преобразованием Гильберта

Преобразование Гильберта есть свертка сигнала и ядра **$1/\pi t$**

$$s(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \bar{s}(\tau)\cdot\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{t-\tau}\right]d\tau = -\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{s}(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

$$\bar{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\cdot\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{t-\tau}\right]d\tau = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

Реальная и мнимая части спектра произвольных каузальных сигналов связаны преобразованием Гильберта.

$$Z_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z_s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = S(j\omega) + j\overline{S}(j\omega) =$$

$$Z_s(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ 2 \cdot S(j\omega), & \omega \ge 0 \end{cases}$$

$$\overline{S}(jw) = -j \cdot signum(w) \cdot S(jw)$$