

Лекция 5. Электрический ток

Вопросы:

- Носители тока в средах.
- Сила и плотность тока.
- Уравнение непрерывности.
- Электрическое поле в проводнике с током. Сторонние силы.
- Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах.
- Правила Кирхгофа для разветвленных электрических цепей.

Носители тока в средах

Электрический ток, как известно, представляет собой перенос заряда q через ту или иную поверхность S , например, через сечение проводника. Ток может течь в твердых телах (металлы и полупроводники), в жидкостях (электролиты) и в газах (газовый разряд).

Для протекания тока необходимо наличие в данной среде свободных заряженных частиц, которые принято называть **носителями тока**. Носителями тока в проводящей среде могут быть электроны, ионы, либо макрочастицы, несущие на себе избыточный заряд (например, заряженные пылинки и капельки).

При отсутствии электрического поля носители совершают хаотические (тепловые) движения со скоростью v и через любую поверхность S проходит в обе стороны в среднем одинаковое число носителей того и другого знака, так что ток через эту поверхность равен нулю.

Носители тока в средах

При включении же электрического поля на хаотическое движение носителей накладывается упорядоченное движение со скоростью $\mathbf{u}$ (скорость дрейфа), и через поверхность появляется ток. В этом случае скорость носителей будет $(\mathbf{v} + \mathbf{u})$, но так как средний вектор тепловой скорости $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$, то получается, что их средняя скорость $\langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle$.

Определение: Электрический ток – это направленное упорядоченное движение электрических зарядов.

Сила и плотность тока

Количественной характеристикой электрического тока является **сила тока** I , т. е. величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность S в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Единицей измерения силы тока в системе СИ является 1[A].

Электрический ток может быть распределен по поверхности неравномерно. Поэтому для более детальной характеристики тока вводят **вектор плотности тока** $\mathbf{j}$. Модуль этого вектора равен отношению:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right] \quad (2)$$

где dI – сила тока через элементарную площадку $dS_{\perp}$, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей.

За направление вектора $\mathbf{j}$ принимают направление вектора скорости упорядоченного движения (дрейфа) положительных носителей.

Сила и плотность тока

Перенос отрицательного заряда dq_- в одном направлении ($\mathbf{i}_-$) эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда dq_+ в противоположном направлении ($\mathbf{i}_+$). Поэтому, если ток создается носителями обоих знаков, то через данную поверхность S за время dt пройдет ток с силой:

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{|dq_-|}{dt} \quad (3)$$

Или этот ток можно трактовать также через плотность тока:

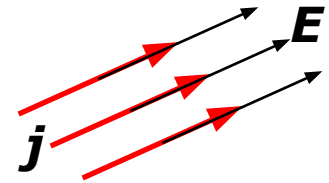
$$\vec{j} = e^+ \cdot n^+ \cdot \vec{u}_+ + e^- \cdot n^- \cdot \vec{u}_- = \rho_+ \cdot \vec{u}_+ + \rho_- \cdot \vec{u}_- \quad (4)$$

где e^+ , e^- - элементарные положительные и отрицательные заряды, n^+ , n^- - концентрации положительных и отрицательных носителей, $\mathbf{i}_+$, $\mathbf{i}_-$ - направленные скорости движения положительных и отрицательных носителей (эти вектора – противоположны), ρ_+ , ρ_- - объемные плотности зарядов положительных и отрицательных носителей.

Замечание: Из-за разных знаков у ρ_+ и ρ_- оба слагаемых в (4) имеют одно направление, поэтому выражение (4) в скалярном виде выглядит также: $j = \rho_+ \cdot u_+ + |\rho_-| \cdot u_-$.

Сила и плотность тока

Поле вектора $\mathbf{j}$ можно изобразить графически с помощью **линий тока** (линий вектора $\mathbf{j}$), которые проводятся так же, как и линии вектора $\mathbf{E}$.



Зная вектор плотности тока $\mathbf{j}$ в каждой точке пространства (интересующей нас поверхности S), можно найти силу тока через поверхность:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \vec{ds} = \int_S j_n \cdot ds \quad (5)$$

Причем, сила тока - величина алгебраическая (может быть $+I$, $-I$), и ее знак зависит от выбора направления нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S .

Ток, не изменяющийся со временем, называется **постоянным**, для него справедливо равенство:

$$I = \frac{q}{t}$$

где q – заряд, переносимый за конечное время t через рассматриваемую поверхность.

Уравнение неразрывности

Пусть в некоторой проводящей среде течет ток через замкнутую поверхность S , для которой определим положительную внешнюю нормаль $\vec{n}$. Тогда интеграл $\oint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ определяет заряд, выходящий в единицу времени из объема V , ограниченного рассматриваемой поверхностью.

В силу закона сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда, содержащегося в объеме V , т. е. имеет место:

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{dq}{dt} \quad (6)$$

Выражение (6) – это интегральная форма **уравнения непрерывности**, является, по существу, аналитическим выражением закона сохранения заряда в изолированной системе.

Уравнение неразрывности

Для преобразования уравнения (6) к дифференциальной форме представим заряд как $q = \int_V \rho \cdot dV$, поток $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ согласно теореме Остроградского-Гаусса как $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla j \cdot dV$, тогда получаем: $\int_V \nabla j \cdot dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV$, так как плотность заряда ρ зависит от времени и от координат, а интеграл $\int_V \rho \cdot dV$ зависит только от времени. Последнее равенство должно выполняться при произвольном выборе объема dV , а это возможно лишь тогда, когда в каждой точке пространства будет выполняться условие: $\nabla j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (7)

Это дифференциальная форма записи уравнения непрерывности.

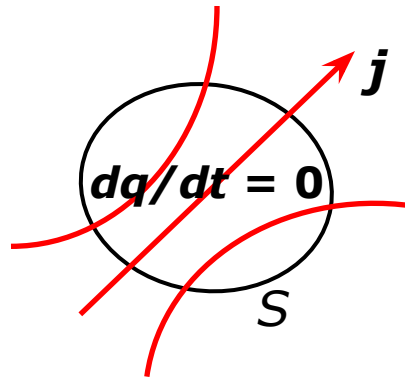
Уравнение неразрывности

Согласно (7) в точках, для которых дивергенция $\mathbf{j}$ имеет место (т. е. $\nabla \cdot \mathbf{j} \neq 0$), существуют источники вектора $\mathbf{j}$ (источники тока) и происходит убывание заряда.

В случае стационарного тока, когда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ($\rho = \text{const}$), получаем:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (8)$$

Последнее часто называют **условием стационарности тока**, т. е. в этом случае вектор $\mathbf{j}$ не имеет источников, а линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются (они – замкнуты сами на себя внешним образом) и, соответственно, $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\vec{S} = 0$.

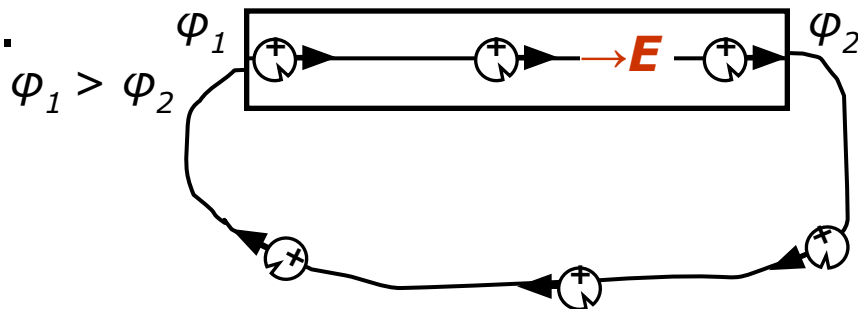


Электрическое поле в проводнике с током.

Сторонние силы

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приведет очень быстро к тому, что поле внутри проводника исчезнет (потенциал – выравняется) и ток прекратится.

Для того, чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом φ_2 (сами носители – положительные) непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим потенциалом φ_1 – непрерывно их подводить (см. рис.). Иными словами, необходимо осуществлять круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Это согласуется с тем, что линии постоянного тока – замкнуты.



Электрическое поле в проводнике с током.

Сторонние силы

Циркуляция вектора $\mathbf{E}$ электростатического поля равна 0, т. е. $\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители движутся в направлении $\mathbf{E}$ (т. е. в сторону убывания потенциала), должны быть участки, где перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против кулоновских сил электростатического поля.

Перемещение зарядов на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатической природы, называемых **сторонними силами**. Сторонние силы могут иметь химическую, фотоэлектрическую, электромагнитную и прочую природу (эти силы реализуются в гальванических элементах, аккумуляторах, солнечных элементах, динамо-машине).

Таким образом, для поддержания тока постоянным необходимы сторонние силы, действующие либо на всей цепи, либо на ее отдельных участках.

Электрическое поле в проводнике с током.

Сторонние силы

Сторонние силы принято характеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами.

Определение: Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется **электродвижущей силой (э. д. с.)** действующей в цепи

(или на ее участке): $E = \frac{A}{q}$ (9)

Размерность э. д. с. в СИ – [В], как у потенциала.

По аналогии с электростатическим полем **E** , проявляющим себя в кулоновском силовом взаимодействии зарядов, вводят поле сторонних сил и его

напряженность **E^*** , как: $E^* = \frac{\vec{F}^*}{q}$ (10)

где **F^*** - вектор сторонней силы, q – единичный положительный заряд.

Электрическое поле в проводнике с током.

Сторонние силы

По определению работа сторонних сил над зарядом q на участке цепи 1-2: $A_{12} = \int_1^2 \vec{F}^* \cdot d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$, а разделив на q , получаем э. д. с., действующую на этом участке:

$$E_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \quad (11)$$

А взяв циркуляцию вектора напряженности поля сторонних сил, получаем э. д. с., действующую во всей цепи:

$$E = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \quad (12)$$

Таким образом, в электрической цепи, состоящей из системы проводников и источников тока, в общем случае, действует как кулоновское поле с напряженностью $\vec{E}$, так и поле сторонних сил с напряженностью $\vec{E}^*$, т.е. – результирующее поле $\vec{E} = \vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}^*$, которое воздействует на заряд q с силой:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{кул}} + \vec{F}^* = q \cdot (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}^*) \quad (13)$$

Электрическое поле в проводнике с током.

Сторонние силы

Работа, совершаемая этой силой над зарядом на участке цепи 1-2:

$$A_{12} = q \cdot \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + q \cdot \int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot E_{12}$$

Определение: Величина, численно равная работе, совершаемой кулоновскими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется **падением напряжения** (или просто **напряжением**) на данном участке цепи 1-2:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным, для такого участка: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Участок цепи, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным, для него:

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12} .$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- *Закон Ома в интегральной форме*

Немецкий физик Г. Ом в 1826 г. экспериментально установил закон, согласно которому:

сила тока, протекающего по однородному проводнику (в смысле отсутствия сторонних сил), пропорциональна разности потенциалов на его концах, т. е. напряжению на проводнике:

$$I = \frac{1}{R} \cdot U \quad (16)$$

Здесь $U = \varphi_1 - \varphi_2$, R – электрическое сопротивление проводника. Выражение (16) принято рассматривать как интегральную форму закона Ома.

Единицей измерения сопротивления в СИ является $1[\text{Ом}] = 1[\text{В}] / 1[\text{А}]$. Сопротивление R зависит от формы и размеров проводника, свойств материала, температуры, распределения тока по объему проводника.

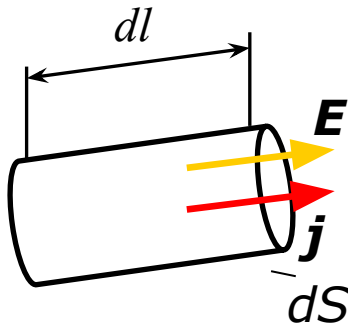
Так для однородного цилиндрического проводника имеем:

$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$, где ρ – удельное электрическое сопротивление материала проводника в $[\text{Ом} \cdot \text{м}]$, l – его длина, а S – сечение проводника.

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- Закон Ома в дифференциальной форме

Рассмотрим изотропный проводник, в котором упорядоченное движение носителей тока происходит в направлении вектора $\mathbf{E}$ или иначе: вектора $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ сонаправлены. Выделим мысленно в окрестности некоторой точки проводящей среды элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, основанием dS и длиной dl .



На основании интегрального закона Ома $I = U/R$, подставляя выражение для тока, текущего через сечение dS с плотностью j , как $I = j \cdot dS$, напряжение на цилиндрическом элементе $U = E \cdot dl$ и его сопротивление $R = \rho \cdot dl / dS$, имеем:

$$j \cdot dS = \frac{E \cdot dl}{\rho \cdot dl} \cdot dS;$$

отсюда получаем плотность тока $j = \frac{1}{\rho} \cdot E$.

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

Таким образом, получаем дифференциальную форму закона Ома в векторном виде:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \mathbf{E} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (17)$$

где $\sigma = 1/\rho$ - электропроводность материала проводника (размерность σ в СИ: 1 [См/м]).

Замечание: Если электроток обусловлен носителями одного знака, то можно записать $\mathbf{j} = e \cdot n \cdot \mathbf{u}$ и, сравнивая с (17), заключаем: скорость дрейфа $\mathbf{u}$ пропорциональна напряженности поля $\mathbf{E}$, т. е. силе, сообщающей носителям это движение. А из механики известно, что пропорциональность скорости приложенной к телу силе наблюдается в тех случаях, когда кроме силы, вызвавшей само движение, на тело также действует сила сопротивления среды. В нашем случае протекания тока в среде эта сила определяется взаимодействием носителей тока с частицами среды (проводника) и обуславливает электросопротивление проводника. В связи с этим дополнительно носители характеризуются **подвижностью** b , которая определяется как отношение $b = u / E$.

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- *Закон Ома для неоднородного участка цепи*

На неоднородном участке электроцепи на носители тока действуют, кроме кулоновских сил $\mathbf{F}_{\text{кул}} = e \cdot \mathbf{E}$, еще и сторонние силы $\mathbf{F}^* = e \cdot \mathbf{E}^*$, которые также вызывают направленное движение зарядов. Очевидно, что средняя скорость $\mathbf{u}$ в этом случае пропорциональна суммарной силе $e \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$. Соответственно и плотность тока на таком участке будет пропорциональна сумме $(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$:

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \quad (18)$$

Выражение (18) является дифференциальной формой закона Ома для неоднородной цепи.

Для случая тонких проводников (или контура тока в объемном проводнике) и совпадения направления тока с осью проводника плотность тока $\mathbf{j}$ можно считать постоянной во всех точках сечения провода S . Разделив (18) на σ и умножив скалярно на элемент провода $d\mathbf{l}$, взятый по направлению от сечения 1 к сечению 2, получаем при последующем интегрировании по длине 1-2:

$$\int_1^2 \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l}$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

Далее записав сумму двух интегралов в последнем выражении как $(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}$ и заменив $\sigma = 1/\rho, j \cdot d\vec{l} = j_l \cdot dl$, где $j_l = I / S$, причем $I = \text{const}$ (по условию); получаем левый интеграл $\int_1^2 \frac{j \cdot d\vec{l}}{\sigma} = I \cdot \int_1^2 \frac{dl}{S \rho}$, $\int_1^2 \rho \cdot \frac{dl}{S} = R$ - полное сопротивление участка цепи между сечением 1 и сечением 2.

Таким образом, интегральное уравнение преобразуется к виду:

$$I \cdot R = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12} \quad (19)$$

$$\text{или } I = \frac{1}{R} [(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}] \quad (20)$$

Выражения (19) и (20) являются интегральными формами закона Ома для неоднородного участка цепи.

Замечание: Э. д. с. E_{12} , как и ток I , - алгебраическая величина: если э. д. с. способствует движению положительных носителей в выбранном направлении (1-2), $E_{12} > 0$, а если - препятствует, то $E_{12} < 0$. R - это полное сопротивление цепи (с учетом $r_{\text{источ}}$).

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

■ Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме

В случае, когда проводник с током неподвижен в пространстве и в нем не происходит химических превращений, работа постоянного тока, определяется как:

$$A = U \cdot I \cdot t$$

(21)

где $I \cdot t = q$ – заряд, прошедший за время t через каждое сечение проводника, U – напряжение, приложенное к концам проводника. Причем для однородного участка цепи эта работа равна $A = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot q$, а для неоднородного участка цепи - $A = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot q + E_{12} \cdot q$.

Работа (21) затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего он – нагревается. Принято говорить, что при протекании тока в проводнике выделяется тепло в количестве $Q = U \cdot I \cdot t$, а заменив по закону Ома напряжение $U = I \cdot R$, приходим к интегральной форме закона Джоуля-Ленца:

$$Q = R \cdot I^2 \cdot t \quad (22)$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

■ Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме

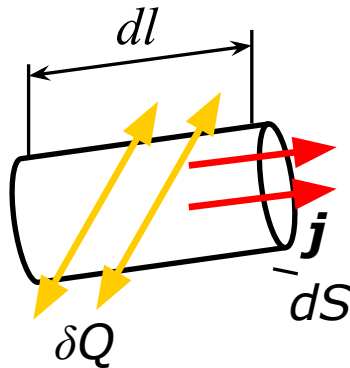
В случае переменной во времени силы тока джоулево тепло рассчитывается по формуле:

$$Q = \int_0^t R \cdot I^2 \cdot dt \quad (23)$$

■ Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

Для характеристики локального тепловыделения используется понятие удельной тепловой мощности тока

$\dot{Q}_{\text{уд}}$ ([Дж/м³·с]). Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем.



Согласно закону Джоуля-Ленца в форме (23) за время dt выделяется элементарное тепло $\delta Q = R \cdot I^2 \cdot dt =$

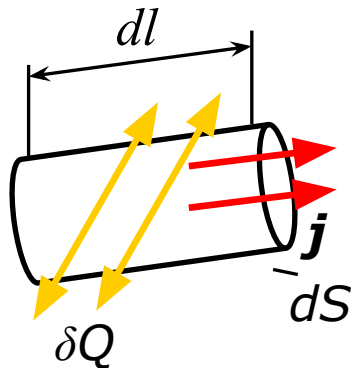
$$= \frac{\rho \cdot dl}{dS} \cdot (j \cdot dS)^2 \cdot dt = \rho \cdot j^2 \cdot dV \cdot dt = \rho \cdot j^2 \cdot dV \cdot dt$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

- Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

Разделив последнее выражение на $(dV \cdot dt)$, определим количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени: $\dot{Q}_{yd} = \rho \cdot j^2$ или $\dot{Q}_{yd} = j^2 / \sigma$ (24)

Выражения (24) являются дифференциальной формой закона Джоуля-Ленца. Это наиболее общая форма записи данного закона – работает для любых проводников вне зависимости от их формы, однородности и природы сил, возбуждающих электрический ток.



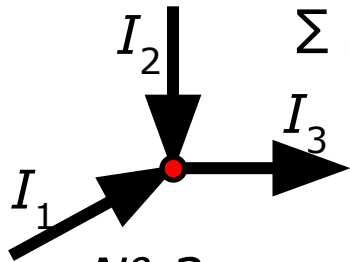
Если на носители тока действуют только электрические силы, то (24) можно переписать как $\dot{Q}_{yd} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma \cdot E^2$.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Определение. Узлом электрической цепи называется точка, в которой сходятся более чем два проводника.

■ Правило № 1

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:



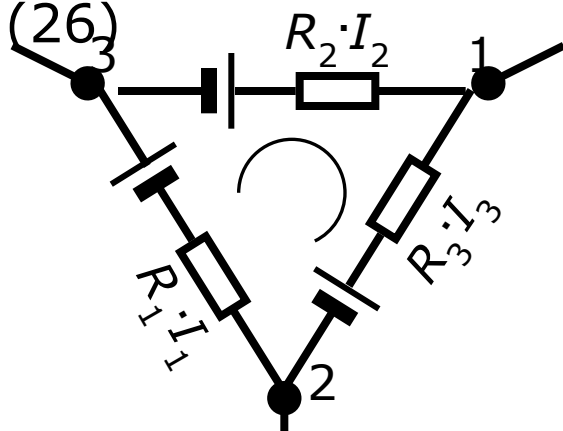
$$\sum I_i = 0 \quad (25)$$

Замечание. Правило вытекает из уравнения непрерывности.

■ Правило № 2

Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме э.д.с., действующих в этом контуре:

(26)



Замечание. Уравнение (26) является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи.

Задавшись направлением обхода контура, составляют систему уравнений:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot R_1 &= \varphi_2 - \varphi_3 + E_1 \\ I_2 \cdot R_2 &= \varphi_3 - \varphi_1 + E_2 \\ I_3 \cdot R_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - E_3 \\ \hline \sum I_i \cdot R_i &= \sum E_i \end{aligned}$$