Проблемы энерго- и ресурсосбережения

Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

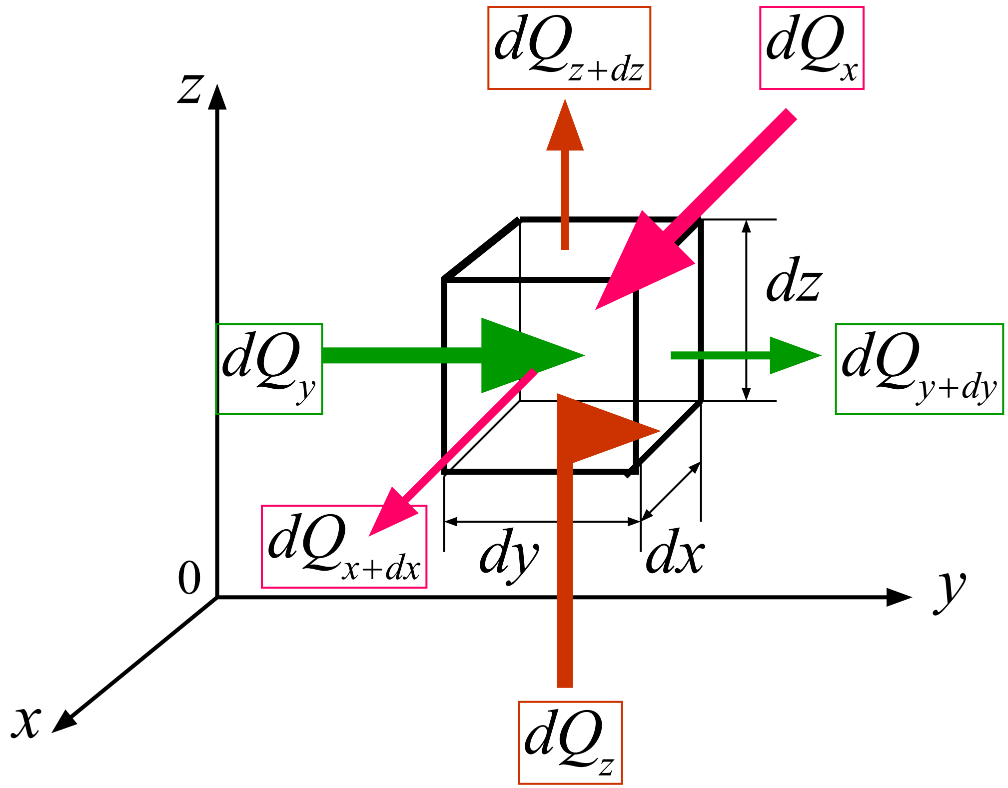
Дифференциальное уравнение энергии

Выведем дифференциальное уравнение температурного поля в движущейся жидкости.

Допущения:

- Жидкость однородна и изотропна;
- Физические параметры постоянны;
- Энергия деформации мала в сравнении с изменением внутренней энергии.

Дифференциальное уравнение энергии



Дифференциальное уравнение энергии

Формально дифференциальное уравнение энергии будет таким же как и при отсутствии конвекции:

(1)

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = -div\overline{q} + q_v,$$

$$div\overline{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

где

Дифференциальное уравнение энергии

Плотность теплового потока при конвективном теплообмене:

$$\overline{q} = \overline{q_{mnp}} + \overline{q_{конв}} =$$

$$= -\lambda \nabla t + \rho \overline{w} h$$

Дифференциальное уравнение энергии

Отсюда проекции плотности теплового потока на координатные оси:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho w_x h;$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho w_y h;$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho w_z h$$

Дифференциальное уравнение энергии

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\rho\frac{\partial h}{\partial \tau}=\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)-$$
$$-\rho\left(w_x\frac{\partial h}{\partial x}+w_y\frac{\partial h}{\partial y}+w_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)-$$
$$-\rho h\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)+q_v \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение энергии

Для несжимаемых жидкостей:

$$div\overline{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Дифференциальное уравнение энергии

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{\rho} \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение энергии

Уравнение (3) также можно представить в виде:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau}+w_x\frac{\partial t}{\partial x}+w_y\frac{\partial t}{\partial y}+w_z\frac{\partial t}{\partial z}= =a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{q_v}{c\rho}} \qquad (4)$$

.

Дифференциальное уравнение энергии

Левая часть уравнения (4) есть полная производная от температуры по времени:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}$$

Дифференциальное уравнение энергии

Член $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ характеризует

изменение температуры в отдельных точках жидкости (локальное изменение температуры)

Дифференциальное уравнение энергии

Член

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$$

характеризует изменение температуры при переходе от точки к точке (конвективное изменение температуры)

Дифференциальное уравнение энергии

Обозначим:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Дифференциальное уравнение энергии

Тогда уравнение энергии можно записать в виде:

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}} \qquad (5)$$

Дифференциальное уравнение энергии

При

$$w_x = w_y = w_z = 0$$

уравнение энергии переходит в уравнение теплопроводности

Дифференциальные уравнения движения

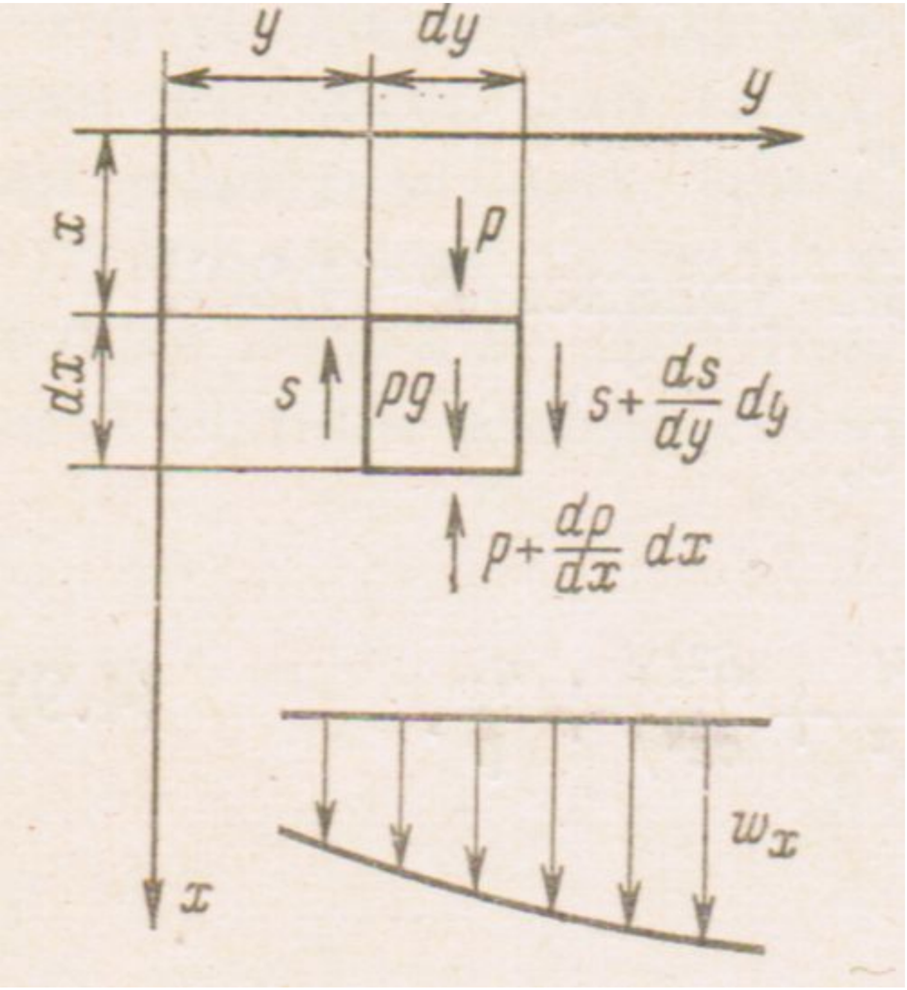
Температурное поле в движущейся жидкости зависит от составляющих скорости. Для того, чтобы система уравнений была замкнутой, необходимо добавить уравнения, описывающие изменение скорости во времени и в пространстве (***дифференциальные уравнения движения***)

Дифференциальные уравнения движения

Дадим упрощенный вывод дифференциального уравнения движения для случая одномерного течения несжимаемой жидкости. Затем для трехмерного движения уравнение приведем без вывода.

Выделим в потоке вязкой жидкости элементарный объем с размерами ребер *dx, dy,dz*. Скорость в потоке изменяется только в направлении оси *y*. Закон изменения скорости произвольный.

Дифференциальные уравнения движения



.

Дифференциальные уравнения движения

Вывод основан на втором законе Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение.

Силы, действующие на рассматриваемый элемент жидкости, можно разделить на **массовые** (объемные) и **поверхностные**. Массовые силы характеризуются вектором *F,* м2/с, значение которого равно отношению силы, действующей на данную частицу, к массе этой частицы.

Если учитывается только сила тяжести, то F= g, где g— ускорение свободного падения. В дальнейшем будем учитывать только силу тяжести. Значение поверхностных сил равно отношению силы, действующей на элемент поверхности, к величине площади этого элемента.

К поверхностным силам относятся силы трения и силы давления.

Дифференциальные уравнения движения

Следовательно, на рассматриваемый элемент жидкости действуют три силы:

- Сила тяжести;
- Равнодействующая сил давления;
- Равнодействующая сил трения.

Дифференциальные уравнения движения

Найдем проекции этих сил на ось *Ox*.

Сила тяжести df_1 приложена в центре тяжести элемента. Ее проекция на ось *Ox* равна:

$$df_1 = \rho g_x dv,$$

Где g_x - проекция ускорения свободного падения

Дифференциальные уравнения движения

Сила давления на верхнюю грань:

$$pdydx$$

Сила давления на нижнюю грань:

$$-(p+\frac{dp}{dx}dx)dydz$$

Дифференциальные уравнения движения

Равнодействующая сил давления равна их алгебраической сумме:

$$df_2 = -\frac{dp}{dx}dv$$

Дифференциальные уравнения движения

С учетом того, что скорость изменяется только в направлении оси *Oy*, то сила трения возникает на боковых гранях элемента жидкости. Равнодействующая сил трения равна:

$$df_3 = \frac{ds}{dy} dv$$

Дифференциальные уравнения движения

С учетом того, что

$$s = \mu \frac{dw_x}{dy}$$

Получим:

$$df_3 = \frac{ds}{dy} dv$$

Дифференциальные уравнения движения

Проекция на ось Ох равнодействующей всех сил, приложенных к объему:

$$df = df_1 + df_2 + df_3 =$$

$$= (\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}) dv$$

Дифференциальные уравнения движения

С другой стороны по второму закону:

$$df = \rho \frac{dw_x}{d\tau} dv$$

Дифференциальные уравнения движения

Приравняв правые части последних уравнений, получим:

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}$$

Дифференциальные уравнения движения

В случае трехмерного движения несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами поле скоростей опишется тремя уравнениями движения в проекциях на три оси координат. Эти уравнения называют ***уравнениями Навье-Стокса***

Дифференциальные уравнения движения

Для оси Ox:

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} =$$

$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)$$

Дифференциальные уравнения движения

Для оси Оу:

$$\rho \frac{dw_y}{d\tau} =$$

$$= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right)$$

Дифференциальные уравнения движения

Для оси Oz:

$$\rho \frac{dw_z}{d\tau} =$$

$$= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right)$$

Дифференциальные уравнения движения

На основании понятия о полной производной члены, стоящие в правой части уравнений можно записать так:

Для осиOx:

$$\frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}$$

Дифференциальные уравнения движения

Для оси Оу:

$$\frac{dw_y}{d\tau} = \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

Дифференциальные уравнения движения

Для оси Oz:

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Дифференциальные уравнения движения

Уравнения Навье-Стокса в векторной форме:

$$\rho \frac{d\overline{w}}{d\tau} = \rho \overline{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \overline{w}$$

Уравнение сплошности

Ранее было установлено, что для несжимаемых жидкостей:

$$div\overline{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Вопросы к экзамену

1. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена (уравнения энергии, сплошности).
2. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена (уравнения движения Навье-Стокса).