Связь непрерывных и дискретных алгоритмов фильтрации

Непрерывные и дискретные фильтры

	Непрерывный фильтр Калмана-Бьюси	**Дискретный фильтр Калмана**
Вектор состояния	(1)	$x_i = \Phi_i x_{i-1} + \Gamma_i w_i,$ (6)
Измерения	(2)	$y_i = H_i x_i + v_i,$ (7)
Оценка	(3)	$\hat{x}_{i/i-1} = \Phi_i \hat{x}_{i-1}$ $\hat{x}_i = \hat{x}_{i/i-1} + K_i(y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1})$ (8)
Коэфф. усил	(4)	$K_i = P_i H_i^{\mathrm{T}} R_i^{-1}$ (9)
Матрица ковариаций	(5)	$P_{i/i-1} = \Phi_i P_{i-1} \Phi_i^{\mathrm{T}} + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^{\mathrm{T}}$ $P_i = (P_{i/i-1}^{-1} + H_i R_i^{-1} H_i)^{-1}$ (10)

Стохастическая эквивалентность

- Детерминированные системы

$$x(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (11) \quad \longrightarrow \quad x_i = \Phi_i x_{i-1} + \Gamma_i w_i \quad (11)$$

$$x(t_i) = x_i$$

- Стохастические системы

$$\boxed{\bar{x}(t_i) = \bar{x}_i; \quad P(t_i) = P_i} \quad (12)$$

$$\bar{x}(t) = F(t)\bar{x}(t); \quad \rightarrow \quad \bar{x}_i = \Phi_i \bar{x}_{i-1} \quad (13)$$

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^{\mathrm{T}}(t) + G(t)Q(t)G^{\mathrm{T}}(t) \rightarrow P_i = \Phi_i P_{i-1}\Phi_i^{\mathrm{T}} + \Gamma_i Q_{di}\Gamma_i^{\mathrm{T}}$$

Выражения для выполнения условий СЭ

- Математическое ожидание

$$\bar{x}(t_i) = \Phi(t_i, t_i - \Delta t)\bar{x}(t_i - \Delta t) \quad (14) \rightarrow \quad \boxed{\Phi_i = \Phi(t_i, t_i - \Delta t)} \quad (14)$$

- Матрица ковариаций

$$P(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1})P(t_{i-1})\Phi^{\mathrm{T}}(t_i, t_{i-1}) + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(t_{i-1} + \tau)Q(t_{i-1} + \tau)G^{\mathrm{T}}(t_{i-1} + \tau)\Phi^{\mathrm{T}}(t_i, \tau)d\tau \quad (15)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Gamma_i Q_{di} \Gamma_i^T = \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^{\mathrm{T}}(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(t_i, \tau)d\tau} \quad (16)$$

Решение для стационарных процессов

- Матрица динамики

$$\boxed{\Phi = e^{F(\Delta t)}} \quad \text{или} \quad \boxed{\Phi \approx \sum_{\nu=0}^{k} F^{\nu} \Delta t^{\nu} / \nu!}. \tag{17}$$

- Матрица порождающих шумов

$$\boxed{\Gamma Q_d \Gamma^T = \int_0^{\Delta t} \Phi(\tau) G Q G^{\mathrm{T}} \Phi^{\mathrm{T}}(\tau) d\tau}. \tag{18}$$

Если интервал дискретизации мал, то $\Phi(\tau) \approx \Phi^*$

$$\boxed{\Gamma\, Q_d \Gamma^{\mathrm{T}} \approx \Phi^* G Q G^{\mathrm{T}} \left(\Phi^*\right)^{\mathrm{T}} \Delta t}. \tag{19}$$

Или даже более грубая аппроксимация $\Phi(\tau) \approx E$

$$\boxed{\Gamma\, Q_d \Gamma^{\mathrm{T}} \approx G Q G^{\mathrm{T}} \Delta t}. \tag{20}$$

Соотношения для матрицы порождающих шумов

Поскольку

$$\Gamma Q_d \Gamma^{\mathrm{T}} \approx GQG^{\mathrm{T}}\Delta t \qquad (21)$$

Можно использовать

$$\boxed{\Gamma = G\Delta t,\ \ Q_d = \frac{1}{\Delta t}Q},\ M\left(w_i w_i^{\mathrm{T}}\right) = \frac{Q}{\Delta t}. \qquad (22)$$

С другой стороны

$$\boxed{\Gamma = E,\ \ Q_d = GQG^{\mathrm{T}}\Delta t}. \qquad (23)$$

Оба выражения справедливы, т.к. удовлетворяют исходным соотношениям.

Дискретные измерения

Для нахождения дискретных измерений необходимо определить матрицы H_i и R_i.

Для этой цели предположим, что измерения осредняются на интервале

$t \in [t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$

$$\boxed{y_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i + \Delta t}^{t_i} (H(t)x(t) + v(t))dt} \quad ,, \qquad (24)$$

тогда $\boxed{H(t) \approx H(t_i) = H_i}$; $\boxed{R_i \approx \frac{1}{\Delta t} R(t_i)}$. (25)

Заключение

- Описаны методы описания случайных процессов: корреляционная функция, спектральная плотность, формирующий фильтр.
- Показано, что фильтр Калмана-Бьюси является оптимальным линейным байесовским фильтром, который может применятся для линейных нестационарных динамических систем.
- Обсуждены условия стохастической эквивалентности и показана связь дискретной и непрерывной задач линейной фильтрации.