Проблемы энерго- и ресурсосбережения

- Приближенные методы решения задач теплопроводности

Приближенные методы решения задач теплопроводности

Точное аналитическое решение позволяет рассчитать температуру в любой точке тела, однако, не любую задачу теплопроводности можно решить аналитически. В том случае, когда тело имеет сложную форму и коэффициент теплоотдачи является величиной переменной, задачу по теплообмену аналитически решить невозможно. В этом случае используют приближенные методы решения задач (численные методы).

Приближенные методы решения задач теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности заменяется системой алгебраических уравнений. Температура рассчитывается в отдельных фиксированных точках тела, точность расчета зависит от выбранного шага разбиения тела на отдельные участки.

Приближенные методы решения задач теплопроводности

Наибольшее распространение получили два метода расчета:

- Метод элементарных тепловых балансов.
- Метод конечных разностей.

Метод элементарных тепловых балансов

Тело разбивается на отдельные объемы.

Центральным точкам каждого объема присваивается отдельный номер.

Эти точки обладают определенной массой и теплоемкостью.

К каждой точке теплота подводится или отводится через стержни, с помощью которых точки условно соединены друг с другом.

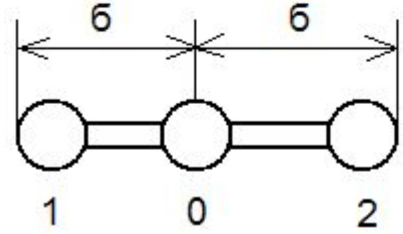
При этом внутренняя энергия точки может увеличиваться или уменьшаться.

Метод элементарных тепловых балансов

Пусть температурное поле описывается уравнением:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Разбиваем стенку на элементарные объемы:



$$V = \delta \times \delta \times 1 = \delta^2$$

Метод элементарных тепловых балансов

Изменение внутренней энергии в рассматриваемой узловой точке:

$$U = c\rho V\left(t_0' - t_0\right), \qquad (1)$$

$c, Дж/(кг \cdot К)$ - удельная массовая теплоемкость;

$\rho, кг/м^3$ - плотность;

t_0 - начальная температура точки 0;

t_0' - температура этой точки через время $\Delta\tau$

Метод элементарных тепловых балансов

Теплота к точке 0 подводится от точки 1 и точки 2 за счет теплопроводности:

$$\Delta Q_{1-0} = \frac{\lambda\left(t_1 - t_0\right)}{\delta} f \cdot \Delta\tau \qquad (2)$$

$$\Delta Q_{2-0} = \frac{\lambda\left(t_2 - t_0\right)}{\delta} f \cdot \Delta\tau \qquad (3)$$

Уравнение теплового баланса:

$$U = \Delta Q_{1-0} + \Delta Q_{2-0} \qquad (4)$$

Метод элементарных тепловых балансов

С учетом (1), (2), (3) уравнение (4) примет вид

$$c\rho\delta^2\left(t_0' - t_0\right) = \lambda\left(t_1 - t_0\right)\Delta\tau +$$

$$+\lambda\left(t_2 - t_0\right)\Delta\tau \Rightarrow$$

$$t_0' = t_0 + \frac{\lambda\Delta\tau}{c\rho\delta^2}\left(t_1 - t_0 + t_2 - t_0\right). \qquad (5)$$

Метод элементарных тепловых балансов

$$\frac{\lambda}{c\rho} = a, \quad м^2/c$$ - коэффициент температуропроводности.

$$\frac{a\Delta\tau}{\delta^2} = Fo$$ - критерий Фурье.

При фиксированном значении шага разбиения по пространству и по времени критерий Фурье является величиной постоянной .

Метод элементарных тепловых балансов

Уравнение (5) принимает вид:

$$t_0' = t_0 + Fo\left(t_1 + t_2 - 2t_0\right) \qquad (6)$$

$$t_0' = Fo\left(t_1 + t_2 - 2t_0 + \frac{t_0}{Fo}\right)$$

$$\boxed{t_0' = Fo\left(t_1 + t_2 + t_0\left(\frac{1}{Fo} - 2\right)\right)} \qquad (7)$$

Метод элементарных тепловых балансов

Из рассмотрения (7) следует, что будущая температура в рассматриваемой точке является функцией настоящей температуры в этой точке и настоящих температур в соседних точках.

Метод элементарных тепловых балансов

Частные случаи:

Пусть $$Fo = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$t_0' = Fo\left(t_1 + t_2\right) \Rightarrow t_0' = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Будущая температура в рассматриваемой точке не зависит от настоящей температуры в этой точке.

Метод элементарных тепловых балансов

Пусть $$Fo = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$t_0{}' = \frac{1}{3}\left(t_1 + t_2 + t_0\right).$$

Пусть $$Fo = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$t_0{}' = \frac{1}{4}\left(t_1 + t_2 + 2t_0\right).$$

Метод элементарных тепловых балансов

Установлено, что устойчивость решения достигается лишь при

$$Fo \le \frac{1}{2}$$

$$\boxed{Fo = \frac{a\Delta\tau}{\delta^2} \le \frac{1}{2}}$$

Метод элементарных тепловых балансов

Аналогично можно получить решение для двухмерной задачи:

$$\boxed{t_0' = Fo\left(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_0\left(\frac{1}{Fo} - 4\right)\right)}$$

Метод элементарных тепловых балансов

Установлено, что устойчивость решения достигается лишь при

$$Fo \le \frac{1}{4}$$

$$\boxed{Fo = \frac{a\Delta\tau}{\delta^2} \le \frac{1}{4}}$$

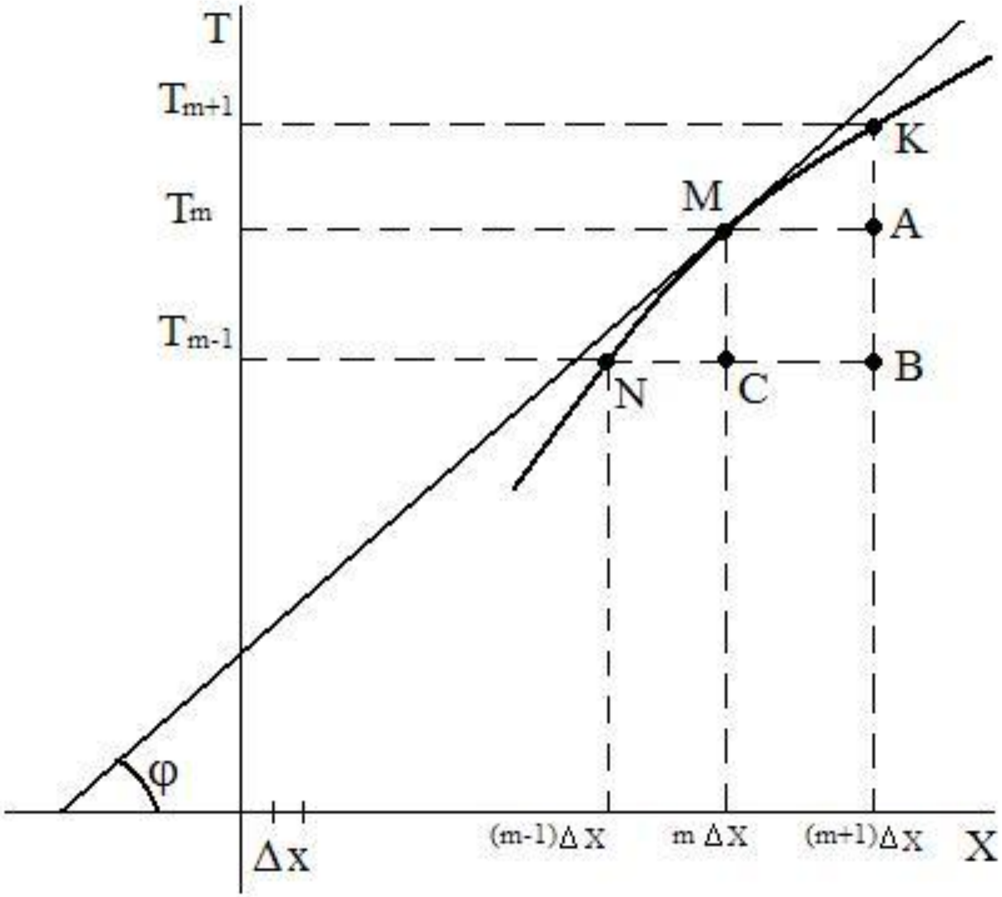
Метод конечных разностей

В этом методе производные, входящие в дифференциальное уравнение теплопроводности, замещаются разностными соотношениями:

$$t'(m\Delta x) = tg\varphi$$

Метод конечных разностей

.



Метод конечных разностей

Приближенные значения производных

Предыдущие значения производных:

$$t^{/}\left(m\Delta x\right) \approx \frac{MC}{NC} = \frac{t_m - t_{m-1}}{\Delta x}$$

Последующие значения производных:

$$t^{/}\left(m\Delta x\right) \approx \frac{KA}{MA} = \frac{t_{m+1} - t_m}{\Delta x}$$

Метод конечных разностей

Симметричные значения производных:

$$t^{/}\left(m\Delta x\right)\approx\frac{KB}{NB}=\frac{t_{m+1}-t_{m-1}}{2\Delta x}$$

Метод конечных разностей

Вторая производная:

$$t^{//}\left(m\Delta x\right)=\left(\frac{t_{m+1}-t_{m}}{\Delta x}-\frac{t_{m}-t_{m-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Rightarrow$$

$$t^{//}\left(m\Delta x\right)=\frac{1}{\Delta x^{2}}\left(t_{m+1}+t_{m-1}-2t_{m}\right)$$

Метод конечных разностей

Пусть температурное поле описывается дифференциальным уравнением:

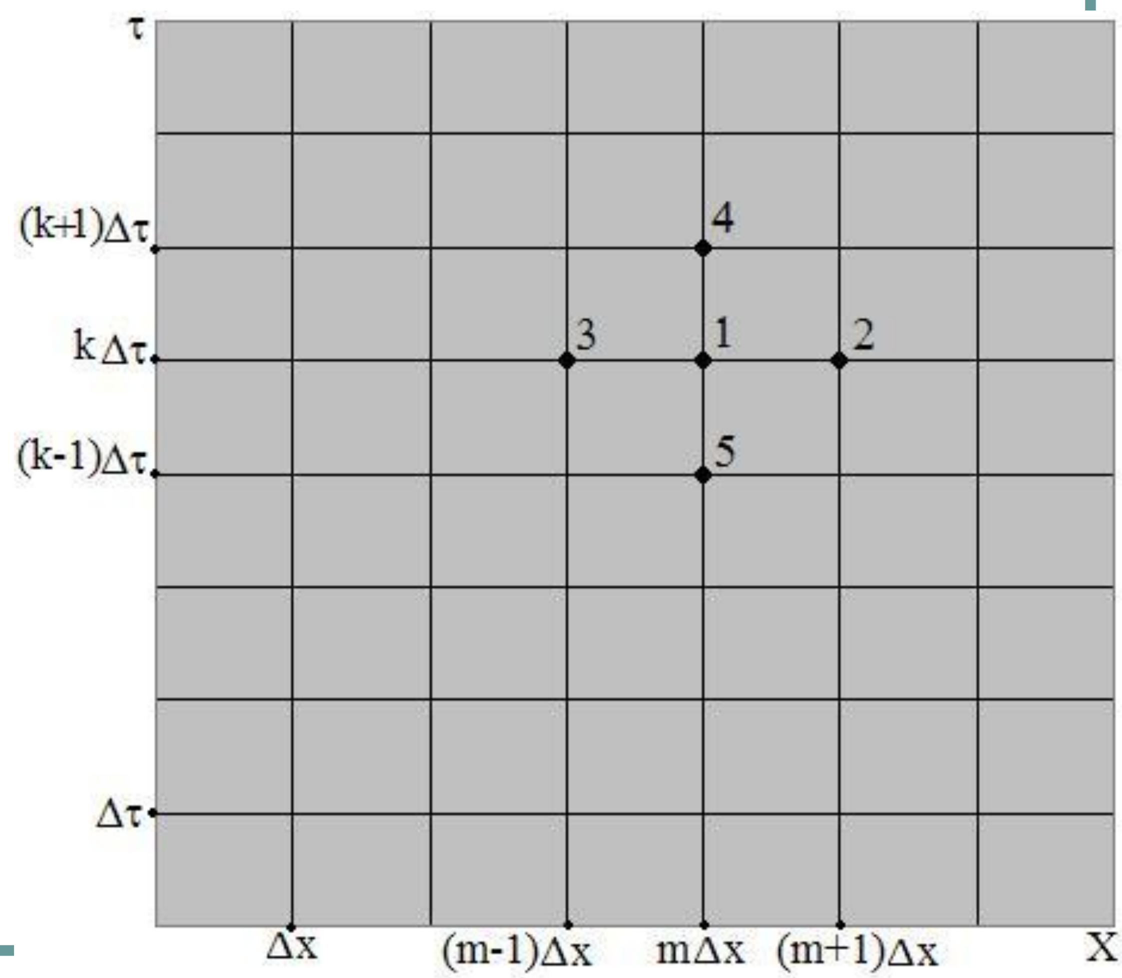
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Метод конечных разностей

Поскольку температура является функцией двух переменных, удобно выбрать прямоугольную сетку. Интервал изменения x разделим на одинаковые интервалы Δx, а отрезок времени τ разделим на равномерные интервалы $\Delta\tau$ Восстановленные перпендикуляры к координатным осям в точках деления при пересечении образуют расчетные узловые точки.

Метод конечных разностей

Расчетная сетка:



Метод конечных разностей

Координаты точек:

1: $\left(m\Delta x, k\Delta\tau\right);$

2: $\left(\left(m+1\right)\Delta x, k\Delta\tau\right);$

3: $\left(\left(m-1\right)\Delta x, k\Delta\tau\right);$

4: $\left(m\Delta x, \left(k+1\right)\Delta\tau\right);$

5: $\left(m\Delta x, \left(k-1\right)\Delta\tau\right);$

Метод конечных разностей

Заменим производные разностными соотношениями:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \left(t_{(k+1),m} - t_{k,m} \right) \frac{1}{\Delta \tau} + \varepsilon_1;$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(t_{(m+1),k} - t_{(m-1),k} - 2t_{m,k} \right) + \varepsilon_2;$$

Метод конечных разностей

Формула (1) примет вид:

$$\left(t_{m,(k+1)} - t_{m,k}\right)\frac{1}{\Delta\tau} + \varepsilon_1 =$$

$$= \frac{a}{\Delta x^2}\left(t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} - 2t_{m,k}\right) + \varepsilon_2 a;$$

$$t_{m,(k+1)} = \varepsilon_1 \Delta\tau + \varepsilon_2 a \Delta\tau +$$

$$+ \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} - 2t_{m,k}\right) + t_{m,k};$$

Метод конечных разностей

Или:

$$t_{m,(k+1)} = Fo\left[t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} - 2t_{m,k} + \frac{1}{Fo}t_{m,k}\right] + \Delta\tau\left(\varepsilon_2 a - \varepsilon_1\right)$$

$$\boxed{t_{m,(k+1)} = Fo\left[t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} + t_{m,k}\left(\frac{1}{Fo} - 2\right)\right] + \Delta\tau\left(\varepsilon_2 a - \varepsilon_1\right)} \quad (2)$$

Метод конечных разностей

Уравнение (2) составляется для каждой узловой точки включая пограничные точки.

Погрешность расчета уменьшается при $\Delta\tau \to 0$.

Устойчивость решения обеспечивается лишь при условии:

$$\frac{1}{Fo} - 2 \geq 0 \Rightarrow Fo \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$Fo = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$$

Метод конечных разностей

Пусть температурное поле описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \qquad (3)$$

Метод конечных разностей

Заменим производные разностными соотношениями:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(t^k_{(m+1),n} + t^k_{(m-1),n} - 2t^k_{m,n}\right) + \varepsilon_1;$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2}\left(t^k_{m,(n+1)} + t^k_{m,(n-1)} - 2t^k_{m,n}\right) + \varepsilon_2;$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta \tau}\left(t^{k+1}_{m,n} - t^k_{m,n}\right) + \varepsilon_3;$$

Метод конечных разностей

Уравнение (3) примет вид:

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left(t_{m,n}^{k+1}-t_{m,n}^{k}\right)+\varepsilon_3=$$

$$=\frac{a}{\Delta x^2}\left(t_{(m+1),n}^{k}+t_{(m-1),n}^{k}-2t_{m,n}^{k}\right)+\varepsilon_1 a+$$

$$+\frac{a}{\Delta y^2}\left(t_{m,(n+1)}^{k}+t_{m,(n-1)}^{k}-2t_{m,n}^{k}\right)+\varepsilon_2 a$$

Метод конечных разностей

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0 \Rightarrow$

$$t_{m,n}^{k+1} = t_{m,n}^{k} + \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(t_{(m+1),n}^{k} + t_{(m-1),n}^{k} - 2t_{m,n}^{k}\right) +$$

$$+ \frac{a\Delta\tau}{\Delta y^2}\left(t_{m,(n+1)}^{k} + t_{m,(n-1)}^{k} - 2t_{m,n}^{k}\right)$$

Метод конечных разностей

Обозначают числа Фурье:

$$Fo_x = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}; Fo_y = \frac{a\Delta\tau}{\Delta y^2}$$

Часто принимают

$$\Delta x = \Delta y \Rightarrow Fo_x = Fo_y = Fo$$

Метод конечных разностей

Тогда формула примет вид:

$$t_{m,n}^{k+1} = t_{m,n}^{k} + Fo\left(t_{(m+1),n}^{k} + t_{(m-1),n}^{k} - 4t_{m,n}^{k} + t_{m,(n+1)}^{k} + t_{m,(n-1)}^{k}\right)$$

$$\boxed{t_{m,n}^{k+1} = Fo\left[t_{(m+1),n}^{k} + t_{(m-1),n}^{k} + t_{m,(n+1)}^{k} + t_{m,(n-1)}^{k} + t_{m,n}^{k}\left(\frac{1}{Fo} - 4\right)\right]}$$

Метод конечных разностей

Устойчивость решения обеспечивается при условии:

$$\frac{1}{Fo} - 4 \geq 0 \Rightarrow Fo \leq \frac{1}{4}$$

Вопросы к экзамену

1. Метод элементарных тепловых балансов.
2. Метод конечных разностей.