Глава 4
Принцип возможных перемещений

§ 1. Классификация связей

§ 2. Возможные перемещения системы

§ 3. Принцип возможных перемещений

§ 4. Решение задач с помощью ПВП

§ 5. Общие уравнения динамики

§ 6. Примеры решения задач

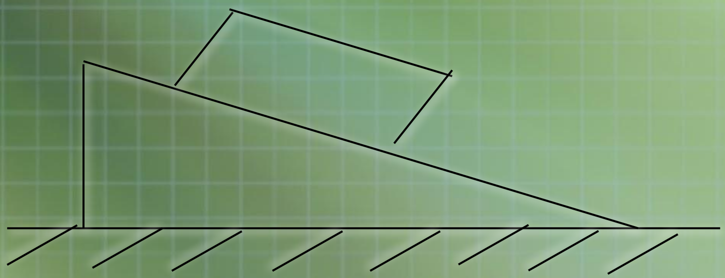
§ 1. Классификация связей

Связями называются любого вида ограничения, которые накладываются на положения и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие на систему действуют силы

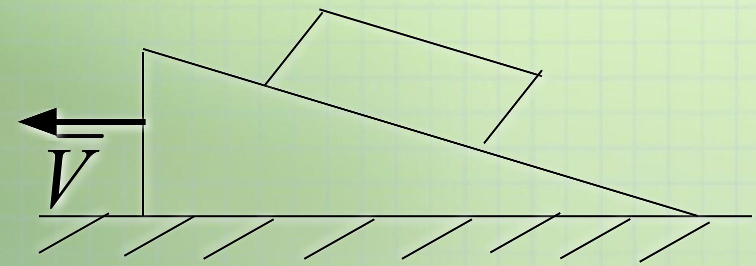
- Стационарные связи
- Геометрические связи
- Интегрируемые связи
- Голономные связи

- Нестационарные связи
- Кинематические связи (дифференциальные)
- Неинтегрируемые связи
- Неголономные связи

стационарная связь

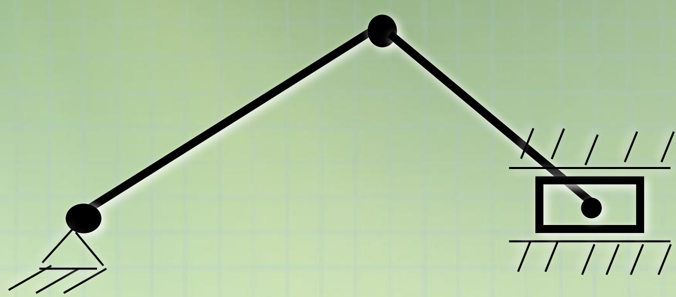


нестационарная связь



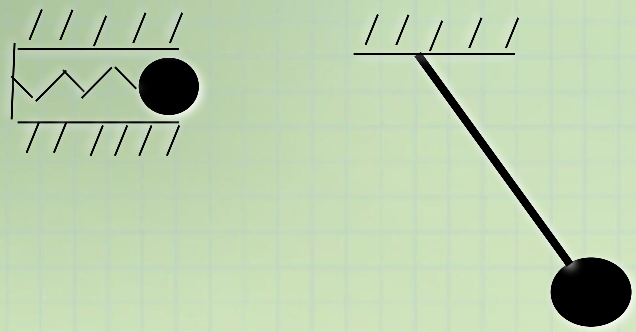
удерживающие связи

налагаемые ограничения сохраняются при любом положении системы



неудерживающие связи

от таких связей система может «освобождаться»



§ 2. Возможные перемещения системы

Влияние связей

1. Появление сил реакции
2. Перемещения, которые могут иметь точки системы

Возможным перемещением механической системы будем называть любую совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями

$$\delta\overline{r}\left(\delta x, \delta y, \delta z\right)$$

- Перемещения должны быть элементарными, чтобы вид связи не изменился
- Вид связи не должен измениться, даже при элементарном перемещении

Возможные перемещения характеризуются тем, что

- могут и не происходить (воображаемые)
- бесконечно малые
- происходят с сохранением всех наложенных на систему связей
- не происходят во времени (**$\delta t = 0$**)

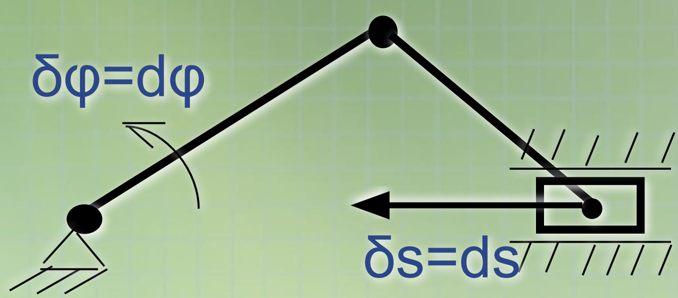
Действительные перемещения $d\bar{r}$

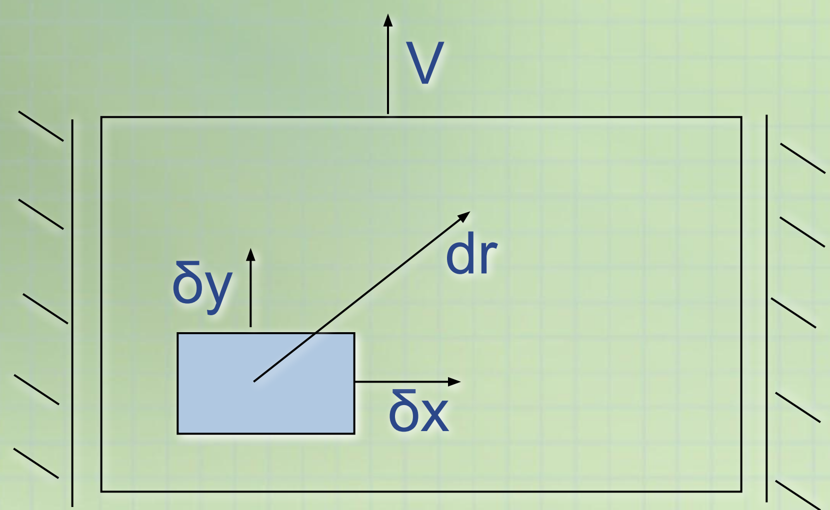
- бесконечно малые
- происходят с сохранением всех наложенных на систему связей
- происходят за некоторый промежуток времени

В случае голономных, идеальных, стационарных связей действительные перемещения являются частью виртуальных

В случае нестационарных связей действительные перемещения не совпадают ни с одним из виртуальных перемещений

Движущийся лифт



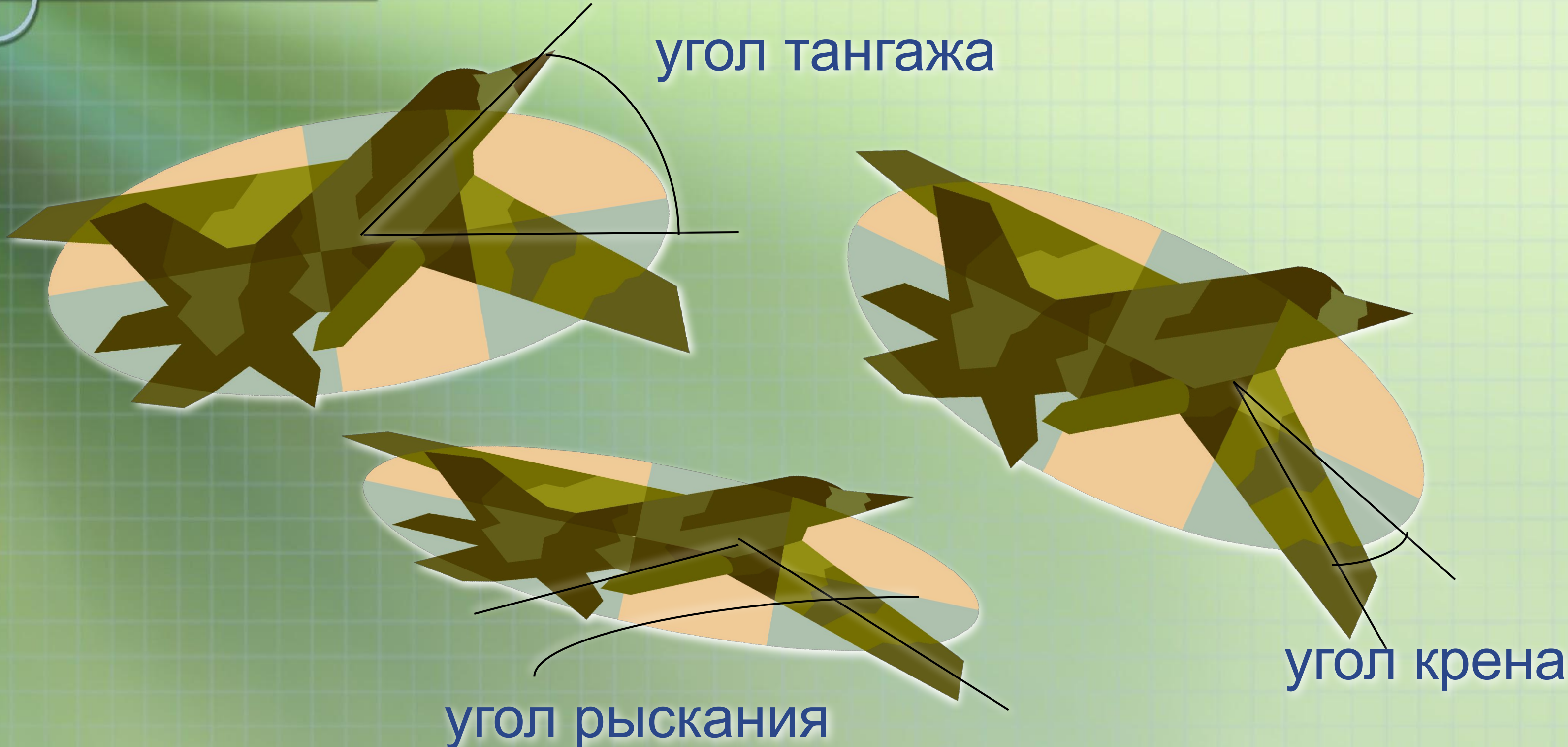


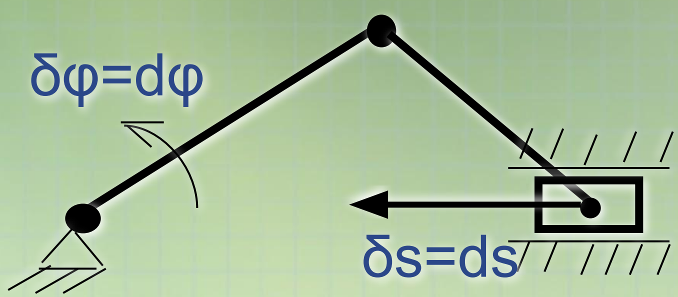
Механическая система одновременно может иметь несколько возможных перемещений

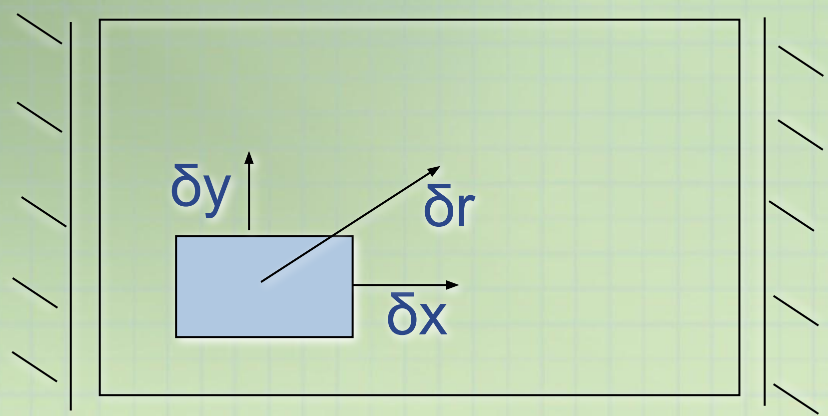
Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называется числом степеней свободы этой системы

У механической системы с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом ее степеней свободы

Чтобы определить число степеней свободы, нужно последовательно предотвращать возможные перемещения


угол тангажа
угол крена
угол рыскания


δφ=dφ
δs=ds


δy
δr
δx

§ 3. Принцип возможных перемещений

Устанавливает общее условие равновесия механической системы в целом

При идеальных связях позволяет исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей

Выполняется в инерциальных системах отсчета

Все точки системы под действием приложенных сил находятся в покое по отношению к инерциальной системе отсчета («абсолютное равновесие»)

Все связи будем считать стационарными

Возможная работа – *это элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки* ($\delta A = \overline{F} \cdot \delta \overline{r}$)

$\delta A^a = \overline{F^a} \cdot \delta \overline{r}$ − возможная работа активных сил

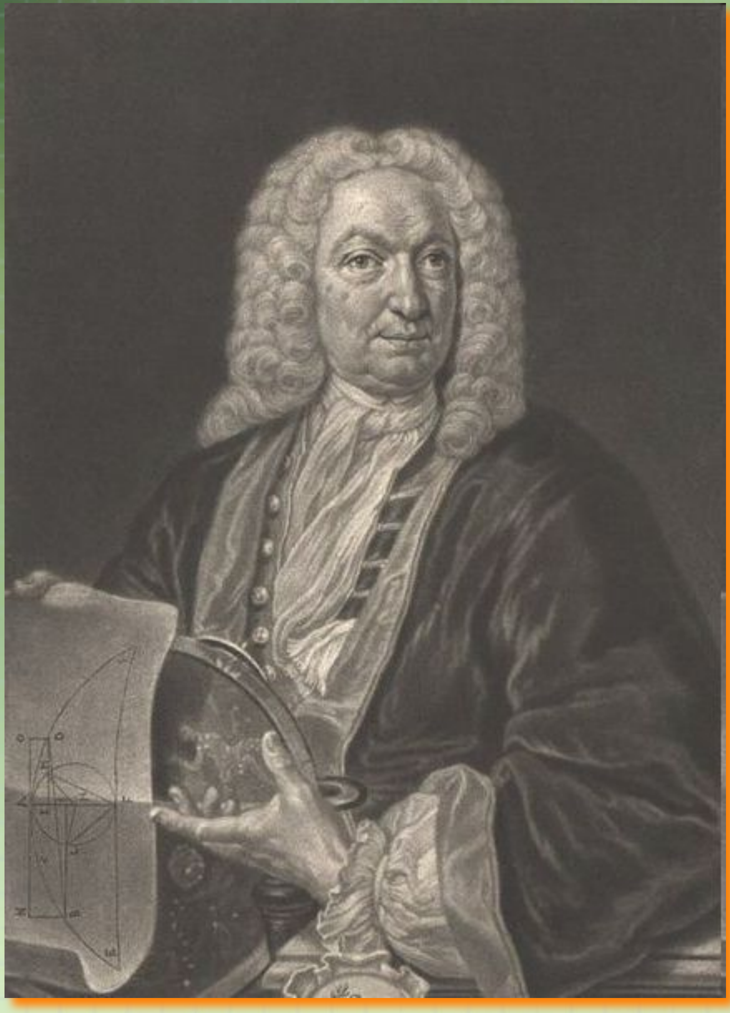
$\delta A^r = \overline{N} \cdot \delta \overline{r}$ − возможная работа реакций связей

Связь называется идеальной, если работа реакций этих связей на любых возможных перемещениях равнялась нулю или была бы больше нуля ($\Sigma\delta A^r \geq 0$)

Постулат идеальных связей в 1806 году сформулировал Андре Мари Ампер

Андре-Мари Ампер (фр. Andre Marie Ampere; 22 января 1775 — 10 июня 1836) — знаменитый французский математик и естествоиспытатель

Принцип возможных перемещений (ПВП) первым без доказательства сформулировал Иоганн Бернулли



Иоганн Бернулли (нем. Johann Bernoulli, 27 июля 1667, Базель, Швейцария — 1 января 1748, там же) — один из величайших математиков своего времени

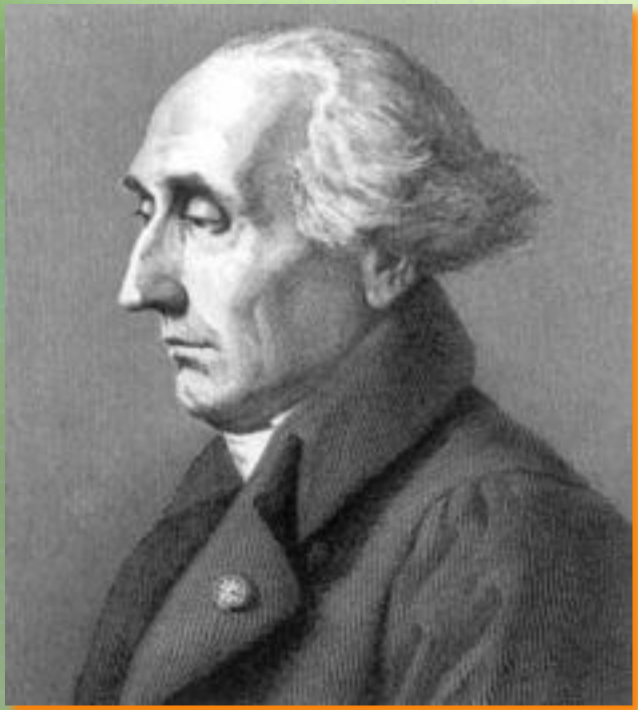
Принцип возможных перемещений (ПВП)

Первым доказал и сформулировал в общем виде в 1788 году Жозеф Луи Лагранж

Для удерживающих связей $$\sum_k \delta A_k^r = 0$$

Обобщил на случай неудерживающих связей в 1838−1842 годах Михаил Васильевич Остроградский

Для освобождающихся связей $$\sum_k \delta A_k^r \geq 0$$



Жозеф Луи Лагранж
(фр. Joseph Louis Lagrange
25 января 1736, Турин – 10 апреля 1813, Париж) –
французский математик и механик

Михаил Васильевич Остроградский

(12(24) сентября 1801−20 декабря 1861(1 января 1862) − российский и украинский математик и механик, признанный лидер математиков Российской империи середины XIX века

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на неё активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю в случае удерживающих связей и меньше нуля в случае неудерживающих связей

$$\sum_k \delta A_k^a \le 0$$ – уравнение возможных работ

Уравнение возможных работ в аналитической форме

$$\sum_k \left(F_{kx}^a \, \delta x_k + F_{ky}^a \, \delta y_k + F_{kz}^a \, \delta z_k \right) \le 0$$

Необходимость:

Пусть механическая система находится под действием внешних сил, главный вектор которых $\bar{R} = \sum_k \bar{F}_k$

На неё наложены голономные, стационарные связи

$$\bar{N} = \sum_k \bar{N}_k$$

Тогда для каждой точки системы уравнения равновесия

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k = 0 \,\Big|\, \cdot \delta\bar{r}_k \quad \Rightarrow \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

Просуммируем по всем точкам системы

$$\sum_k \left(\bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k \right) = 0 \quad \Rightarrow \sum_k \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_k \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

По постулату идеальных связей $\sum_k \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k \geq 0,$

$$\Rightarrow \sum_k \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k \leq 0 \quad \text{или} \quad \sum_k \delta A_k^a \leq 0$$

Достаточность:

Пусть механическая система с идеальными связями, удовлетворяющая неравенству $\sum_k \delta A_k^a \le 0$ (*),

совершает действительное перемещение $d\bar{r}_k$, тогда

$$dT = \sum_k dA_k^a = \sum_k \bar{F}_k^a \cdot d\bar{r}_k > 0$$

При стационарных связях действительные перемещения совпадают с какими-либо возможными и

$$\sum_k dA_k^a = \sum_k \delta A_k^a > 0$$

Но это противоречит условию (*)

Когда приложенные силы к системе удовлетворяют условию (*), система из состояния покоя выйти не может, следовательно, это условие является достаточным условием равновесия системы

Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, например, негладкие опорные поверхности, то к задаваемым силам следует добавлять силы трения. Тогда уравнение ПВП будет определять зависимость между задаваемыми силами и силами трения.

Если требуется определить какую-либо силу реакции идеальной связи, для которой $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\delta r} = 0$, то следует, применяя принцип освобождаемости от связей, отбросить связь и заменить её искомой силой реакции. При составлении уравнения равновесия надо к задаваемым силам добавить эту силу реакции связи. Искомую величину определить из составленного уравнения равновесия.

ПВП устанавливает общее условие равновесия механической системы и позволяет при идеальных связях исключать из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей

§ 4. Решение задач с помощью ПВП

а) определяют степени свободы

Для этого останавливают поступательное или вращательное движение одного звена механической системы, если она становится неподвижной, то, значит, имеет лишь одну степень свободы.

Если система не становится неподвижной после остановки первого звена, то останавливают поступательное или вращательное движение второго звена механической системы. Если она становится неподвижной, то имеет две степени свободы. И так далее…

б) решают задачу аналитически или геометрически

План решения геометрическим способом в случае, когда система обладает одной степенью свободы

1. Изобразить все активные силы
2. Показать на чертеже всем звеньям системы возможные перемещения $\delta\varphi_k$ и δs_k
3. Вычислить элементарные работы:

$$\begin{cases} \delta A_k^a = F_k^a \, ds_k \cos\alpha_k, \\ \delta A_k^a = M_k^a \, d\varphi_k \end{cases}$$

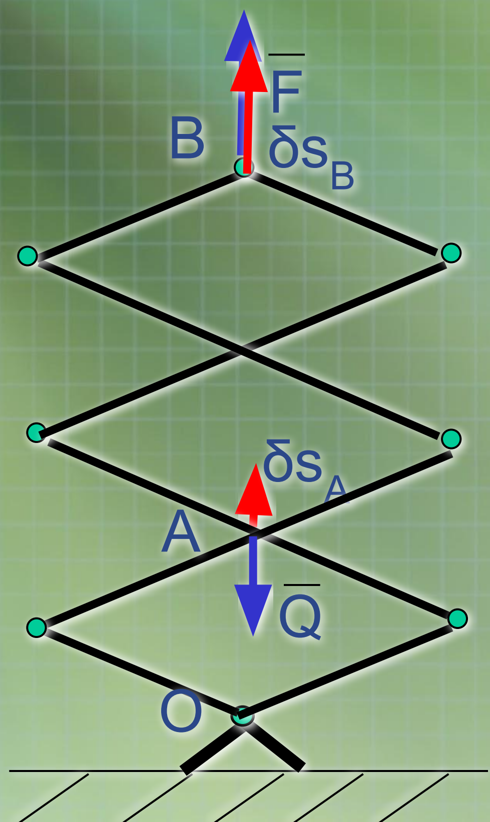
4. Графически выразить все перемещения $\delta\varphi_k$ и δs_k через одно
5. Составить уравнение ПВП: $\sum_k \delta A_k^a = 0$
6. Определить искомую величину

План решения аналитическим *способом* в случае, когда система обладает одной степенью свободы

1. Оси координат связать с телом, которое при любых возможных перемещениях остается неподвижным. Изобразить все заданные силы
2. В случае неидеальных связей добавить соответствующие силы реакций связи
3. Задать возможное перемещение одной из точек системы ($\delta\varphi_k$ или δs_k) и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от выбранного $\delta\varphi_k$ или δs_k
4. Вычислить элементарные работы:

$$\begin{cases} \delta A_k^a = F_k^a \, ds_k \cos\alpha_k, \\ \delta A_k^a = M_k^a \, d\varphi_k \end{cases}$$

5. Составить уравнение ПВП: $\sum_k \delta A_k^a = 0$
6. Определить искомую величину



Пример 1

В механизме (рычажный подъемник) найти зависимость между силами F и Q при равновесии

Решение

1. У системы 1 степень свободы
3. Возможные перемещения δs_A и δs_B

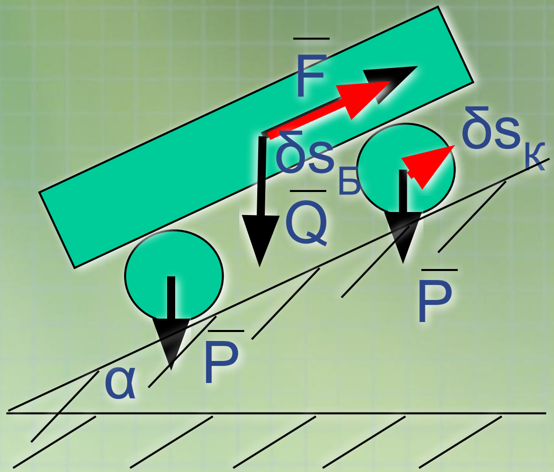
   Так как ***OB = 3 OA***, после дифференцирования $\boldsymbol{\delta s_B = 3\,\delta s_A}$

4. $\boldsymbol{\delta A(F) = F \cdot \delta s_B}$ и $\boldsymbol{\delta A(Q) = Q \cdot \delta s_A}$
5. $\boldsymbol{F \cdot \delta s_B - Q \cdot \delta s_A = 0,}$ □
6. $Q = F \dfrac{\delta s_B}{\delta s_A} = 3\,F$

Пример 2

Вес бревна Q, вес каждого из двух цилиндрических катков, на которые оно положено, – P. Определить, какую силу F надо приложить к бревну, чтобы удержать его в равновесии на наклонной плоскости при заданном угле наклона α. Трение катка о плоскость и бревно обеспечивает отсутствие скольжения

Решение



1. У системы 1 степень свободы

3. Возможные перемещения $\delta s_К$ и $\delta s_Б$

   Так как $\boldsymbol{V_Б = 2\,V_к}$, то $\boldsymbol{\delta s_Б = 2\,\delta s_к}$

4. $\boldsymbol{\delta A(F) = F \cdot \delta s_Б}$ и

   $\boldsymbol{\delta A(Q) = -Q \cdot \delta s_Б \cdot \sin\alpha}$,

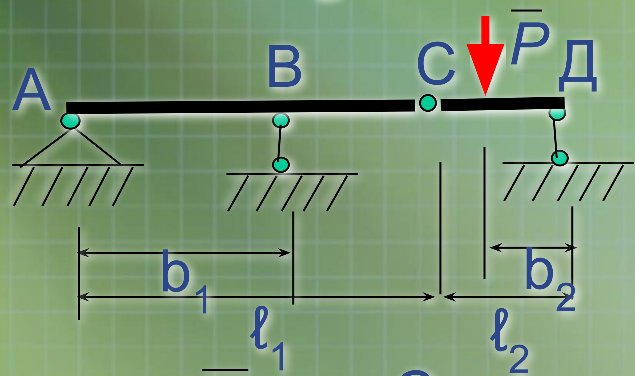
   $\boldsymbol{\delta A(P) = -P \cdot \delta s_к \cdot \sin\alpha}$

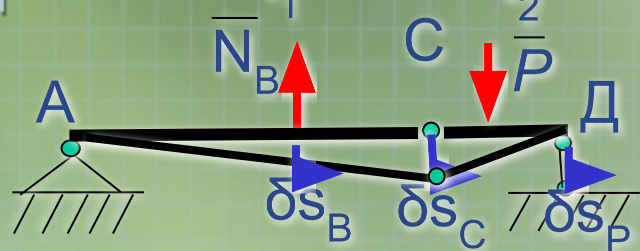
5. $\boldsymbol{F \cdot \delta s_Б - Q \cdot \delta s_Б \sin\alpha - 2P \cdot \delta s_к \sin\alpha = 0}$,

6. $F = \left(Q + P\right) \cdot \sin\alpha$

Пример 3

По заданным активным силам найти неизвестную реакцию N_B





Решение

1. У системы 1 степень свободы
2. Отбросим опору В, заменим N_B
3. Возможные перемещения δs_C и δs_B, δs_P

Т.к. $\delta\varphi_A = \delta s_C/\ell_1$, а $\delta\varphi_Д = \delta s_C/\ell_2$, то $\delta s_B = \delta\varphi_A \cdot b_1 = \delta s_C \cdot b_1/\ell_1$ и $\delta s_P = \delta\varphi_Д \cdot b_2 = \delta s_C \cdot b_2/\ell_2$

4. $\delta A(N_B) = -N_B \cdot \delta s_B$ и $\delta A(P) = P \cdot \delta s_P$
5. $P \cdot \delta s_P - N_B \cdot \delta s_B = 0,$
6. $N_B = P \cdot \dfrac{b_2 \ell_1}{b_1 \ell_2}$

§ 5. Общее уравнение динамики

Применяя одновременно п-п Даламбера и ПВП, можно определить общий метод решения задач динамики

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам, кроме активных сил $\mathbf{F}^a_k$ и сил реакции $\mathbf{N}_k$, добавить силы инерции $\mathbf{F}^{ин}_k = -m_k a_k$, то, по принципу Даламбера,

$$\vec{F}_k^{ан} + \vec{N}_k + \vec{F}_k \quad = 0 \,\Big|\cdot \delta \vec{r}_k$$

$$\delta A_k^{ан} + \delta A_k^{r} + \delta A_k \quad = 0$$

$$\sum_k \delta A_k^{ан} + \cancelto{=0}{\sum_k \delta A_k^{r}} + \sum_k \delta A_k \quad = 0$$

Получим п-п Даламбера-Лагранжа

$$\sum_k \delta A_k^{ан} + \sum_k \delta A_k \quad = 0 \quad (**)$$

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю

$$\sum_k \left[\left(F_{kx}^{ан} + F_{kx} \quad \right) \delta x_k{}^a + \left(F_{ky}^{ин} + F_{ky} \quad \right) \delta y_k{}^a + \left(F_{kz}^{ин} + F_{kz} \quad \right) \delta z_k \right] = 0 \quad (**')$$

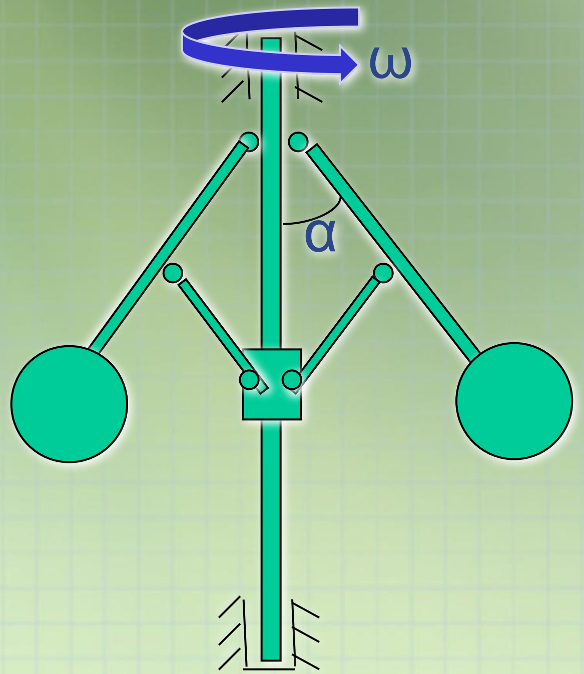
Общее уравнение динамики в аналитической форме

Жа́н Леро́н Д’Аламбе́р

(фр. Jean Le Rond d'Alembert; 16 ноября 1717 – 29 октября 1783) – французский философ, механик и математик

§ 6. Примеры решения задач

Если система состоит из нескольких твердых тел, то к действующим на каждое тело силам нужно добавить главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции относительно того же центра, к которому приложен главный вектор сил инерции, и лишь затем применять ПВП

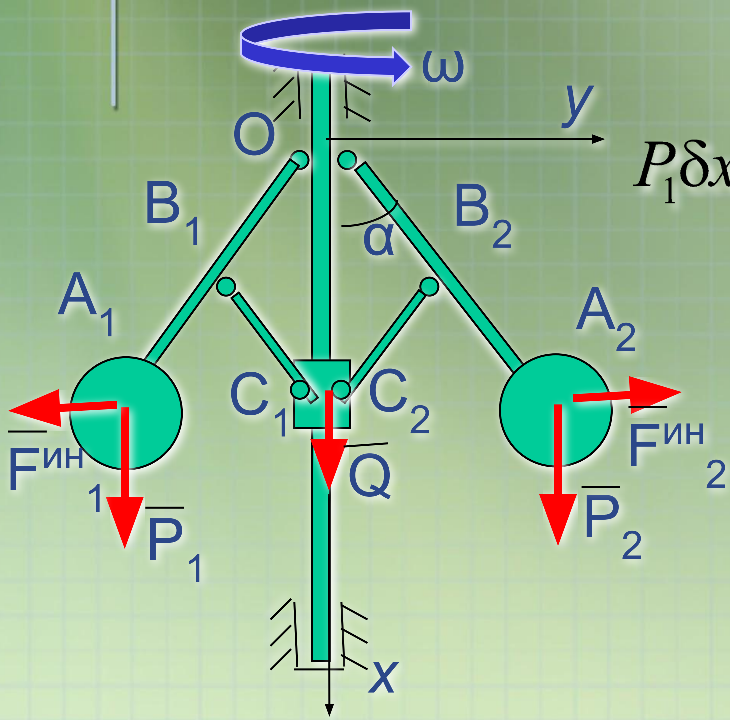


Пример

Определить угол подъема α шаров центробежного регулятора, вес грузов которого $P_1 = P_2$ и вес муфты Q

$P_1=P_2$; Q; ω;
$OA_1=OA_2=\ell$;
$OB_1=OB_2=b$;
$C_1B_1=C_2B_2=b$;

$\alpha-?$



При определенном соотношении сил наступает равновесие

$$при\ \omega = const \qquad a_n = \frac{V^2}{\ell \cdot \sin\alpha}$$

$$a_n = \frac{\omega^2 \ell^2 \sin^2\alpha}{\ell \cdot \sin\alpha} = \omega^2 \ell \sin\alpha$$

$$F_1^{ин} = F_2^{ин} = \frac{P_1}{g}\omega^2 \ell \sin\alpha$$

$$P_1\delta x_1 + F_1^{ин}\delta y_1 + P_2\delta x_2 + F_2^{ин}\delta y_2 + Q\delta x_3 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \ell\cos\alpha; \ -y_1 = y_2 = \ell\sin\alpha;$$

$$x_3 = 2b\cos\alpha$$

Продифференцируем координаты

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -\ell\sin\alpha\,\delta\alpha;$$
$$-\delta y_1 = \delta y_2 = \ell\cos\alpha\,\delta\alpha;$$
$$\delta x_3 = -2b\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$P_1=P_2$; Q; ω;

$OA_1=OA_2=\ell$;

$OB_1=OB_2=b$;

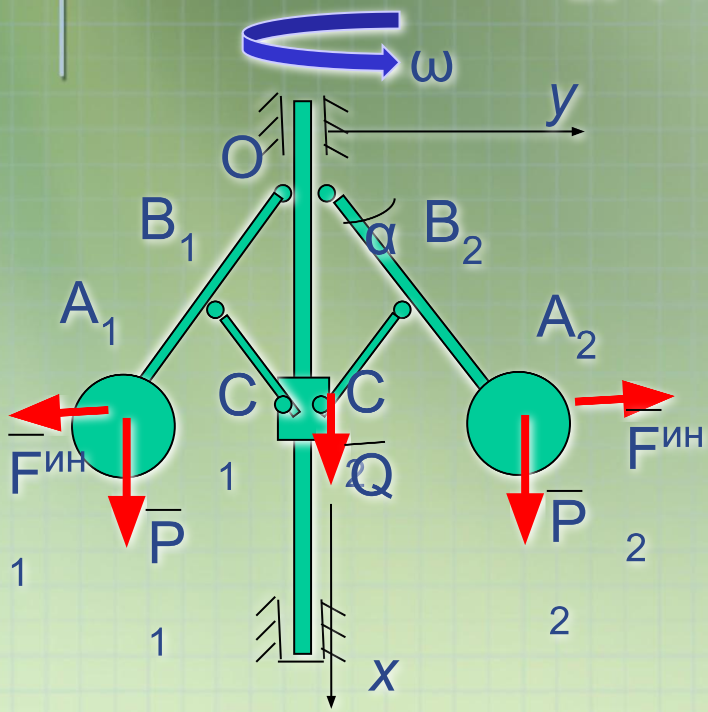
$C_1B_1=C_2B_2=b$;

$\alpha-?$

$$P_1\delta x_1+F_1^{ин}\delta y_1+P_2\delta x_2+F_2^{ин}\delta y_2+Q\delta x_3=0$$

$$\left[-2P\ell\sin\alpha+2\frac{P}{g}\omega^2\ell^2\sin\alpha\cos\alpha-2Qb\sin\alpha\right]\delta\alpha=0$$

$$-2P\ell+2\frac{P}{g}\omega^2\ell^2\cos\alpha-2Qb=0$$



$$\boxed{\cos\alpha=\frac{P\ell+Qb}{P\omega^2\ell^2}\cdot g}$$

Пример 2

Определить ускорение груза подъемника при постоянном вращающем моменте **M**

P_1, P_2, Q, M

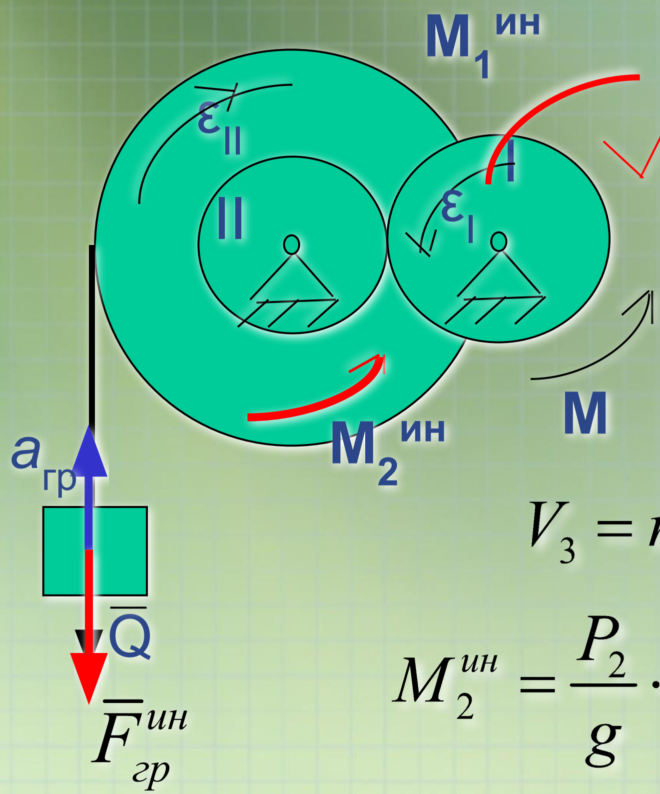
$r_1, r_2, r, \rho_1, \rho_2$

$a_{гр} - ?$

$$M_1^{ин} = J_1 \cdot \varepsilon_1 = \frac{P_1}{g} \cdot \rho_1^2 \cdot \varepsilon_1$$

$$M_2^{ин} = J_2 \cdot \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2$$

$$F_{гр}^{ин} = \frac{Q}{g} \cdot a_{гр}$$



Т.к. $r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} \text{ и } \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2}$$

$$V_3 = r \cdot \omega_2 = \omega_1 \cdot r \frac{r_1}{r_2} \text{ и } a_3 = \varepsilon_1 \cdot r \frac{r_1}{r_2}$$

=>

$$M_2^{ин} = \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^2 \cdot \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} \quad \text{и} \quad F_{гр}^{ин} = \frac{Q}{g} \cdot \varepsilon_1 \cdot r \frac{r_1}{r_2}$$

Пример 2

P_1, P_2, Q, M

r_1, r_2, r, ρ_1, ρ_2

$a_{гр}$ – ?

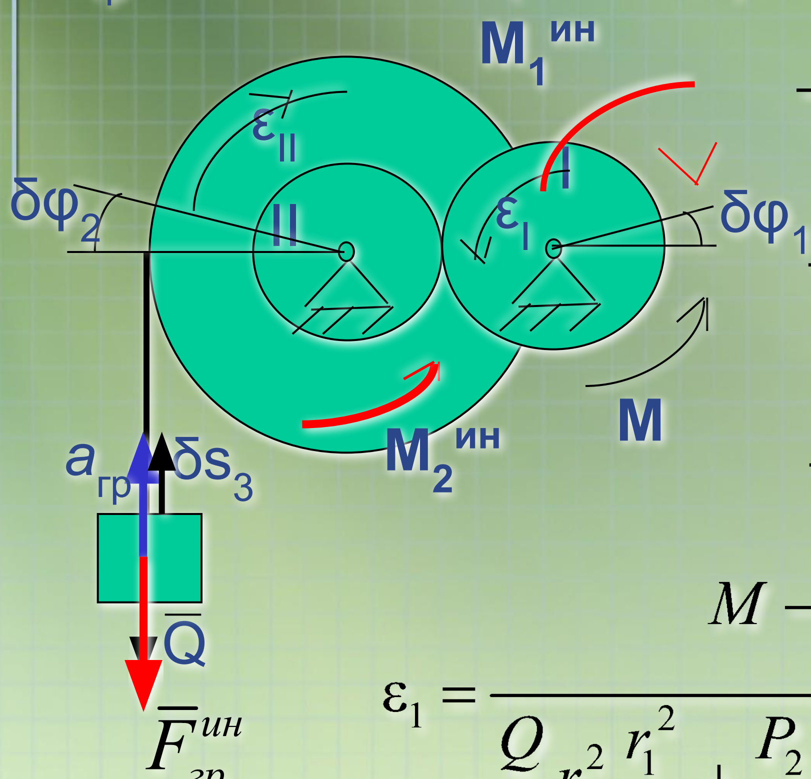
Определим возможные перемещения:

$$\delta\varphi_1, \quad \delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2}, \quad \delta s_3 = \delta\varphi_1 \cdot r \frac{r_1}{r_2}.$$

Тогда по ПВП

$$-\left(Q + F_3^{ин}\right)\delta s_3 - M_2^{ин}\delta\varphi_2 + \left(M - M_1^{ин}\right)\delta\varphi_1 = 0$$

$$-\left(Q + \frac{Q}{g}\cdot\varepsilon_1\cdot r\frac{r_1}{r_2}\right) r\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1 - \frac{P_2}{g}\cdot\rho_2^2\cdot\varepsilon_1\frac{r_1}{r_2}\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1 + \left(M - \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1\right)\delta\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow$$



$$\varepsilon_1 = \frac{M - Qr\dfrac{r_1}{r_2}}{\dfrac{Q}{g}r^2\dfrac{r_1^2}{r_2^2} + \dfrac{P_2}{g}\rho_2^2\dfrac{r_1^2}{r_2^2} + \dfrac{P_1}{g}\rho_1^2} \quad \text{и} \quad a_3 = \varepsilon_1 \cdot r\frac{r_1}{r_2}$$