

Классическая электродинамика.
Введение в классическую
электродинамику.
Дополнительные главы физики.

Николай Николаевич Рóзанов
февраль-июнь 2016

ВВЕДЕНИЕ

Теория электромагнитного поля как раздел курса «Физические основы квантовой электроники». Основное внимание - электромагнитным волнам и их оптическому диапазону. Связь теории электромагнитного поля с другими разделами физики. Оптические среды.

Роль электромагнитных волн. Сравнение с акустическими и другими волнами (теория волн). Фотоны – элементарные частицы (а не квазичастицы, как фононы). Эфир и вакуум. Линейные и нелинейные волны.

Уравнения Максвелла в сплошной среде

	СГС	СИ	
Закон Гаусса	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Электрический заряд является источником электрической индукции
Закон Гаусса для магнитного поля	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Не существует магнитных зарядов
Закон индукции Фарадея	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле
Теорема о циркуляции магн. поля -----	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле

Уравнения Максвелла, интегральная форма

	СГС	СИ	
Закон Гаусса	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$	Поток электрической индукции через замкнутую поверхность S пропорционален величине свободного заряда, находящегося внутри поверхности S
Закон Гаусса для магн. поля	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность S равен нулю
Закон индукции Фарадея	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	Изменение потока магнитной индукции, проходящего через незамкнутую поверхность S , взятое с обратным знаком, пропорционально циркуляции электрического поля на замкнутом контуре l , который является границей поверхности S
Теорема о циркуляции магнитного поля	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	Полный электрический ток свободных электронов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность S пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре l , который является границей поверхности S

S – двумерная поверхность, замкнутая для теоремы Гаусса и открытая для законов Фарадея и Ампера (ее границей является замкнутый контур). $Q = \int_V \rho dv$ – электрический заряд внутри объема V , ограниченного поверхностью S .
 $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$ – электрический ток, протекающий через поверхность S .

Справочные формулы

В декартовых
координатах

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad \nabla S = \text{grad } S = \frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$(\nabla, \mathbf{V}) = \text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad [\nabla \times \mathbf{V}] = \text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

В цилиндрических
координатах

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad \text{grad } S = \frac{\partial S}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z$$

Справочные формулы

В сферических координатах

$$\text{grad } S = \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial S}{\partial r} \mathbf{e}_r$$

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta}$$

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r$$

Материальные уравнения

Соотношения между **D**, **B**, **E** и **H**

В вакууме **D = E**, **B = H**

В среде материальные уравнения могут иметь вид нелокальных по времени и пространству и нелинейных соотношений (будут приведены позже).

Упражнения (векторный анализ)

Радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ $\operatorname{div} \mathbf{r} = ?$ $\operatorname{rot} \mathbf{r} = ?$

$$2. S = \ln \left[\frac{1}{w} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right]. \quad \operatorname{grad} S = ?$$

Доказать: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} S) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} S)$

Доказать: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ — *дом. задание*

Доказать: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} S = 0$. — *дом. задание*

Упражнения

Вывести из уравнений Максвелла закон Кулона для точечного заряда в вакууме. Проверить выполнение всех уравнений Максвелла.

Найти напряженность эл. поля шара с равномерной плотностью заряда.

Найти напряженность эл. поля кольцевого слоя с равномерной плотностью заряда. - **дом. задание**

Найти распределение плотности заряда, если известно распределение напряженности эл. поля $\mathbf{E} = Ar^n \mathbf{r}$, где A и n – постоянные, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, $r = |\mathbf{r}|$
Пояснить физический смысл результата при $n = -3$.

Уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \left\{ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right\} = -\operatorname{div} \mathbf{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0}$$

Закон сохранения электрического заряда $Q = \int_V \rho dV$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = -\int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \rightarrow 0 \quad \boxed{\frac{dQ}{dt} = 0}$$

«Площади» э.-м. поля

Рассматриваем ограниченные в пространстве и времени пакеты поля (с конечной энергией)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Интегрируем по времени в бесконечных пределах

$$\operatorname{rot} \mathbf{S}_E = 0, \quad \mathbf{S}_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} dt \quad \begin{array}{l} \text{— «площадь» электрич. поля} \\ \text{— безвихревой вектор} \end{array}$$

Интегрируем по пространству (объему) в бесконечных пределах

$$\frac{d}{dt} \mathbf{S}_B = 0, \quad \mathbf{S}_B = \int \mathbf{B} d^3 \mathbf{r} \quad \begin{array}{l} \text{— «площадь» магнитного поля} \\ \text{— сохраняется} \end{array}$$

Эти общие (для любого вида материальных уравнений) соотношения полезны для контроля точности моделирования динамики поля.

Уравнения Максвелла в вакууме (СГС)

Учебное пособие: Н.Н. Розанов. Специальные разделы мат. физики. Ч.1. Электромагнитные волны в вакууме. 2005.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

Условия применимости:

1. Инерциальная система отсчета

2. Гравитационные эффекты

3. Квантовые ограничения для слабых и сильных полей

Квантовые ограничения в слабых полях

Уравнения Максвелла отвечают континуальному (а не дискретному) описанию. Поэтому для их справедливости число фотонов в основных модах N должно быть велико: $N \gg 1$. Этот фактор важен при анализе шумов излучения и сжатых состояний электромагнитного поля (*квантовая оптика*).

Квантовые ограничения в сильных полях

В уравнениях Максвелла не учитываются вероятность рождения электрон-позитронных пар и эффекты поляризации вакуума. Необходимое условие пренебрежения этими эффектами: $E \ll E_{cr} = m^2 c^3 / (|e| \hbar)$

(изменение энергии заряда $|e|$ в поле напряженности E на расстоянии равном комптоновской длине волны электрона $R_c = \hbar / (mc) = 2.4 \cdot 10^{-10}$ см должно быть много меньше mc^2 , m – масса электрона, h – постоянная Планка, $\hbar = h / 2\pi$). В мощных лазерных установках достигаются напряженности полей, близкие к критическим. Последовательная теория дается *квантовой электродинамикой*.

Приближенно электромагнитное поле в электрон-позитронном вакууме описывается уравнениями электродинамики сплошных сред. Комптоновская длина волны электрона описывает его «размазанность», при меньших расстояниях классическая теория неприменима.

Симметрия уравнений Максвелла в вакууме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$$

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$$

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$$

Равноправность \mathbf{E} и \mathbf{H} в вакууме без зарядов.
Равноправность направлений течения времени
(в классическом вакууме нет диссипации энергии)

Векторная структура уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ρ – скаляр (плотность эл. заряда)

\mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{j} – полярные трехмерные векторы

\mathbf{H} , \mathbf{B} – аксиальные трехмерные векторы

При зеркальном отражении направление полярных векторов не меняется, а для аксиальных сменяется противоположным. Ср. с силой Лоренца

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right)$$

Различие полярных и аксиальных векторов существенно для записи нелинейных восприимчивостей.

Волновое уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} - \Delta \mathbf{V}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Немагнитные среды $\mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Не все решения волнового уравнения служат решениями уравнений Максвелла, поскольку эти решения могут не удовлетворять уравнению $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$. Фактически это соотношение накладывает ограничения на поляризационную структуру излучения. Таким образом, при исключении из уравнений Максвелла магнитных величин к волновому уравнению следует добавить уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$

Динамика э.-м. поля

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

При заданных материальных соотношениях возможна постановка задачи Коши – по начальным данным ($t \leq t_0$) определяются последующие значения полей.

Динамических уравнений два (содержащих временную производную 1-го порядка; частотной дисперсией здесь пренебрегаем). Два «статических» уравнения ограничивают вид начальных условий.

Пример – вакуум без зарядов ($\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$)

Динамика э.-м. поля в вакууме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

Уравнения Максвелла содержат производные по времени первого порядка. Поэтому задания напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} в начальный момент времени достаточно для определения дальнейшей динамики поля (+ граничные условия).

$$\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$$

Метод численного расчета: FDTD – finite-difference time-domain. – *тема для итоговой презентации*

Начальные условия (вакуум)

не произвольны. Они должны подчиняться условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$$

Если это так, то и в последующие моменты времени значения $\operatorname{div} \mathbf{H}$, $\operatorname{div} \mathbf{E}$ останутся нулевыми, так как $\{\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0\}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{H} = \dots = 0$$

Из-за уравнений Максвелла с div произвольно можно задавать только по две компоненты векторов \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 , эти уравнения определяют вид третьих компонент. Например, пусть заданы $H_{0,x}(\mathbf{r})$, $H_{0,y}(\mathbf{r})$. Тогда (f – произвольная функция своих аргументов)

$$\frac{\partial H_{0,z}}{\partial z} = -\frac{\partial H_{0,x}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0,y}}{\partial y}, \quad H_{0,z} = -\int_{z_0}^z \left(\frac{\partial H_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{0,y}}{\partial y} \right) dz + f(x, y)$$

Динамика поля (задача Коши)*

$$\mathbf{E} \Big|_{t=0} = \mathbf{E}_0(r), \quad \mathbf{H} \Big|_{t=0} = \mathbf{H}_0(r).$$

Поскольку уравнения Максвелла – первого порядка по времени, то начальные условия позволяют определить значения напряженностей электрического и магнитного полей в последующие моменты времени.

Разложения Тейлора для малых интервалов времени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Big|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n} \Big|_{t=0} t^n + \dots,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Big|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \mathbf{H}}{\partial t^n} \Big|_{t=0} t^n + \dots$$

Динамика поля*

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^2 \operatorname{rot}^2 \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{rot}^2 \mathbf{H},$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3} = -c^3 \operatorname{rot}^3 \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{H}}{\partial t^3} = c^3 \operatorname{rot}^3 \mathbf{H},$$

$$\frac{\partial^4 \mathbf{E}}{\partial t^4} = c^4 \operatorname{rot}^4 \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^4 \mathbf{H}}{\partial t^4} = c^4 \operatorname{rot}^4 \mathbf{H}, \quad \dots$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} c^{2n} \operatorname{rot}^{2n} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) t^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} c^{2n-1} \operatorname{rot}^{2n-1} \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) t^{2n-1},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} c^{2n} \operatorname{rot}^{2n} \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} c^{2n-1} \operatorname{rot}^{2n-1} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) t^{2n-1}.$$

Динамика поля*

$$\text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \Delta \mathbf{V}$$

$$\text{rot}^2 \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}, \quad \text{rot}^2 \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}.$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c^{2n} \Delta^n \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} c^{2n-1} \text{rot } \Delta^{n-1} \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) t^{2n-1},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c^{2n} \Delta^n \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) t^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} c^{2n-1} \text{rot } \Delta^{n-1} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) t^{2n-1}.$$

Задания

В начальный момент $t = 0$ заданы $\mathbf{E}|_{t=0} = [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$, $\mathbf{H}|_{t=0} = [\mathbf{b} \times \mathbf{r}]$.
Найти последующие значения напряженностей.

— дом. задание

В некоторый момент времени заданы компоненты
 $E_x = puz \exp[-(x^2 + y^2 + z^2) / w^2]$, $E_z = qxy \exp[-(x^2 + y^2 + z^2) / w^2]$.
Найти вид третьей компоненты \mathbf{E} в тот же момент времени.

Эволюционная переменная, пример уравнения Гельмгольца

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} - \text{grad div} \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t^2} = 0$$

Однородная среда (вакуум), монохроматическое излучение с частотой ω

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Фиксированная (линейная) поляризация. Одна из компонент поля f (пример Адамара)

Задача Коши для уравнения Гельмгольца

$$\Delta f + k^2 f = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \Delta_{\perp} f + k^2 f = 0, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Рассмотрим пучок монохроматического излучения с преимущественным направлением вдоль оси z

Зададим при $z = 0$ значения f и $\partial f / \partial z$

$$f|_{z=0} = \frac{a}{q} \cos(\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}), \quad \mathbf{r}_{\perp} = (x, y), \quad \mathbf{q}_{\perp} = (q_x, q_y), \quad q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}, \quad a = \text{const}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

Решение уравнения Гельмгольца
(разделение переменных)

$$f(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \frac{a}{q} \text{ch}(\sqrt{q^2 - k^2} z) \cos(\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp})$$

Задача Коши для уравнения Гельмгольца

$$f(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{a}{q} \operatorname{ch}(\sqrt{q^2 - k^2} z) \cos(\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_\perp)$$

Предел $q \rightarrow \infty$

$$f|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

При конечных z $f \rightarrow \infty$

При нулевых (в пределе) начальных данных есть решение, стремящееся при конечных z к бесконечности. Но при таких начальных данных есть и нулевое решение.

Нет непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Постановка задачи некорректна.

Физ. смысл – встречные волны.

Ковариантная формулировка уравнений Максвелла в вакууме. Тензоры электромагнитного поля

- Напряженности электрического и магнитного полей не абсолютны и имеют разную величину в различных инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга со скоростью V .
- Задача – показать релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла и найти преобразования Лоренца для электромагнитного поля.
- Форма записи уравнения будет релятивистски инвариантной, если оно записано в терминах скаляров, 4-векторов и тензоров, для которых известны преобразования Лоренца.

Ковариантная формулировка ...*

Вводим 4-мерное пространство-время с координатами x_k , $k = 0, 1, 2, 3$

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Другая инерционная система координат x'_k

Преобразование Лоренца в частном случае, когда скорость V имеет только x -компоненту

$$x'_0 = \frac{x_0 - \frac{V}{c}x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - \frac{V}{c}x_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3.$$

$$x_0 = \frac{x'_0 + \frac{V}{c}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_1 = \frac{x'_1 + \frac{V}{c}x'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = x'_3.$$

4-векторы

Ковариантный 4-вектор (нижние индексы)

$$A'_i = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} A_k, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Контравариантный 4-вектор (верхние индексы)

$$A'^i = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A^k.$$

Напряженности электрического и магнитного полей не составляют 4-вектора.

4-тензоры

ковариантный (нижние индексы)

$$B'_{ik} = \sum_{j,l=0}^3 \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} B_{jl}$$

контравариантный (верхние индексы)

$$B'^{ik} = \sum_{j,l=0}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} B^{jl}$$

Тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Антисимметрия $F_{ik} = -F_{ki}$, $F^{ik} = -F^{ki}$.

Преобразование Лоренца напряженностей э.-м. поля (спец. случай)

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & E_z &= \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ H_x &= H'_x, & H_y &= \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & H_z &= \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Ковариантная форма уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Инварианты

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^3 F_{ik} F^{ik} = \text{inv},$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \text{inv}.$$

Тензор энергии-импульса э.-м. поля

$$U^{00} = U_{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2),$$

$$U^{0i} = -U_{0i} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_i,$$

Симметрия по индексам ?

$$U^{ik} = U_{ik} = -\frac{1}{4\pi} (E_i E_k + H_i H_k) + \frac{1}{8\pi} \delta_{ik} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Символ Кронекера $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и 0 в противном случае.
 U^{00} - плотность э.-м. энергии, U^{0i} - плотность потока энергии.

Тензор энергии-импульса (поля и среды) служит источником искривления пространства-времени в уравнениях тяготения Эйнштейна.

Задания

1. Найти напряженности электрического и магнитного полей точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью.
2. Проверить инвариантность величин $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .
3. Проверить, что ковариантная запись уравнений Максвелла приводит к стандартной записи при различном выборе индексов.

- ЭТО ВСЕ ДОМ. ЗАДАНИЯ

Уравнение распространения фронта электромагнитной волны

Ранее мы решали задачу Коши, то есть по начальным данным (при $t = 0$) о напряженностях поля определяли последующую динамику поля. Это возможно, так как уравнения Максвелла в вакууме содержат только первые временные производные напряженностей. Более общая постановка задачи динамики:

Уч. пособие, стр. 13-17

Законы сохранения для Э.-М. поля в вакууме

Уч. пособие, стр. 17-20

Потенциалы поля и волновое уравнение

Уч. пособие, стр. 20-22

Одномерное волновое
уравнение - решение
Даламбера

Уч. пособие, стр. 22-24.