Проблемы энерго- и ресурсосбережения

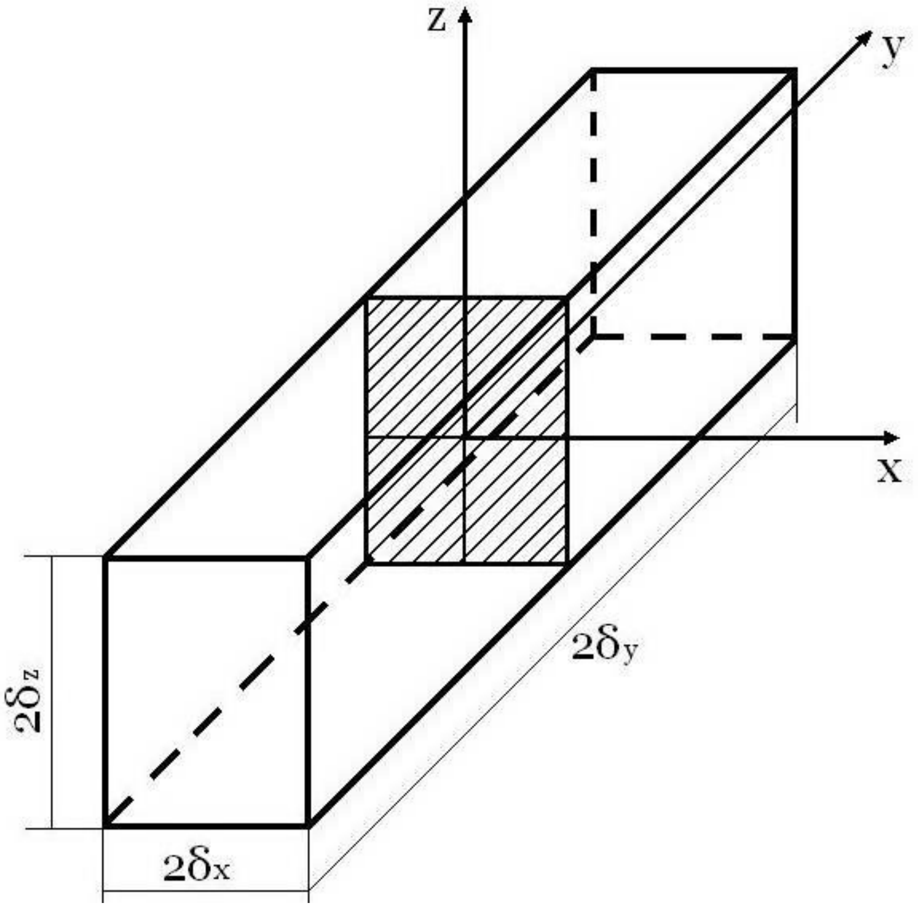
Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров

Нагрев параллелепипеда

Заготовка (параллелепипед) с размерами $2\delta_x 2\delta_y 2\delta_z$ помещена в среду, имеющую температуру $t_{ж}$. Условия нагрева заготовки во всех направлениях одинаковые (коэффициент теплоотдачи $\alpha = const$).

Нагрев параллелепипеда

Расчетная схема



Нагрев параллелепипеда

Дифференциальное уравнение температурного поля при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \qquad (1)$$

Начальные условия

Считаем, что в начале процесса температура в заготовке распределена равномерно, тогда начальные условия:

$$t\left(x, y, z, \tau = 0\right) = t_0 \qquad (2)$$

Граничные условия

Из условий геометрической и тепловой симметрии следует:

$$\frac{\partial t(0, y, z, \tau)}{\partial x} = 0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial t(x, 0, z, \tau)}{\partial y} = 0; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial t(x, y, 0, \tau)}{\partial z} = 0; \qquad (5)$$

Граничные условия

Теплообмен на поверхности заготовки подчиняется закону Ньютона-Рихмана:

- $$\frac{\partial t\left(\pm\delta_x, y, z, \tau\right)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda}\left[t\left(\pm\delta_{жс}, y, z, \tau\right) - t \quad\right]; \qquad (6)$$
- $$\frac{\partial t\left(x, \pm\delta_y, z, \tau\right)}{\partial y} = \frac{\alpha}{\lambda}\left[t\left(x, \pm\delta_{жс}, z, \tau\right) - t \quad\right]; \qquad (7)$$
- $$\frac{\partial t\left(x, y, \pm\delta_z, \tau\right)}{\partial z} = \frac{\alpha}{\lambda}\left[t\left(x, y, \pm\delta_{жс}, \tau\right) - t \quad\right]; \qquad (8)$$

Решение

Решение системы (1)-(8) в безразмерном виде можно представить как *произведение трех решений для неограниченной пластины*, так как заготовка (параллелепипед) образована путем пересечения трех взаимноперпендикулярных неограниченных пластин

Температура

$$\boxed{\theta(x,y,z,\tau)=\theta(x,\tau)\theta(y,\tau)\theta(z,\tau),}$$

где

$$\theta(x,y,z,\tau)=\frac{t(x,y,z,\tau)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}}$$

Температура

$$\theta\left(x,\tau\right)=\frac{t\left(x,\tau\right)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};$$

$$\theta\left(y,\tau\right)=\frac{t\left(y,\tau\right)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};$$

$$\theta\left(z,\tau\right)=\frac{t\left(z,\tau\right)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};$$

Следовательно:

$$\theta\left(x,y,z,\tau\right)=\frac{\left[t\left(x,\tau\right)-t_{ж}\right]\left[t\left(y,\tau\right)-t_{ж}\right]\left[t\left(z,\tau\right)-t_{ж}\right]}{\left(t_0-t_{ж}\right)^3};$$

Температура

Решение задачи о равномерном нагреве пластины известно:

$$\theta(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_{nx}}{\mu_{nx}+\sin\mu_{nx}\cos\mu_{nx}}\cos\left(\mu_{nx}\frac{x}{\delta_x}\right)\exp(-\mu^2{}_{nx}a\tau/\delta^2{}_x);$$

$$\theta(y,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_{ny}}{\mu_{ny}+\sin\mu_{ny}\cos\mu_{ny}}\cos\left(\mu_{ny}\frac{y}{\delta_y}\right)\exp(-\mu^2{}_{ny}a\tau/\delta^2{}_y);$$

$$\theta(z,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_{nz}}{\mu_{nz}+\sin\mu_{nz}\cos\mu_{nz}}\cos\left(\mu_{nz}\frac{z}{\delta_z}\right)\exp(-\mu^2{}_{nz}a\tau/\delta^2{}_z);$$

Характеристические уравнения

Значения $\mu_{nx}, \mu_{ny}, \mu_{nz}$ определятся из характеристических уравнений:

$$\frac{\mu_{nx}}{\mathrm{Bi}_x} = \operatorname{ctg} \mu_{nx},$$

$$\frac{\mu_{ny}}{\mathrm{Bi}_y} = \operatorname{ctg} \mu_{ny},$$

$$\frac{\mu_{nz}}{\mathrm{Bi}_z} = \operatorname{ctg} \mu_{nz}$$

Температура

Решение задачи можно выразить через безразмерные величины:

$$\theta\left(x, y, z, \tau\right) =$$

$$= F_x\left(\mu_n, Bi_x, Fo_x, X\right) \cdot$$

$$\cdot F_y\left(\mu_n, Bi_y, Fo_y, Y\right) \cdot$$

$$\cdot F_z\left(\mu_n, Bi_z, Fo_z, Z\right),$$

Безразмерные величины

где:

$$Bi_x = \frac{\alpha\delta_x}{\lambda}; \qquad Fo_x = \frac{a\tau}{\delta_x^2}; \qquad X = \frac{x}{\delta_x};$$

$$Bi_y = \frac{\alpha\delta_y}{\lambda}; \qquad Fo_y = \frac{a\tau}{\delta_y^2}; \qquad Y = \frac{y}{\delta_y};$$

$$Bi_z = \frac{\alpha\delta_z}{\lambda}; \qquad Fo_z = \frac{a\tau}{\delta_z^2}; \qquad Z = \frac{z}{\delta_z}$$

Средняя температура

Средняя температура заготовки (параллелепипеда) определяется также как произведение трех температур для бесконечной пластины:

$$\overline{\theta}(\tau) = \overline{\theta_x}(\tau)\overline{\theta_y}(\tau)\overline{\theta_z}(\tau),$$

$$\overline{\theta_x}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2\mu_{nx}}{\mu^2{}_{nx} + \mu_{nx}\sin\mu_{nx}\cos\mu_{nx}} \exp(-\mu^2{}_{nx} a\tau / \delta^2{}_x);$$

$$\overline{\theta_y}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2\mu_{ny}}{\mu^2{}_{ny} + \mu_{ny}\sin\mu_{ny}\cos\mu_{ny}} \exp(-\mu^2{}_{ny} a\tau / \delta^2{}_y);$$

$$\overline{\theta_z}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2\mu_{nz}}{\mu^2{}_{nz} + \mu_{nz}\sin\mu_{nz}\cos\mu_{nz}} \exp(-\mu^2{}_{nz} a\tau / \delta^2{}_z)$$

Средняя температура

где:

$$\overline{\theta_x}(\tau) = \frac{\overline{t_{xж}}(\tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}};$$

$$\overline{\theta_y}(\tau) = \frac{\overline{t_{yж}}(\tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}};$$

$$\overline{\theta_z}(\tau) = \frac{\overline{t_{zж}}(\tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}};$$

Охлаждение длинного прямоугольного стержня

Пусть стержень имеет ограниченные размеры в направлении осей x и y, а в направлении оси z он неограничен: $\partial t/\partial z=0$ (теплообмен в направлении оси z отсутствует).

Данное тело можно представить как результат пересечения двух неограниченных пластин во взаимно перпендикулярном направлении.

Охлаждение длинного прямоугольного стержня

Дифференциальное уравнение температурного поля при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

.

. Начальные условия

Считаем, что в начале процесса температура в стержне распределена равномерно, тогда начальные условия:

$$t(x, y, \tau = 0) = t_0 \qquad (2)$$

. Граничные условия

Из условий геометрической и тепловой симметрии следует:

$$\frac{\partial t\left(0,y,\tau\right)}{\partial x}=0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial t\left(x,0,\tau\right)}{\partial y}=0; \qquad (4)$$

.

Граничные условия

Теплообмен на поверхности стержня подчиняется закону Ньютона-Рихмана:

$$\frac{\partial t\left(\pm\delta_x, y, \tau\right)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda}\left[t\left(\pm\delta_{жс}, y, \tau\right) - t\quad\right]; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial t\left(x, \pm\delta_y, \tau\right)}{\partial y} = \frac{\alpha}{\lambda}\left[t\left(x, \pm\delta_{yжс}, \tau\right) - t\quad\right]; \qquad (6)$$

. Температура

$$\boxed{\theta\left(x,y,\tau\right)=\theta\left(x,\tau\right)\theta\left(y,\tau\right),}$$

где

$$\theta\left(x,y,\tau\right)=\frac{t\left(x,y,\tau\right)-t_{жс}}{t_0-t_{жс}}$$

.

Температура

$$\theta(x,\tau)=\frac{t(x,\tau)-t_{жс}}{t_0-t_{жс}};\qquad \theta(y,\tau)=\frac{t(y,\tau)-t_{жс}}{t_0-t_{жс}};$$

Следовательно:

$$\theta(x,y,\tau)=\frac{\left[t(x,\tau)-t_{жс}\right]\left[t(y,\tau)-t_{жс}\right]}{\left(t_0-t_{жс}\right)^2};$$

Температура

Решение задачи о равномерном нагреве стержня известно:

$$\theta(x,\tau) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_{nx}}{\mu_{nx} + \sin\mu_{nx}\cos\mu_{nx}} \cos\left(\mu_{nx}\frac{x}{\delta_x}\right) \exp(-\mu^2{}_{nx} a\tau / \delta^2{}_x);$$

$$\theta(y,\tau) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_{ny}}{\mu_{ny} + \sin\mu_{ny}\cos\mu_{ny}} \cos\left(\mu_{ny}\frac{y}{\delta_y}\right) \exp(-\mu^2{}_{ny} a\tau / \delta^2{}_y);$$

. Характеристические уравнения

Значения μ_{nx}, μ_{ny} определятся из характеристических уравнений:

$$\frac{\mu_{nx}}{\mathrm{Bi}_x} = \operatorname{ctg} \mu_{nx},$$

$$\frac{\mu_{ny}}{\mathrm{Bi}_y} = \operatorname{ctg} \mu_{ny},$$

.

Температура

Решение задачи можно выразить через безразмерные величины:

$$\theta\left(x, y, \tau\right) =$$

$$= F_x\left(\mu_n, Bi_x, Fo_x, X\right)\cdot$$

$$\cdot F_y\left(\mu_n, Bi_y, Fo_y, Y\right),$$

. Безразмерные величины

где:

$$Bi_x = \frac{\alpha\delta_x}{\lambda}; \qquad Fo_x = \frac{a\tau}{\delta_x^2}; \qquad X = \frac{x}{\delta_x};$$

$$Bi_y = \frac{\alpha\delta_y}{\lambda}; \qquad Fo_y = \frac{a\tau}{\delta_y^2}; \qquad Y = \frac{y}{\delta_y};$$

.

. Средняя температура

Средняя температура стержня определяется также как произведение трех температур для бесконечной пластины:

$$\overline{\theta}(\tau) = \overline{\theta_x}(\tau)\overline{\theta_y}(\tau),$$

$$\overline{\theta_x}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2 \mu_{nx}}{\mu^2{}_{nx} + \mu_{nx} \sin \mu_{nx} \cos \mu_{nx}} \exp(-\mu^2{}_{nx} a\tau / \delta^2{}_x);$$

$$\overline{\theta_y}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2 \mu_{ny}}{\mu^2{}_{ny} + \mu_{ny} \sin \mu_{ny} \cos \mu_{ny}} \exp(-\mu^2{}_{ny} a\tau / \delta^2{}_y);$$

Средняя температура

где:

$$\overline{\theta}_x(\tau)=\frac{\overline{t}_{x\text{ж}}(\tau)-t}{t_0-t_{\text{ж}}};$$

$$\overline{\theta}_y(\tau)=\frac{\overline{t}_{y\text{ж}}(\tau)-t}{t_0-t_{\text{ж}}};$$

.

Охлаждение цилиндра конечной длины

Пусть внутри источник теплоты отсутствует: $q_v = 0$

Пусть

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение температурного поля примет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

Охлаждение цилиндра конечной длины

Избыточная температура: $\vartheta(r,z,\tau)=t(r,z,\tau)-t_{ж}$

Тогда:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)$$

.

. Условия однозначности

$$\vartheta(r,z,0)=f(r)-t_{ж}=F(r,z);$$

$$\frac{\partial\vartheta(0,z,\tau)}{\partial r}=0;\quad \frac{\partial\vartheta(r,0,\tau)}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial\vartheta(r_0,z,\tau)}{\partial r}=-\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta(r_0,z,\tau);$$

$$\frac{\partial\vartheta(r,z_0,\tau)}{\partial z}=-\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta(r,z_0,\tau)$$

Охлаждение цилиндра конечной длины

Ограниченный цилиндр можно представить как результат пересечения бесконечного цилиндра с бесконечной пластиной. Тогда решение задачи в безразмерном виде можно представить, как произведение решений для неограниченной пластины и неограниченного цилиндра

Охлаждение цилиндра конечной длины

Температура: $$\theta(r,z,\tau)=\theta(r,\tau)\theta(z,\tau);$$

$$\boxed{\theta\left(z,Fo_z\right)=\frac{\vartheta\left(z,\tau\right)}{\vartheta_0}=D_1\exp\left(-\mu_{nz}^2 Fo_z\right)\cos\left(\mu_{nz}Z\right),}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\theta(r,\tau)=\frac{\vartheta(r,\tau)}{\vartheta_0}=\\=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_1(\mu_{nr})}{\mu_{nr}\left[J^2{}_0(\mu_{nr})+J^2{}_1(\mu_{nr})\right]}J_0(\mu_{nr}R)\exp(-Fo_r\mu_{nr}{}^2)\end{gathered}}$$

Охлаждение цилиндра конечной длины

Характеристические уравнения:

$$\frac{\mu_{nz}}{\mathrm{Bi}_z} = \mathrm{ctg}\,\mu_{nz};$$

$$\frac{\mu_{nr}}{Bi} = \frac{J_0(\mu_{nr})}{J_1(\mu_{nr})};$$

Охлаждение цилиндра конечной длины

Температура:

$$\theta(r,z,\tau)=\frac{\left[t(r,\tau)-t_{ж}\right]\left[t(z,\tau)-t_{ж}\right]}{\left(t_0-t_{ж}\right)^2};$$

$$\theta(r,z,\tau)=\frac{t(r,z,\tau)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};$$

$$\theta(r,\tau)=\frac{t(r,\tau)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};\theta(z,\tau)=\frac{t(z,\tau)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};$$

. Температура

Решение задачи можно выразить через безразмерные величины:

$$\theta\left(r,z,\tau\right)=$$

$$=F_r\left(\mu_{nr},Bi_r,Fo_r,R\right)\cdot$$

$$\cdot F_z\left(\mu_{nz},Bi_z,Fo_z,Z\right),$$

.

. Безразмерные величины

где:

$$Bi_r = \frac{\alpha r_0}{\lambda}; \; Fo_r = \frac{a\tau}{r_0^2}; \; R = \frac{r}{r_0};$$

$$Bi_z = \frac{\alpha \delta_z}{\lambda}; \; Fo_z = \frac{a\tau}{\delta_z^2}; \; Z = \frac{z}{\delta_z}$$

.

Средняя температура

Средняя температура цилиндра конечных размеров определяется также как произведение двух температур для бесконечной пластины и бесконечного цилиндра:

$$\overline{\theta}(\tau)=\overline{\theta_r}(\tau)\,\overline{\theta_z}(\tau),$$

$$\overline{\theta_r}(\tau)=\frac{\overline{t}_{r}(\tau)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};\quad \overline{\theta_z}(\tau)=\frac{\overline{t}_{z}(\tau)-t_{ж}}{t_0-t_{ж}};$$

Вопросы к экзамену

1. Охлаждение параллелепипеда.
2. Охлаждение длинного прямоугольного стержня.
3. Охлаждение цилиндра конечной длины.