

Лекция 1

Содержание

- **Электрический заряд**
- **Закон Кулона**
- **Электростатическое поле**
- **Напряжённость поля. Линии напряженности**
- **Работа сил электростатического поля**
- **Потенциал. Эквипотенциальные поверхности**
- **Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом**
- **Энергия взаимодействия зарядов**
- **Поток напряженности электрического поля**
- **Теорема Гаусса для электростатического поля**

Электрический заряд частицы является одной из основных, первичных ее характеристик. Ему присущи следующие *фундаментальные свойства*:

- 1) электрический заряд существует в двух видах: как положительный, так и отрицательный;
- 2) в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется, это утверждение выражает закон сохранения электрического заряда;
- 3) электрический заряд является релятивистски-инвариантным: его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.
- 4) все заряды в природе кратны заряду электрона: $q = N e$, где N - целое.

Точечным зарядом является заряженное тело, геометрическими размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Закон Кулона (1785 г.) устанавливает, что сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов q_1 и q_2 , находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга (рис.1), определяется выражением:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (1.1)$$

где \vec{e}_r - это орт радиус-вектора, направленный вдоль линии, соединяющей точечные заряды, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$, постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ называется электрической постоянной. Заряд q выражается в кулонах [Кл].

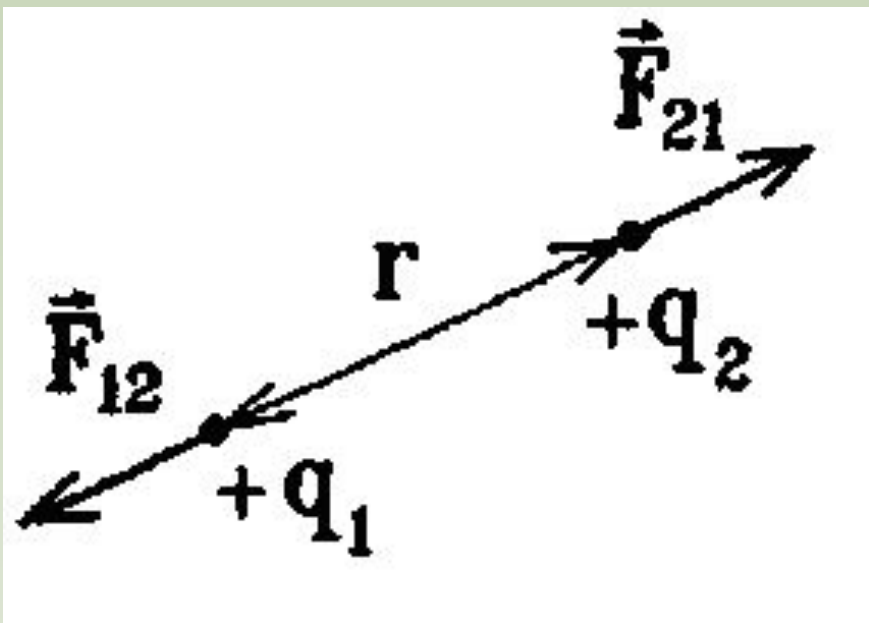


Рис.1

Согласно современным представлениям, взаимодействие между зарядами осуществляется через поле.

Всякий электрический заряд изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства - создает **электрическое поле**.

Это проявляется в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, «*пробный*», заряд q_0 испытывает действие силы.

Тогда величину электрического поля можно определить по величине кулоновской силы $F_{кул}$, с которой поле действует на пробный заряд q_0 . Но само поле заряда q не должно зависеть от величины q_0 .

Поэтому электрическое поле принято характеризовать **вектором напряженности** \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{кул}}}{q_0}$$

- это векторная величина, равная силе, с которой поле действует на единичный пробный заряд (рис.2).

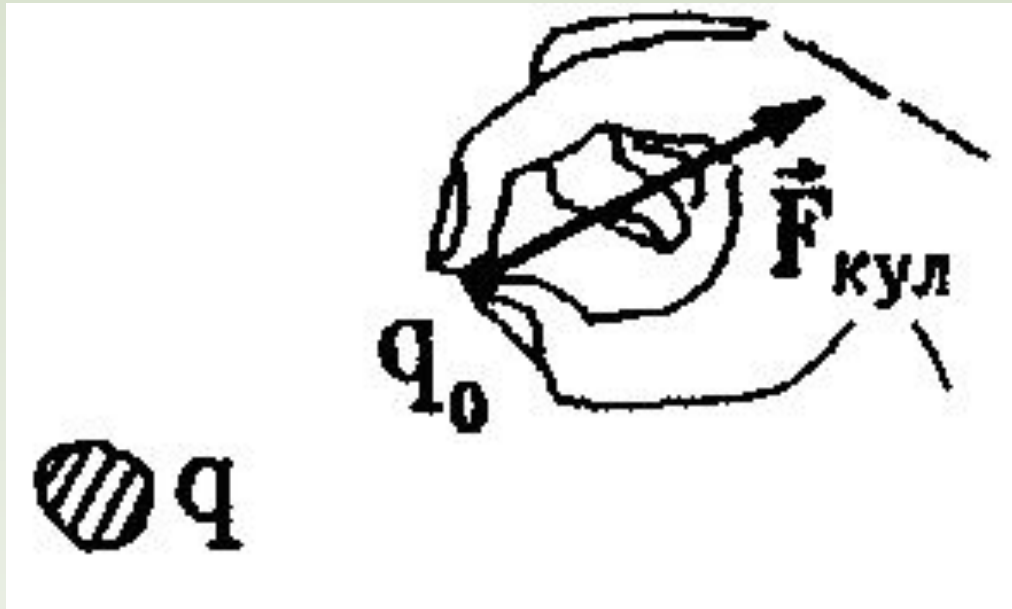


Рис.2

Тогда напряженность поля неподвижного точечного заряда q на расстоянии r от него можно представить как

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r. \quad (1.2)$$

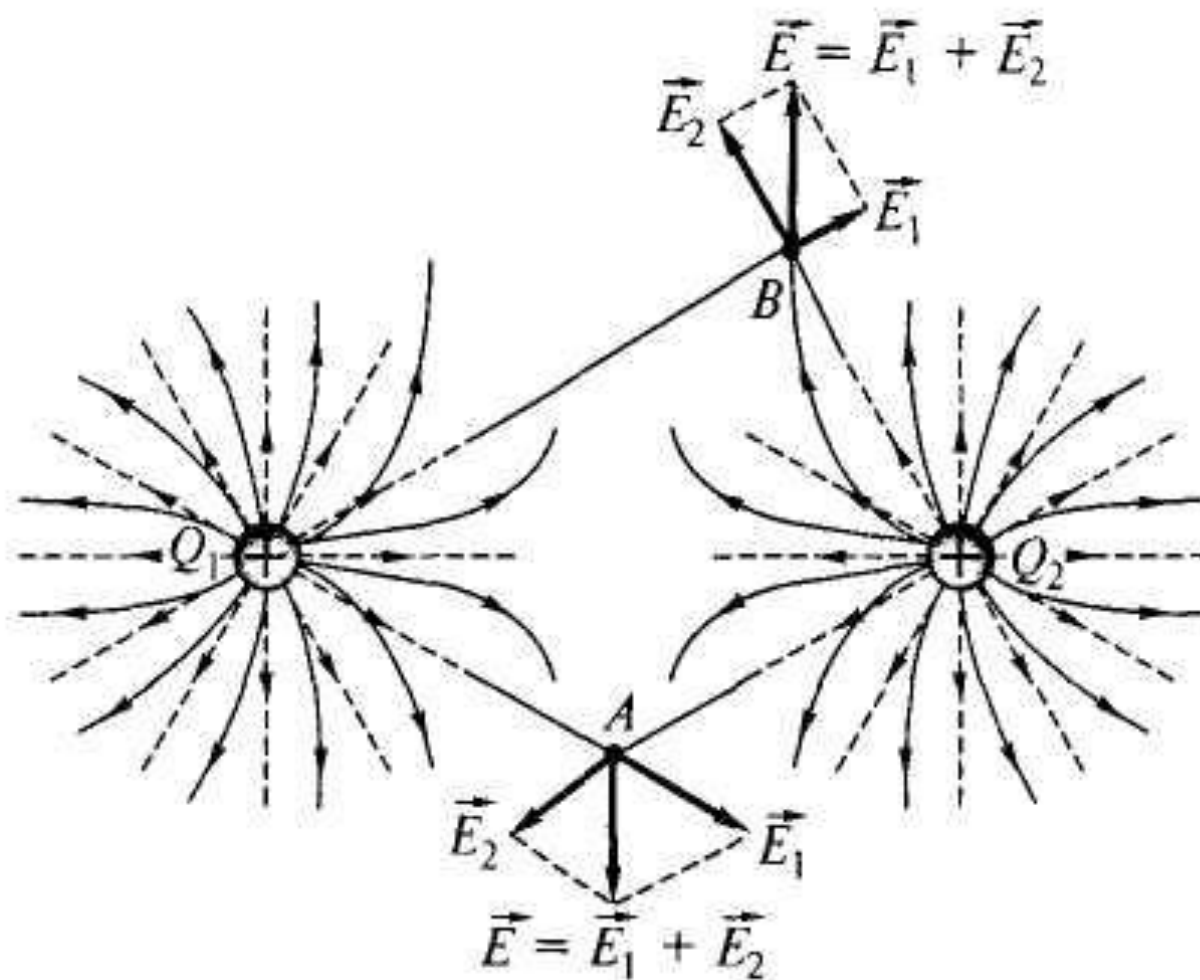
Напряженность поля \vec{E} выражается в вольтах на метр (В/м).

Принцип суперпозиции. Напряженность поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавали бы каждый из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}, \quad (1.3)$$

где r_i расстояние между зарядом q_i , и интересующей нас точкой поля.

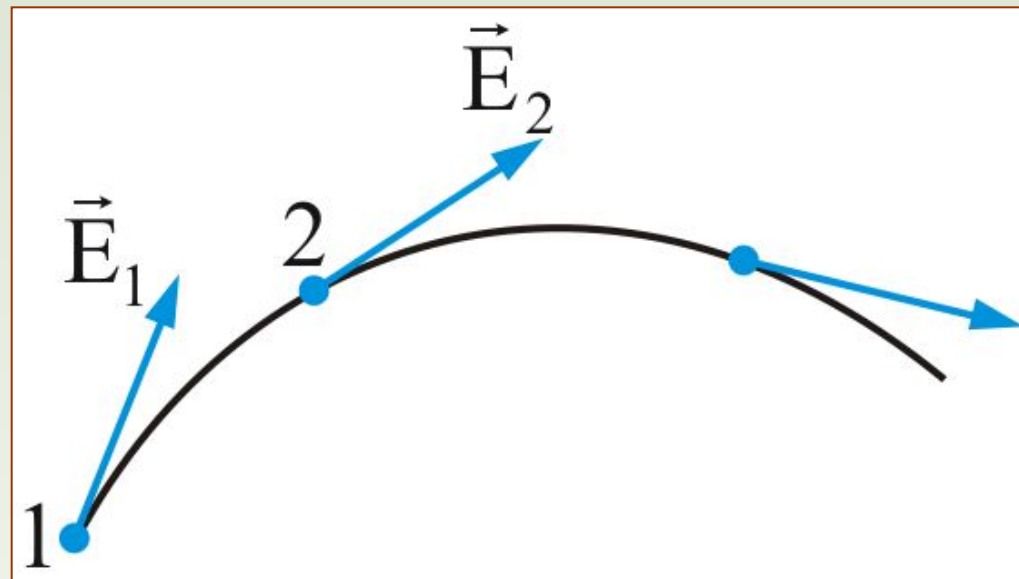
Принцип суперпозиции электрических полей:

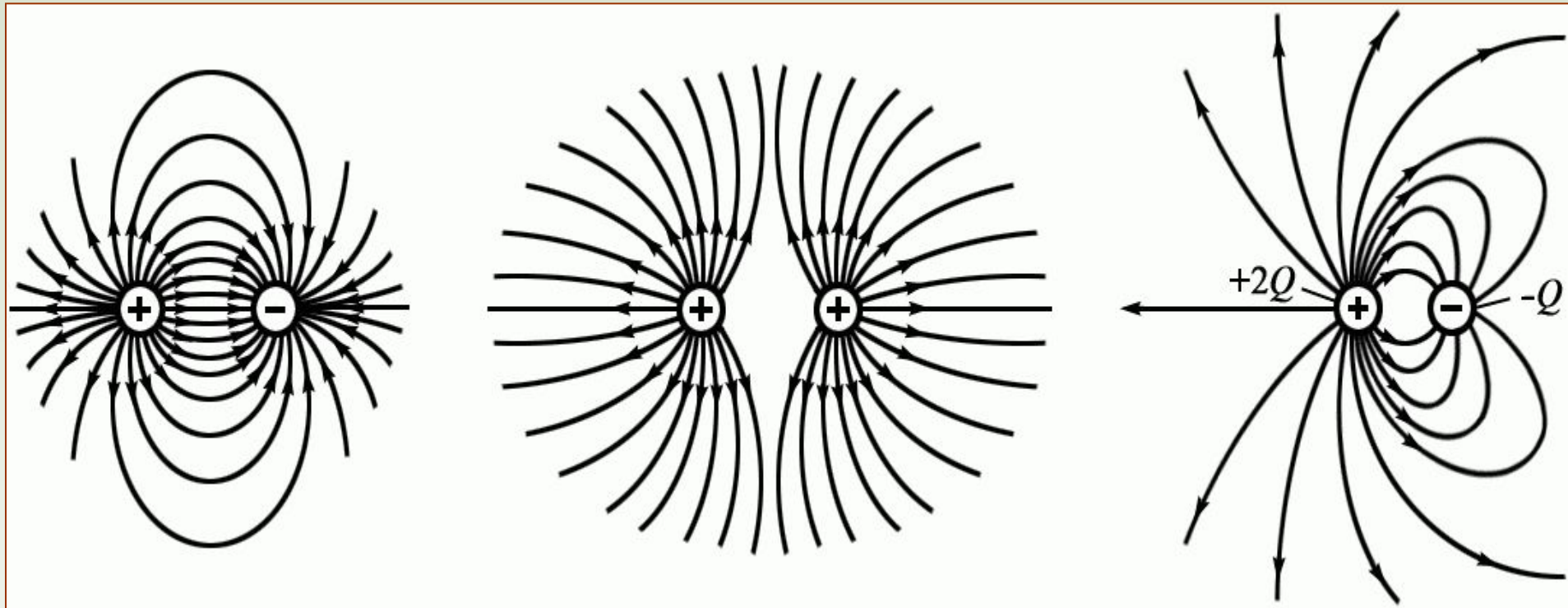
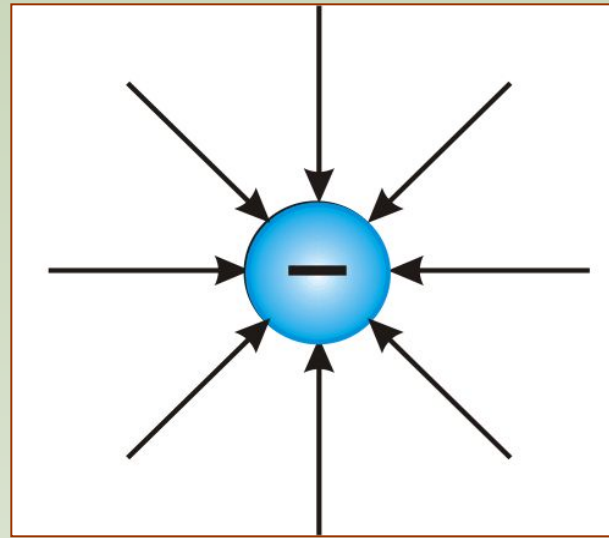
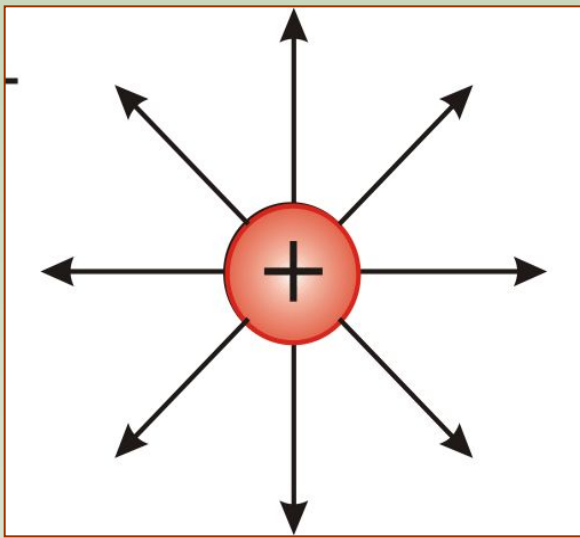


Геометрическое описание электрического поля

Зная вектор \vec{E} в каждой точке, можно представить электрическое поле очень наглядно с помощью **линий напряженности**, или линий вектора \vec{E} . Эти линии проводят так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора \vec{E} ,

а густота линий, т. е. число линий, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную линиям в данной точке, была бы пропорциональна модулю вектора \vec{E} .

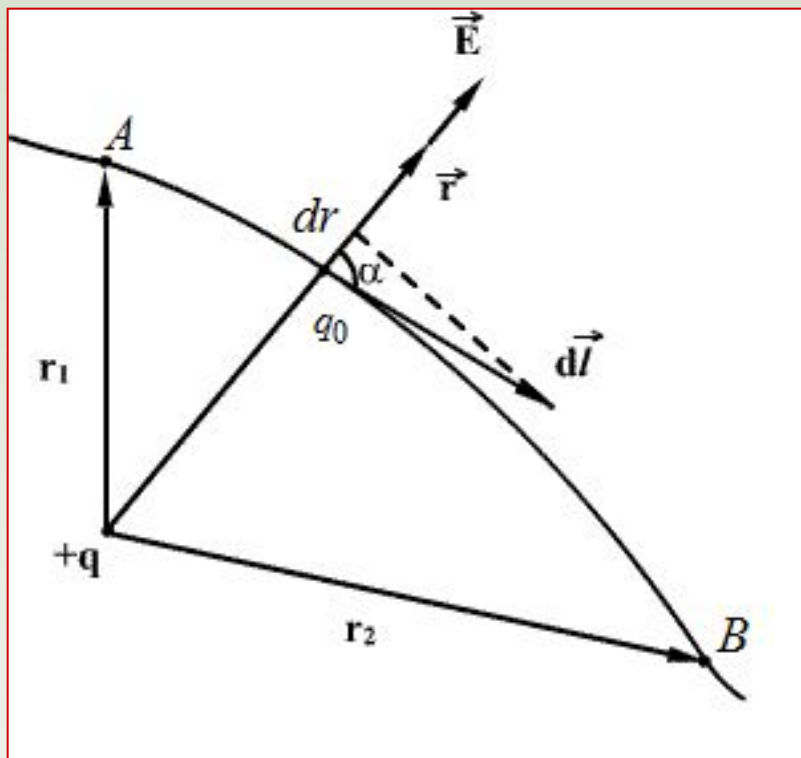




Работа сил электростатического поля. Потенциал

На электрический заряд со стороны электростатического поля действует сила, поэтому при перемещении заряда в поле совершается работа.

Пусть точечный заряд q_0 перемещается на расстояние $d\vec{l}$ в поле другого точечного заряда q .



При этом кулоновская сила совершает элем. работу:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = F dr .$$

Рис.5

Полная работа:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Вывод: Работа по перемещению заряда в эл. поле не зависит от формы пути, т.е. **электростатические силы** являются **потенциальными** или **консервативными**.

По определению консервативности силы эта работа идет на изменение потенциальной энергии **Взаимодействия зарядов:**

$$dA = -dW \quad \text{или} \quad A_{12} = -(W_2 - W_1),$$

отсюда следует, что **кулоновская потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов**, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}.$$

Разделив это выражение на величину пробного заряда q_0 , получаем выражение для **потенциала** поля точечного заряда q , находящегося в начале координат:

$$\varphi = \frac{W}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

т.е. потенциал равен потенциальной энергии единичного точечного заряда в данной точке поля. Единицей измерения потенциала является **Вольт [В]**.

И потенциал, и потенциальная энергия определены с точностью до произвольной постоянной. Эта постоянная выбирается так, чтобы на бесконечном удалении ($r \rightarrow \infty$) W и φ были равны нулю.

Поэтому можно сказать, что **потенциалом электрического поля называется работа по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность:**

$$\varphi = \frac{A_{1-\infty}}{q_0}$$

Для потенциала также, как и для напряженности, справедлив **принцип суперпозиции**: потенциал системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов отдельных зарядов:

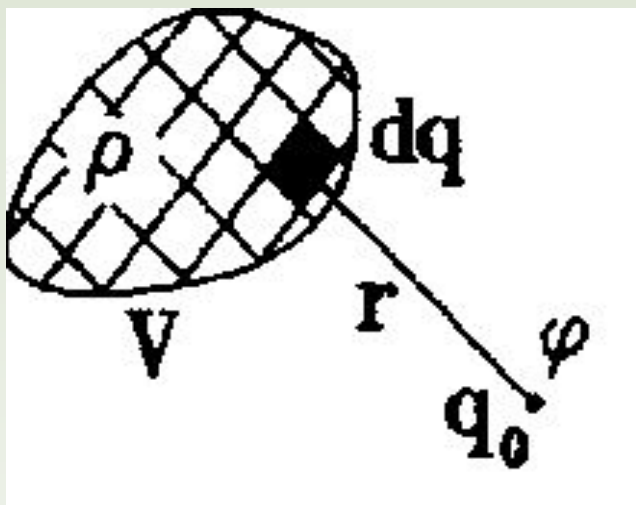


Рис.6

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

Потенциал поля непрерывно распределенного заряда (рис.6):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

Связь между вектором \vec{E} и φ для электрического поля

Элементарная работа dA электрического поля:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = q_0 \vec{E} d\vec{l} .$$

Тогда работа электрического поля по переносу пробного заряда из точки 1 в точку 2 :

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} .$$

Т.к. электростатическое поле потенциально, то эта работа равна разности потенц. энергий пробного заряда в этом эл. поле:

$$A_{12} = -(W_2 - W_1) = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) .$$

Получаем связь разности потенциалов и напряженности эл. поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} .$$

Теперь получим обратное соотношение. Для этого запишем полученное соотношение в дифференциальной форме:

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz).$$

Для того чтобы из этой формулы *определить проекцию напряженности эл. поля*, например, по оси x , необходимо считать остальные переменные постоянными величинами.

В математике такая производная называется частной:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Эти три производные объединяют в векторный оператор, который носит название **градиент** (или оператор ∇).

Запишем окончательную формулу:

$$\vec{E} = -\mathit{grad} \varphi = -\nabla \varphi = -\left(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right).$$

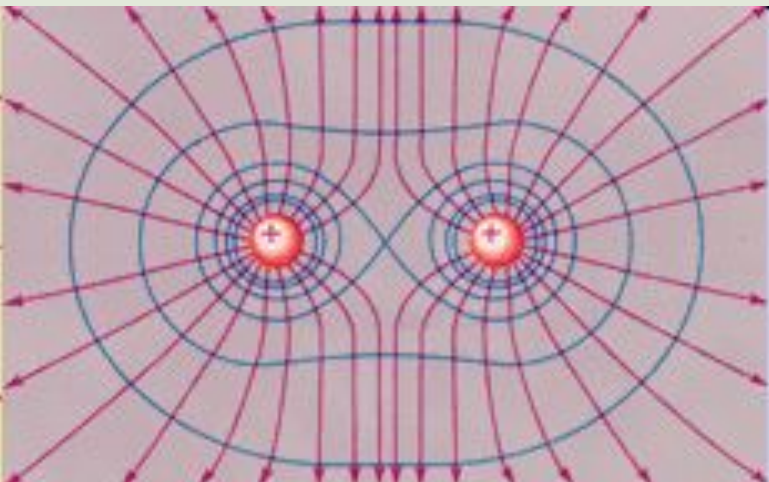
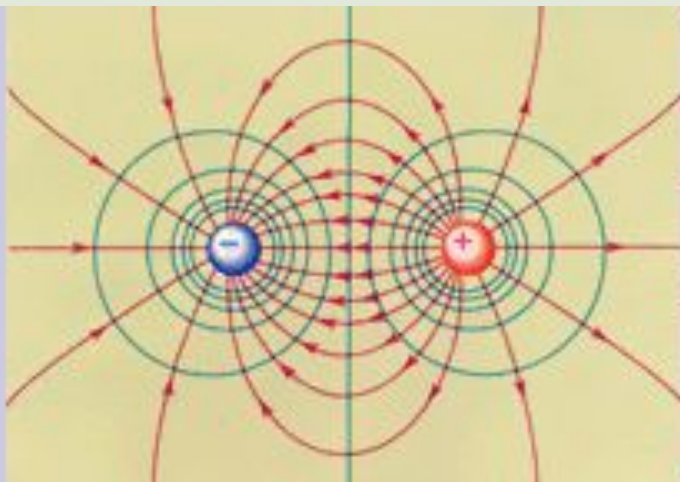
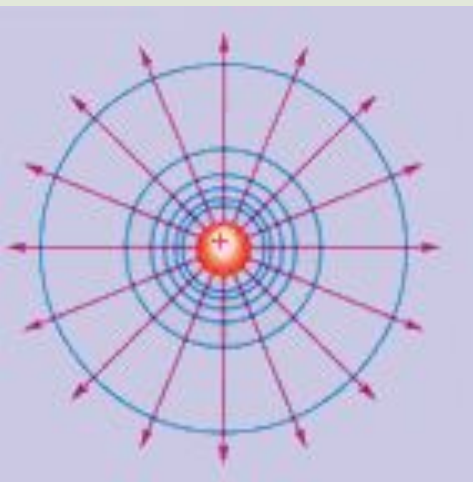
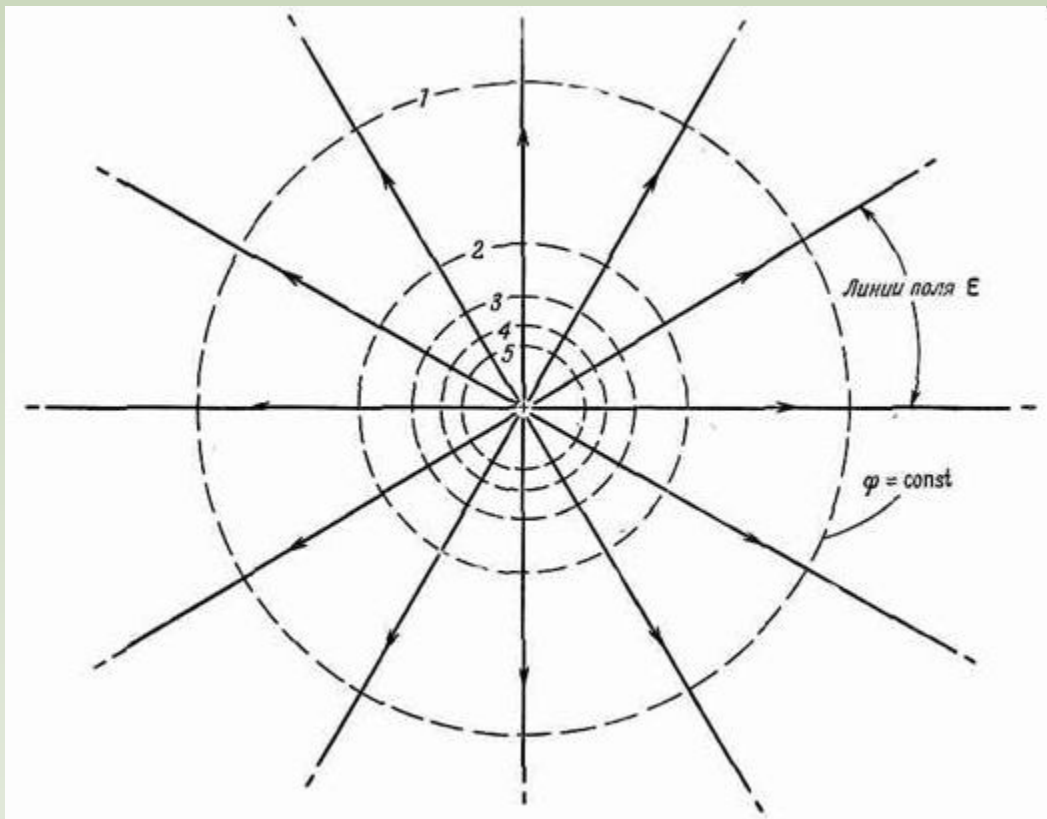
Эквипотенциальные поверхности

Введем понятие **эквипотенциальной поверхности** — поверхности, во всех точках которой потенциал φ имеет одно и то же значение.

Эквипотенциальные поверхности проводят так, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была одна и та же. Там, где потенциал поля больше, эквипотенциальные поверхности расположены гуще.

Вектор \vec{E} направлен в каждой точке по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциала φ .

Для сложной системы зарядов проще вычислить потенциал, поскольку он является скалярной величиной, а затем, по известному распределению потенциала φ всегда можно определить напряженность поля, как: $\vec{E} = -grad \varphi$.



Энергия взаимодействия системы электрических зарядов

Потенциальная энергия двух зарядов q_1 и q_2 может быть представлена в форме:

$$W_{p12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}.$$

Энергия системы из N зарядов (q_1, q_2, \dots, q_N) определяется как сумма энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} W_{pik} (r_{ik}), \quad \text{здесь} \quad W_{pik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Тогда формула для потенциальной энергии системы зарядов:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}}.$$

Здесь все индексы i и k пробегает значения от 1 до N , значения $i = k$ не принимаются во внимание.

Это выражение можно переписать в виде:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \sum_{k=1(k \neq i)}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q_k}{r_{ik}},$$

величина $\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \sum_{k=1(k \neq i)}^N \frac{q_k}{r_{ik}}$

есть потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i , в точке, где помещен заряд q_i .

Выражение для потенциальной энергии системы электрических зарядов можно записать также в виде:

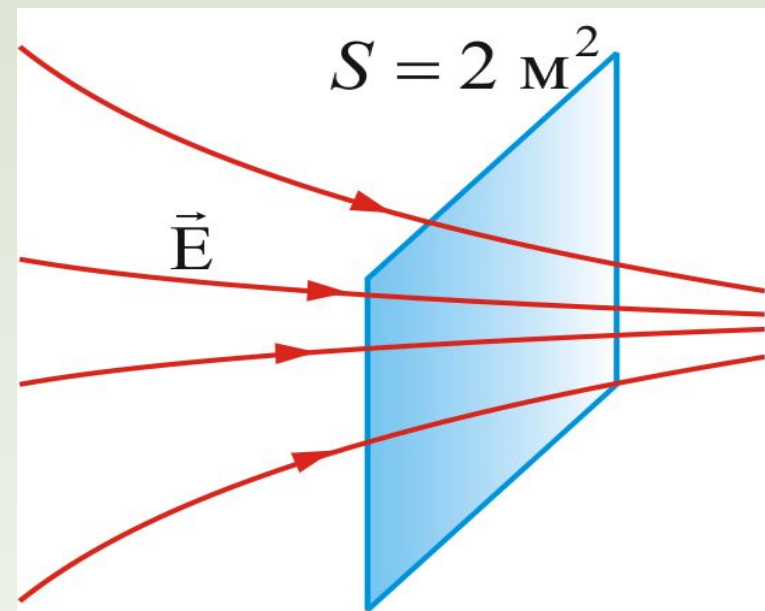
$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

Поток вектора напряженности электрического поля (поток вектора \vec{E})

Густота силовых линий находится по правилу:
число силовых линий, перпендикулярно пронизывающих
поверхность единичной площади, должно равняться
(или быть пропорциональным) модулю вектора
напряженности поля $|\vec{E}|$ в данном месте, т.е.

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}$$

$$|\vec{E}| = \frac{4}{2} = 2 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)$$



Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S называется **поток вектора напряженности** Φ_E через эту поверхность.

- Поток вектора напряженности через произвольную элемент. площадку dS будет равен:

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS.$$

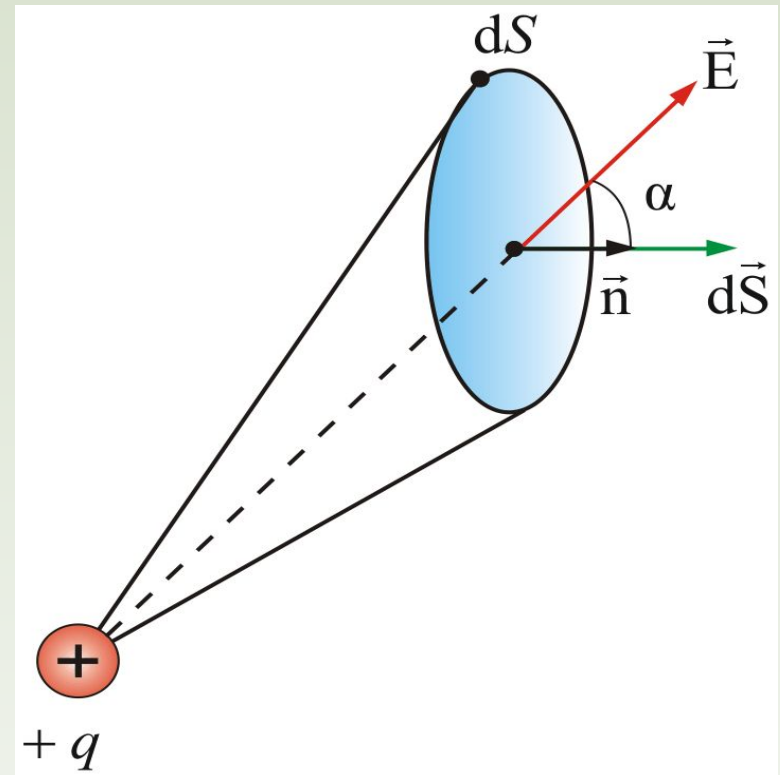
{Т.О., поток вектора \vec{E} есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как > 0 , так и < 0 .}

- Т.е. в однородном поле:

$$\Phi_E = ES.$$

- В произвольном эл. поле:

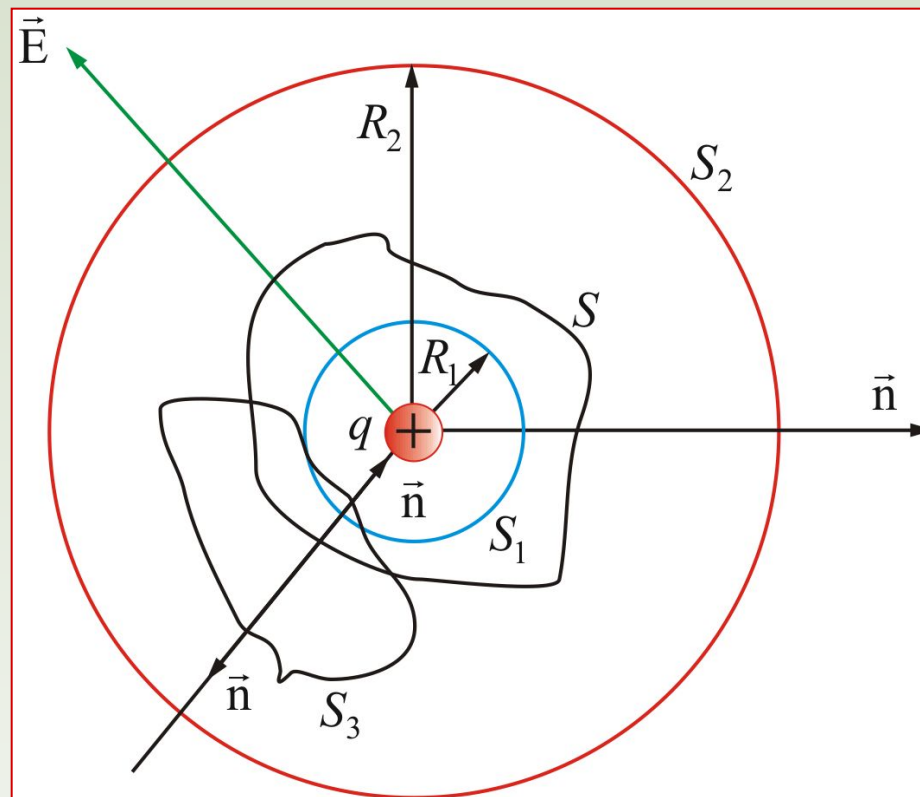
$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E_n dS.$$



Теорема Гаусса и ее применение к расчету электрических полей

Для вычисления напряженности эл. полей, обладающих симметрией, применяется теорема Гаусса.

Определим поток вектора \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность S , окружающую точечный заряд q .



Окружим заряд q сферой S_1 .

Центр сферы совпадает с центром заряда.

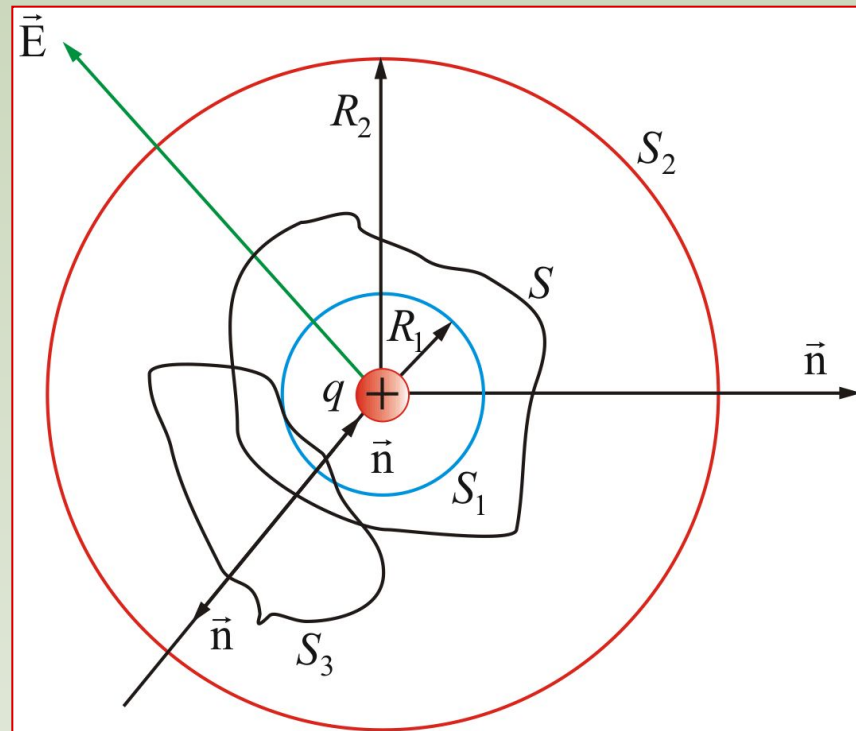
Радиус сферы S_1 равен R_1

В каждой точке поверхности S_1 проекция E_n на направление внешней нормали одинакова и равна:

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1^2}.$$

◆ Тогда поток через S_1 :

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



- ◆ Поток через сферу S_2 , имеющую радиус R_2 :

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

- ◆ Из непрерывности линии ∇ следует, что поток и через любую произвольную поверхность S будет равен этой же величине:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

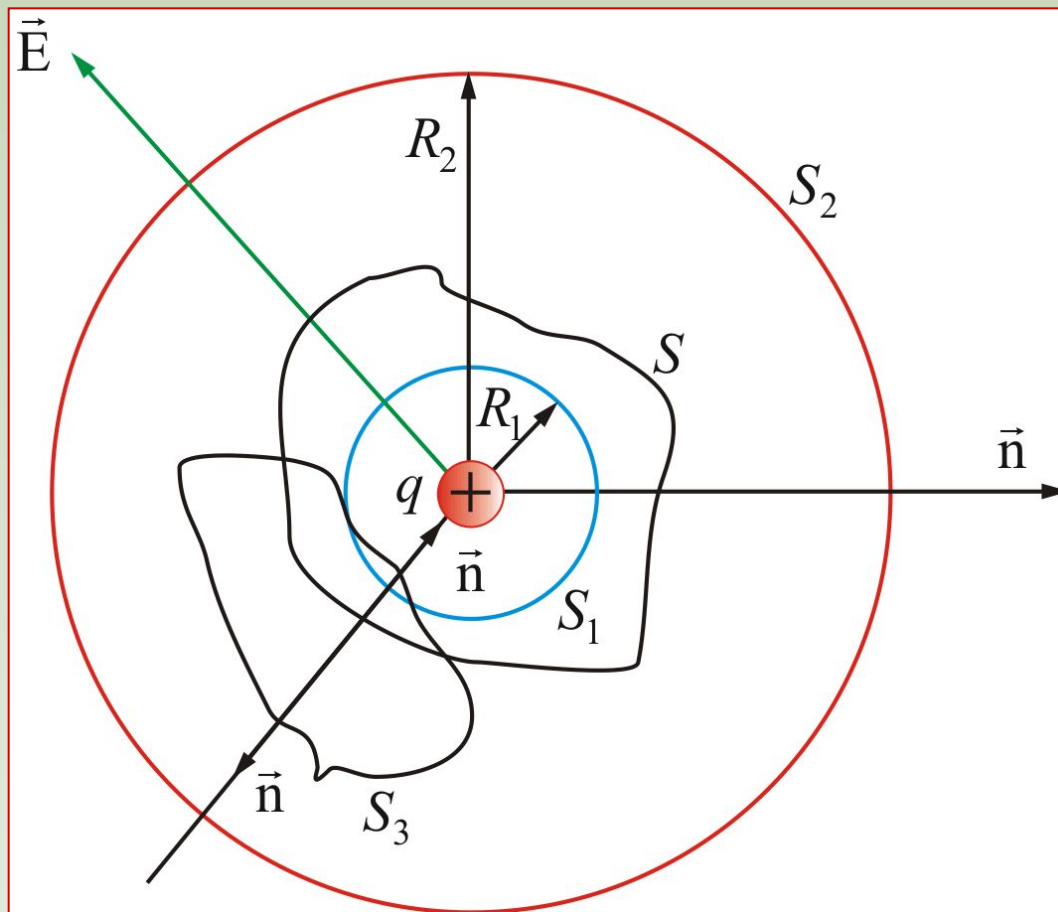
*– теорема Гаусса
для одного заряда.*

Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

*– теорема Гаусса
для системы зарядов
(в интегральной форме).*

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ϵ_0 .



Полный поток проходящий через S_3 , не охватывающую заряд q , равен нулю:

$$\Phi_3 = 0.$$

Суммарный заряд объема dV можно записать:

$$\sum q_i = \int_V \rho dV.$$

Тогда можно получить:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

– это ещё одна форма записи теоремы Гаусса, **если заряд неравномерно распределен по объему.**

