

Лекция 10. Электромагнитная индукция

Вопросы:

- Закон Фарадея. Правило Ленца
- Физическая природа электромагнитной индукции
- Самоиндукция
- Взаимная индукция
- Вихревые токи
- Плотность энергии магнитного поля
- Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление

Закон Фарадея. Правило Ленца

- Открытие Фарадея

В 1831 г. Майкл Фарадей обнаружил, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (т. е. потока вектора **$\mathbf{B}$** : $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$), охватываемого этим контуром, возникает электрический ток – последний называли **индукционным током** (I_i). Само это явление было названо **электромагнитной индукцией**.

Появление индукционного тока означало, что при изменении магнитного потока – в контуре возникает **Э.Д.С. индукции** E_i . При этом было отмечено, что величина Э.Д.С. совершенно не зависит от того, каким образом произошло изменение потока Φ , и определяется лишь скоростью его изменения, т. е. величиной $d\Phi/dt$, и, соответственно, закон Фарадея получил аналитическое выражение:

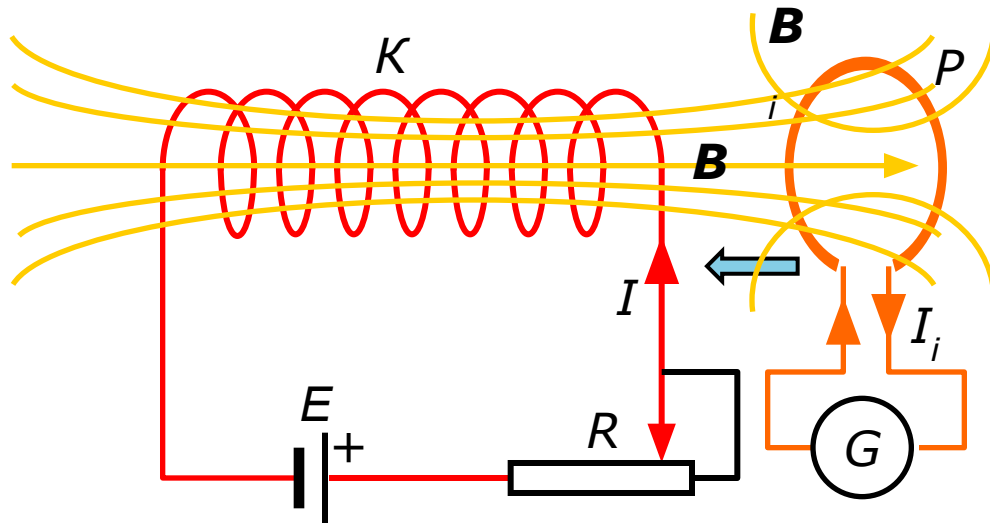
$$E_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

Закон Фарадея. Правило Ленца

- Открытие Фарадея

Фарадей обнаружил, что индукционный ток (см. рис.) можно вызвать двумя различными способами:

- 1) перемещением рамки P (или ее отдельных частей – деформация рамки) в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$ неподвижной катушки K ;
- 2) изменением магнитного поля $\mathbf{B}$ (за счет движения катушки K , или вследствие изменения тока I в ней, или в результате того и другого вместе) при неподвижной рамки P .



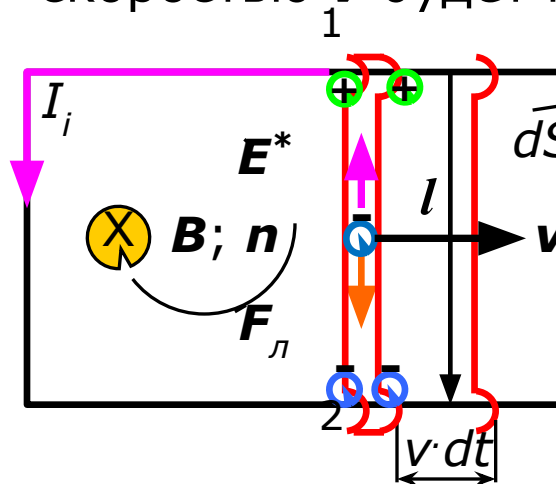
$\mathbf{B}_i$ – магнитное поле индукционного тока противодействует полю $\mathbf{B}$.

- Правило Э.Х. Ленца

Правило устанавливает направление индукционного тока (а, следовательно, и знак E_i). Оно гласит: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Физическая природа электромагнитной индукции

Рассмотрим контур с подвижной перемычкой длины l , который находится в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$, перпендикулярном плоскости контура и направленном за плоскость рисунка. Начнем двигать перемычку вправо со скоростью $\mathbf{v}$; с этой же скоростью будут двигаться и носители тока в перемычке – электроны. Тогда на каждый электрон начнет действовать вдоль перемычки магнитная сила Лоренца, направленная вниз: $\mathbf{F}_\text{л} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Произойдет перераспределение носителей в перемычке (внизу накопятся электроны, а сверху избыток положительных ионов); в контуре появится ток – индукционный ток, направленный «вверх» – против часовой стрелки. И, если движение перемычки со скоростью $\mathbf{v}$ будет продолжаться, то и индукционный ток будет



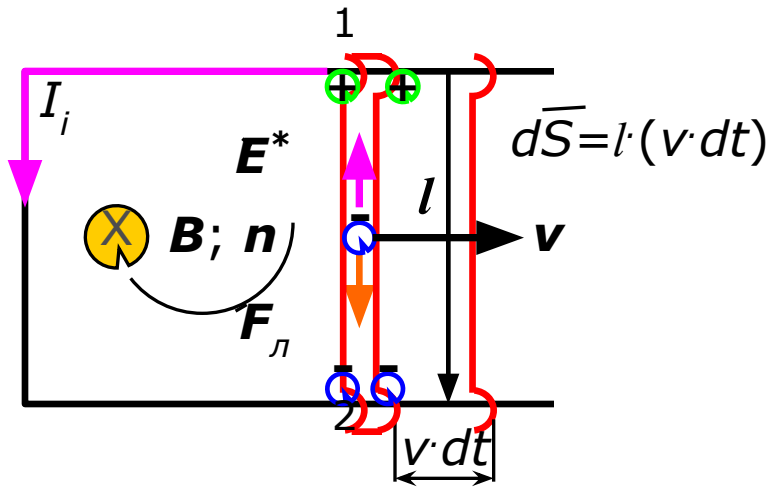
поддерживаться в контуре. Следовательно, сила $\mathbf{F}_\text{л}$ здесь играет роль сторонней силы, и ей соответствует поле сторонних сил: $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}_\text{л} / -e = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, где $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ постоянный вектор. Так как циркуляция вектора $\mathbf{E}^*$ определяет э.д.с. в контуре, то здесь имеем
$$E_i = \oint_1^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \int_1^2 d\mathbf{l}$$

Физическая природа электромагнитной индукции

Получаем $E_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$; произведем циклическую перестановку для смешанного произведения трех векторов в последнем выражении для э.д.с.: $E_i = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{v})$. Умножим и разделим последнее на промежуток времени dt , т. е. имеем

$$E_i = \frac{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{v} \cdot dt)}{dt}, \text{ где } (\mathbf{l} \times \mathbf{v} \cdot dt) = -\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}. \text{ В результате получаем}$$

$$\text{доказываемое выражение } E_i = -\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{dt} = -\frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$



При данном выборе направления $\mathbf{n}$ (по магнитному полю) знак $d\Phi/dt$ – положительный, а знак E_i – отрицательный (индукционный ток I_i также отрицательный).

Замечание: Идея схемы, представленной на рисунке, лежит в основе действия всех индукционных генераторов тока (динамо-машины).

Самоиндукция

Возникновение э.д.с. индукции в контуре, по которому течет изменяющийся во времени ток, называется явлением **самоиндукции**.

Это также объясняется с позиций закона Фарадея... Электрический ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот же контур магнитный поток $\Phi = B \cdot S$, который, как видно из экспериментов, будет пропорционален самому току, т. е.

$$\Phi = L \cdot I \quad (2)$$

где L – коэффициент пропорциональности, называемый **индуктивностью** контура.

В соответствии с правилом знаков для магнитного потока Φ и силы тока I , эти величины всегда имеют одинаковые знаки, а, следовательно, индуктивность L – величина положительная. Индуктивность зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды (μ). Если контур жесткий и поблизости нет ферромагнетиков, то $L = \text{const}$ и не зависит от тока. Размерность в СИ для L – [Гн].

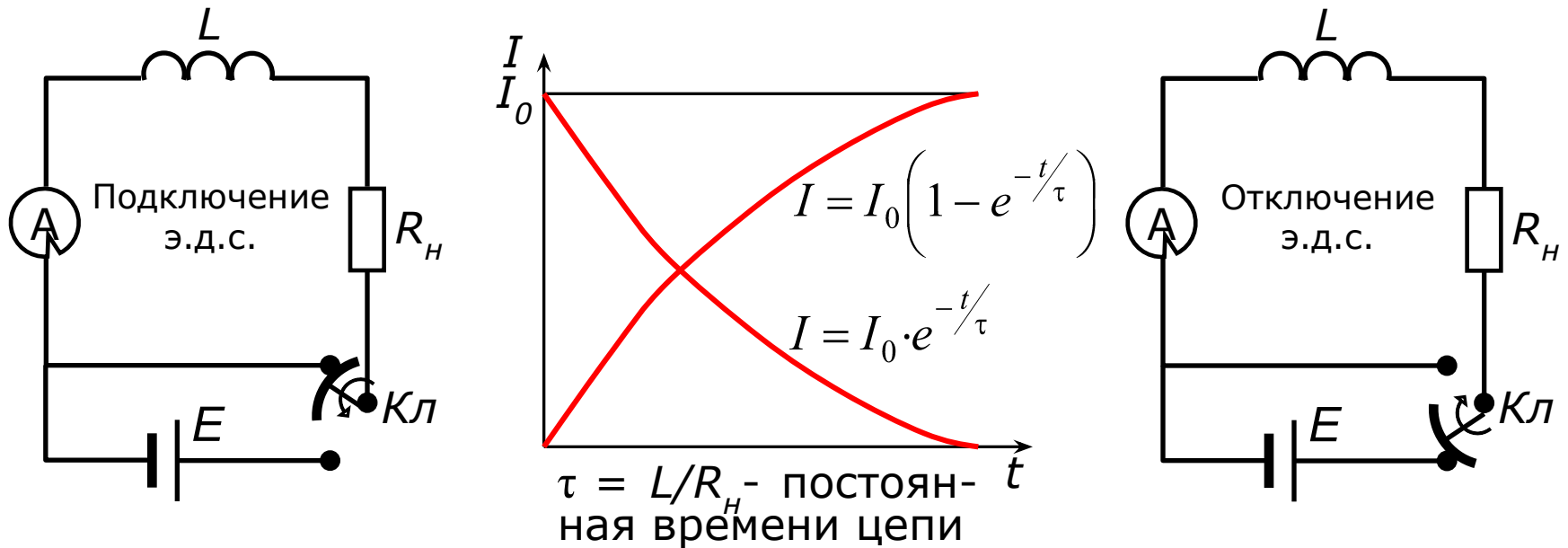
Таким образом, при изменении тока I в контуре согласно (1) возникает **э.д.с. самоиндукции**:

$$E_s = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(L \cdot I)}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (3)$$

где $L = \text{const}$.

Самоиндукция

Характерные процессы самоиндукции наблюдаются при замыкании и размыкании электрических цепей, содержащих индуктивность L и сопротивление R_H . Так установление тока в реальных цепях происходит после соответствующей коммутации – не мгновенно, а за определенный промежуток времени (см. график).



Пример: Возникновение электрических дуг между контактами выключателя в цепях с большими реактивными нагрузками (обмотки электромагнитов).

Самоиндукция

- Расчет индуктивности реальных контуров

Для расчета индуктивности катушки с сердечником из материала с заданной проницаемостью μ определяется потокосцепление с этим контуром, т. е. $\Psi = N \cdot (B \cdot S)$, где N – число витков в катушке, S – площадь контура (по его среднему сечению). А затем определяется индуктивность по формуле: $L = \Psi / I$.

Пример: Расчет индуктивности длинного соленоида с сердечником (μ).

1) Определяем индукцию магнитного поля в соленоиде:

$B = \mu \cdot \mu_0 \cdot H$, где напряженность поля соленоида $H = n \cdot I = N / l \cdot I$ (N – полное число витков, l – длина соленоида).

Таким образом, $B = \mu \cdot \mu_0 \cdot (N / l) \cdot I$;

2) Определяем потокосцепление с соленоидом:

$\Psi = N \cdot (\mu \cdot \mu_0 \cdot N / l \cdot I) \cdot S$, а с учетом, что объем соленоида $V = S \cdot l$, получаем $\Psi = \mu \cdot \mu_0 \cdot N^2 / l^2 \cdot V \cdot I = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot V \cdot I$;

3) Рассчитываем индуктивность:

$L = \Psi / I = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot V$.

Взаимная индукция

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2, расположенных достаточно близко друг от друга. Если в контуре 1 течет ток I_1 , то он создает через контур 2 полный магнитный поток (в случае отсутствия ферромагнетиков) $\Phi_2 = L_{21} \cdot I_1$. При изменении тока I_1 во времени в контуре 2 наводится э.д.с. индукции:

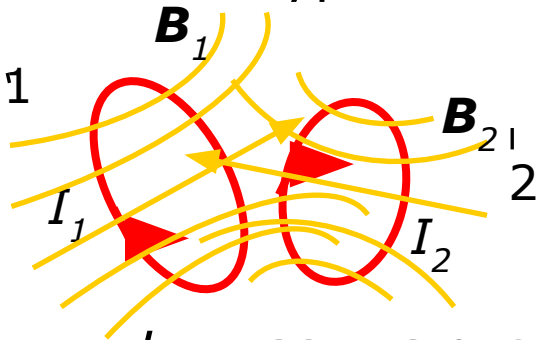
$$E_{i2} = - L_{21} \cdot dI_1 / dt \quad (4)$$

Аналогично, при протекании тока I_2 в контуре 2 возникает сцепленный с контуром 1 магнитный поток $\Phi_1 = L_{12} \cdot I_2$, а при изменениях тока I_2 в контуре 1 индуцируется э.д.с.:

$$E_{i1} = - L_{12} \cdot dI_2 / dt \quad (5)$$

Контур 1 и 2 в этом случае называются **связанными**.

Явление возникновения э.д.с. в одном из связанных контуров при изменениях силы тока в другом контуре называется **взаимной индукцией**.



Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются **взаимной индуктивностью контуров**. Соответствующий расчет дает, что в отсутствии ферромагнетиков эти коэффициенты всегда равны: $L_{12} = L_{21}$.

Взаимная индукция

Часто последнее свойство взаимной индуктивности называют теоремой взаимности. Смысл равенства $L_{12} = L_{21}$ состоит в том, что в любом случае поток Φ_1 сквозь контур 1, созданный током I в контуре 2, равен потоку Φ_2 сквозь контур 2, созданному таким же током I в контуре 1.

Замечание: В отличие от собственной индуктивности контура L , которая всегда положительная величина, взаимная индуктивность L_{12} – величина алгебраическая (в частности, может равняться нулю). Это связано с тем, что поток Φ_1 и ток I_2 относятся к разным контурам и их знаки зависят от выбора нормали $\mathbf{n}_1$ к контуру 1 и направления обхода контура 2, которые в свою очередь должны вместе с обходом контура 1 и нормалью к контуру 2 – образовывать правовинтовые системы.

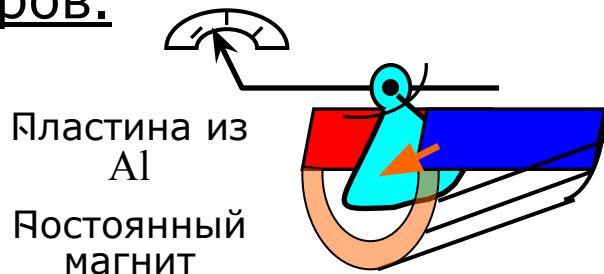
Вихревые токи

Вихревые токи (или **токи Фуко**) – это индукционные токи, которые возбуждаются в сплошных массивных проводниках.

Электросопротивление массивного проводника – мало, поэтому токи Фуко могут достигать очень больших величин. В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которая их вызывает.

- **Применения токов Фуко в технике**

Пример 1: Движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники вследствие вихревых токов испытывают сильное торможение. Этим пользуются для демпфирования (успокоения) подвижных частей приборов.



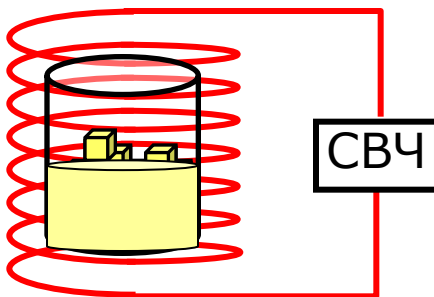
При вращении пластины на оси прибора в поле постоянного магнита возникают токи Фуко, которые тормозят всю подвижную систему прибора.

Вихревые токи

- Применения токов Фуко в технике

Пример 2: Для плавки металлов в индукционных высокочастотных печах.

Здесь в массивную катушку (индуктор), питаемую высокочастотным током большой величины (сотни ампер), помещают керамический тигель с кусками переплавляемого металла. При включении установки куски металла достаточно быстро разогреваются интенсивными вихревыми токами до состояния плавления.

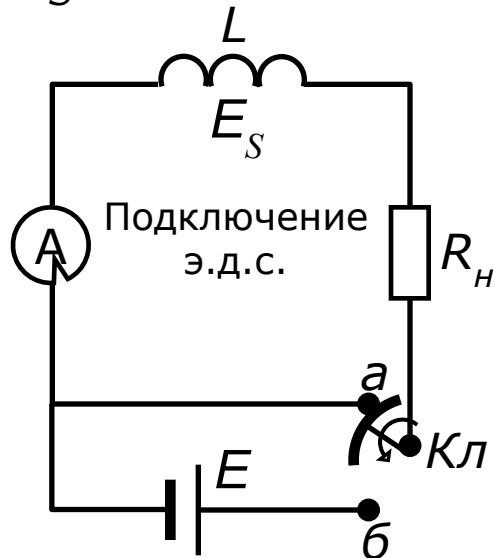


Пример 3: Борьба с паразитными токами Фуко в трансформаторных сердечниках.

Для уменьшения нагрева сердечников последние выполняют наборными из тонких пластин с изолирующим покрытием для увеличения сопротивления в возможных местах появления вихревых токов.

Плотность энергии магнитного поля

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую индуктивность L и сопротивление R_n , которую с помощью быстродействующего коммутатора $Кл$ подключим (из a в $б$) к источнику питания E . В таком замкнутом контуре начнет возрастать ток, а это приведет к появлению э.д.с. самоиндукции E_S . Тогда согласно закону Ома имеем $R \cdot I = E + E_S$ или $E = R \cdot I - E_S$.



Найдем элементарную работу $\delta A_{стор'}$, которую совершают сторонние силы источника E за время dt , для этого умножим последнее уравнение на $(I \cdot dt)$:

$$E \cdot I \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot dt - E_S \cdot I \cdot dt \quad (6)$$

С учетом смысла каждого слагаемого в уравнении (6) и закона Фарадея $E_S = -d\Phi/dt$, представим (6) как $\delta A_{стор} = \delta Q + I \cdot d\Phi$, где δQ – джоулево тепловыделение, а

$I \cdot d\Phi$ (так называемая дополнительная работа $\delta A_{доп}$) определяет работу источника против э.д.с. самоиндукции. Далее будем считать, что вблизи контура нет ферромагнетиков, следовательно, $d\Phi = L \cdot dI$ и получаем $\delta A_{доп} = I \cdot d\Phi = L \cdot I \cdot dI$.

Плотность энергии магнитного поля

Проинтегрировав последнее выражение, получаем:

$$A_{\text{доп}} = \int \delta A_{\text{доп}} = (L \cdot I^2)/2 \quad (7)$$

Таким образом, часть работы источника питания ($A_{\text{доп}}$) идет на «создание» магнитного поля, т.е. превращается в энергию магнитного поля, обусловленного протеканием тока в катушке с индуктивностью L . Иначе говоря, в отсутствие ферромагнетиков контур с L , по которому течет ток I , обладает энергией:

$$W = (L \cdot I^2)/2 = (I \cdot \Phi)/2 = \Phi^2/(2L) \quad (8)$$

Эту энергию называют *магнитной энергией тока* или *собственной энергией контура с током*. Она может быть целиком превращена во внутреннюю энергию проводников (нагрев R_H), если отключить источник E , быстро повернув ключ $Kл$ в положение a .

Для длинного соленоида: индуктивность $L = \mu\mu_0 n^2 V$, где n – число витков на единицу длины, V – объем соленоида; имеем $W = (L \cdot I^2)/2 = \mu\mu_0 n^2 \cdot I^2 \cdot V/2$, а с учетом, что $n \cdot I = H = B/(\mu\mu_0)$, получаем $W = \mu\mu_0 H^2/2 \cdot V = B^2/(2\mu\mu_0) \cdot V = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})/2 \cdot V$.

Выражения $w = \mu\mu_0 H^2/2 = B^2/(2\mu\mu_0) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})/2$ (9) определяют *объемную плотность энергии магнитного поля*.

Плотность энергии магнитного поля

Зная плотность энергии магнитного поля в каждой точке, можно определить энергию поля, заключенную в любом объеме V :

$$W = \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) / 2 \cdot dV \quad (10)$$

Замечание: Часто приходится использовать «энергетический» метод при нахождении индуктивности контура (когда вычисление магнитного потока через контур затруднительно), т. е.

$$L = 1/I^2 \cdot \int B^2 / (\mu\mu_0) \cdot dV \quad (11)$$

В случае наличия N - связанных контуров с токами $I_1, I_2, \dots, I_N$ можно показать, что энергия магнитного поля такой системы токов (в отсутствии ферромагнетиков) определяется:

$$W = 1/2 \sum_{i,k=1}^N L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k \quad (12)$$

где $L_{ik} = L_{ki}$ - взаимная индуктивность i -го и k -го контуров, $L_{ii} = L_i$ - собственная индуктивность i -го контура.

Энергия и силы в магнитном поле.

Магнитное давление

Наиболее общим методом определения сил в магнитном поле является энергетический, при этом используют выражение (12) для энергии магнитного поля.

Для случая двух контуров с токами I_1 и I_2 магнитную энергию можно представить как:

$$W = 1/2(I_1 \cdot \Phi_1 + I_2 \cdot \Phi_2) \quad (13)$$

где $\Phi_1 = L_1 \cdot I_1 + L_{12} \cdot I_2$, $\Phi_2 = L_2 \cdot I_2 + L_{21} \cdot I_1$ – полные магнитные потоки через контура 1 и 2 соответственно.

Согласно закону сохранения энергии элементарная работа δA^* , которую совершают источники тока, включенные в эти контура, идет: на теплоту δQ , на приращение магнитной энергии системы dW (в ходе движения контуров или при изменении токов в них), на механическую работу $\delta A_{\text{мех}}$ (при перемещении или деформации контуров), т. е.

$$\delta A^* = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}}$$

Нас интересует только работа источников против э.д.с. индукции и самоиндукции в каждом контуре, т. е. дополнительная работа: $\delta A_{\text{доп}} = - (E_{i1} + E_{S1}) \cdot I_1 \cdot dt - (E_{i2} + E_{S2}) \cdot I_2 \cdot dt$, а с учетом, что $(E_i + E_S) = - d\Phi/dt$, получаем $\delta A_{\text{доп}} = I_1 \cdot d\Phi_1 + I_2 \cdot d\Phi_2$.

Энергия и силы в магнитном поле.

Магнитное давление

Именно дополнительная работа источников идет на приращение магнитной энергии и на механическую работу, таким образом имеем:

$$I_1 \cdot d\Phi_1 + I_2 \cdot d\Phi_2 = dW + \delta A_{\text{мех}} \quad (14)$$

Формула (14) является основной для расчета $\delta A_{\text{мех}}$, а затем и сил в магнитном поле, используя определение работы $\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$.

В итоге сила в магнитном поле определяется производными:

$$F = - dW_{\Phi} / dl = dW_I / dl \quad (15)$$

где dW_{Φ} - приращение магнитной энергии в случае $\Phi_{1;2} = \text{const}$, а dW_I - приращение магнитной энергии в случае $I_{1;2} = \text{const}$.

Замечание: Так из формулы (13) для случая постоянных токов в контурах: $dW_I = \frac{1}{2}(I_1 \cdot d\Phi_1 + I_2 \cdot d\Phi_2)$.

Энергия и силы в магнитном поле.

Магнитное давление

Магнитное давление

Если представить, что радиус сечения соленоида, по обмотке которого течет постоянный ток I , увеличился на dr , то в этом случае силы Ампера совершили работу:

$$\delta A_{\text{мех}} = dW_I = p \cdot S \cdot dr,$$

где p – давление, S – боковая поверхность соленоида.

С другой стороны, при $\mu = 1$ имеем приращение энергии магнитного поля $dW_I = d(B^2/2\mu_0 \cdot V) = B^2/2\mu_0 \cdot S \cdot dr$, где $B = \text{const}$, так как $I = \text{const}$.

Сопоставляя первое и второе выражения для dW_I , заключаем, что *магнитное давление* можно определить как:

$$p = B^2/2\mu_0 \quad (16)$$

Выражение (16) можно обобщить на случай, когда по разные стороны от поверхности с током (током проводимости или током намагничивания) магнитное поле разное $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$:

$$p = \left| \frac{\overline{B_1} \cdot \overline{H_1}}{2} - \frac{\overline{B_2} \cdot \overline{H_2}}{2} \right| \quad (17)$$