

Классическая электродинамика вакуума -2

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

Плоские волны. Векторная структура поля излучения

Для плоских волн напряженности зависят только от одной декартовой координаты и времени. Свойство поперечности плоских волн

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = E_z(t),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow H_z = H_z(t).$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \frac{dE_z}{dt} = c(\operatorname{rot} \mathbf{H})_z = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{dH_z}{dt} = -c(\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = 0.$$

Опуская не интересующие нас однородные статические поля

$$E_z = H_z = 0 \quad (\mathbf{E}, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{H}, \mathbf{e}_z) = 0 \quad (\mathbf{E}, \mathbf{m}) = (\mathbf{H}, \mathbf{m}) = 0.$$

\mathbf{m} – (единичный) вектор вдоль направления распространения волны. При этом автоматически выполняются уравнения

Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$

Плоские волны. Векторная структура поля излучения*

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{e}_y = \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}],$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}].$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Плоские волны. Векторная структура поля излучения*

Из двух встречных волн (см. решение Даламбера) рассмотрим одну, бегущую в положительном направлении оси z . Для нее

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\xi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\xi), \quad \xi = z - ct.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}] - \mathbf{H}\} = 0, \quad \frac{d}{d\xi} \{[\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}] + \mathbf{E}\} = 0.$$

Опускаем несущественную постоянную составляющую (статическое однородное поле)

$$\mathbf{H} = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{m} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{m} \times \mathbf{H}].$$

Плоские волны. Векторная структура поля излучения*

$$\mathbf{H} = [\mathbf{m} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{m} \times \mathbf{H}].$$

В (однонаправленной) плоской волне векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{m} образуют ортогональную тройку.

Инвариант $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = 0$ - модули напряженностей электрического и магнитного полей совпадают.

Инвариант $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$ - векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} ортогональны.

Задание. Вычислить инварианты стоячей плоской волны с линейной поляризацией.

Плоская однонаправленная волна.

Тензор энергии-импульса

$$U^{00} = U_{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2),$$

$$U^{0i} = -U_{0i} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_i,$$

$$U^{ik} = U_{ik} = -\frac{1}{4\pi} (E_i E_k + H_i H_k) + \frac{1}{8\pi} \delta_{ik} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad i, k = 1, 2, 3.$$

$$U^{00} = W = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi},$$

$$\{U^{0i}\} = \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times [\mathbf{m} \times \mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2 \mathbf{m} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{H}^2 \mathbf{m} = cW\mathbf{m},$$

$$U^{ik} = ? \quad i, k = 1, 2, 3. \quad - \text{ДОМА}$$

Монохроматические волны

Для монохроматических волн с круговой частотой ω $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$.

Поэтому волновое уравнение превращается в уравнение Гельмгольца

$$\Delta f + k^2 f = 0. \quad k^2 = (\omega / c)^2$$

Элементарное решение – плоская волна $f = f_0 \exp[i(\mathbf{k}, \mathbf{r})]$. $\mathbf{k}^2 = k^2 = (\omega / c)^2$

Это сокращенная комплексная запись. Подразумевается Re (физические величины вещественны). Знак Re можно опускать для линейных операций. В общем случае $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$

Однородные плоские волны: \mathbf{k} – вещественный вектор, $k = km$.

Неоднородные плоские волны: $\mathbf{k}'' \neq 0$ $f = f_0 \exp[i(\mathbf{k}', \mathbf{r})] \exp[-(\mathbf{k}'', \mathbf{r})]$.

Вектор \mathbf{k}'' определяет направление изменения амплитуды f , а вектор \mathbf{k}' – направление нормали к (плоскому) волновому фронту. Взаимная ориентация этих векторов: $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = k^2$. $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = 0$

Произвольное начальное распределение поля может быть разложено в спектр (интеграл) плоских волн. В общем случае возникают однородные и неоднородные плоские волны. Доля неоднородных волн возрастает для мелкомасштабных распределений (с размерами, сравнимыми или меньшими длины волны излучения).

Поляризация монохроматического излучения

Произвольное монохроматическое электромагнитное поле локально обладает определенной поляризацией. В точке с фиксированными координатами (коэф. не зависят от времени)

$$E_x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad E_y = B \cos(\omega t + \beta), \quad E_z = C \cos(\omega t + \gamma) \quad (*)$$

При изменении времени конец вектора \mathbf{E} прочерчивает некоторую фигуру в пространстве $\{E_x, E_y, E_z\}$. Покажем, что эта фигура плоская и лежит в плоскости, проходящей через начало координат – точку M_0 с координатами $\{E_x = 0, E_y = 0, E_z = 0\}$

Для этого покажем, что точка M с координатами (*) для произвольного t , точка M_0 , точка M_1 с координатами (*) при $\omega t = 0$ и точка M_2 с координатами (*) при $\omega t = \pi/2$ лежат в одной плоскости.

Поляризация монохроматического излучения*

(аналитич.
геометрия)

$$\text{Det} \begin{pmatrix} E_x & E_y & E_z \\ E_x - E_x^{(1)} & E_y - E_y^{(1)} & E_z - E_z^{(1)} \\ E_x - E_x^{(2)} & E_y - E_y^{(2)} & E_z - E_z^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Det} \begin{pmatrix} E_x & E_y & E_z \\ E_x^{(1)} & E_y^{(1)} & E_z^{(1)} \\ E_x^{(2)} & E_y^{(2)} & E_z^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

$$E_x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad E_y = B \cos(\omega t + \beta), \quad E_z = C \cos(\omega t + \gamma)$$

$$E_x^{(1)} = A \cos \alpha, \quad E_y^{(1)} = B \cos \beta, \quad E_z^{(1)} = C \cos \gamma$$

$$E_x^{(2)} = -A \sin \alpha, \quad E_y^{(2)} = -B \sin \beta, \quad E_z^{(2)} = -C \sin \gamma$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)], \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

Поляризация монохроматического излучения*

Направляем ось z вдоль нормали к этой плоскости

$$E_x = a_1 \cos(\omega t + \delta_1), \quad E_y = a_2 \cos(\omega t + \delta_2), \quad E_z = 0.$$

Исключаем отсюда время $\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_1}\frac{E_y}{a_2}\cos\delta = \sin^2\delta,$

$$\delta = \delta_2 - \delta_1$$

Это соотношение относительно E_x и E_y в общем случае описывает эллипс. С течением времени траектория, описываемая концом вектора \mathbf{E} , является эллипсом. Эллипс вписан в прямоугольник со сторонами, параллельными осям x и y с длиной, соответственно, $2a_1$ и $2a_2$. Общий случай отвечает эллиптической поляризации волны. В частных случаях эллипс вырождается в прямую (линейная поляризация) или в круг (круговая поляризация).

Параметры Стокса

Для монохроматического излучения

$$s_0 = a_1^2 + a_2^2, \quad s_1 = a_1^2 - a_2^2, \quad s_2 = 2a_1a_2 \cos \delta, \quad s_3 = 2a_1a_2 \sin \delta$$

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

3 независимых параметра. $s_0 \sim$ интенсивности излучения. Параметры Стокса удобно рассматривать как декартовы координаты точки на сфере радиуса s_0 . Линейная поляризация отвечает точкам на экваторе, а две чисто круговые – «северному» и «южному» полюсам.

Частично поляризованное излучение немонохроматично. Связь с частичной когерентностью излучения. [М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Глава 10] – тема презентации

Интенсивность излучения

для монохроматического излучения – среднее за оптический период значение потока энергии (вектора Пойнтинга). Для плоской монохроматической волны

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle \mathbf{m}$$

Комплексная запись $\mathbf{E} = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - i\omega_0 t) \}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{16\pi} \langle \{ \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - i\omega_0 t) + \mathbf{E}_0^* \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + i\omega_0 t) \}^2 \rangle \mathbf{m} = \\ &= \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{m} \end{aligned}$$

Для немонохроматического излучения вычисляется среднее значение за время, значительно превышающее характерный оптический период.

Интенсивность излучения*

Несколько волн с различающимися частотами и направлениями распространения

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n \exp(i\mathbf{k}_n \mathbf{r} - i\omega_n t)$$

Для монохроматического излучения ($\omega_m = \omega$)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle \{ \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n \exp(i\mathbf{k}_n \mathbf{r}) + \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n^* \exp(-i\mathbf{k}_n \mathbf{r}) \}^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n \exp(i\mathbf{k}_n \mathbf{r}) \right|^2 \end{aligned}$$

Интенсивность излучения*

Результат зависит от поляризации волн. Для двух волн ($N = 2$) интерференционные члены исчезают при ортогональных поляризациях волн. При совпадающих поляризациях – интерференционные полосы. При большем числе волн возможны «оптические вихри», или винтовые дислокации волнового фронта. Тогда в поперечном сечении имеются точки, в которых интенсивность обращается в 0, а фаза поля при обходе вокруг таких точек получает приращение, кратное 2π .

Задания

1. В вакууме распространяются две волны с эл. напряженностями

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{e}_y A \exp(i\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{r} - i\omega t), \quad \mathbf{k}_{1,2} = \pm k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z, \quad k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 / c^2.$$

Найти интенсивность и компоненты вектора Пойнтинга в плоскости $z = 0$.

2. В вакууме магн. напряженность $\mathbf{H} = [\mathbf{r} \times \mathbf{h}] \cos(\omega t)$. Найти \mathbf{E} .
Имеются ли ограничения на постоянные параметры задачи?

3. В вакууме распространяются три плоских монохроматических волны с компланарными (лежащими в одной плоскости) волновыми векторами, совпадающими частотами и поляризациями и вещественными амплитудами A_1 , A_2 и A_3 .
При каких условиях существуют точки, в которых интенсивность = 0 ? - дома

Ответ: Амплитуды волн должны удовлетворять «правилу треугольника»: $|A_m - A_n| < A_l < A_m + A_n$

Реализуемы ли плоские волны?

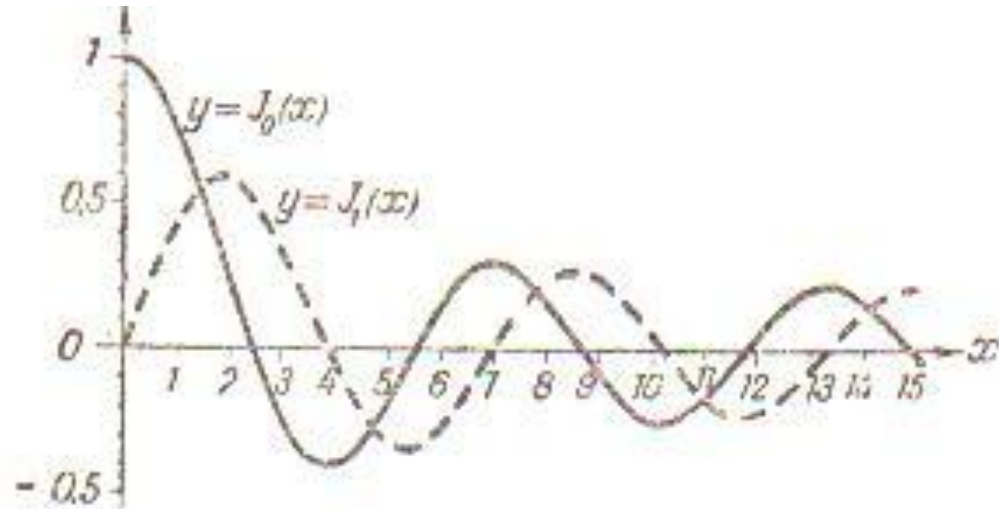
Ввиду независимости напряженностей поля плоской волны от поперечных координат полная мощность, переносимая такой волной, бесконечна. Поэтому одиночная плоская волна и сумма нескольких плоских волн не отвечают физически реализуемому излучению.

Однако в линейной электродинамике справедлив принцип суперпозиции. Можно разложить в интеграл по плоским монохроматическим волнам практически любое распределение поля, обладающее конечной энергией (мощностью). Тем самым, знание плосковолновых решений дает принципиальную возможность решить аналогичные задачи с реальными пучками и импульсами э-м излучения.

Цилиндрические волны («бесселевы пучки»)

Уч. пособие,
стр. 29-33.

Бесселевы функции



Ряд Тейлора
(малые аргументы)

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Асимптотика
(большие аргументы)

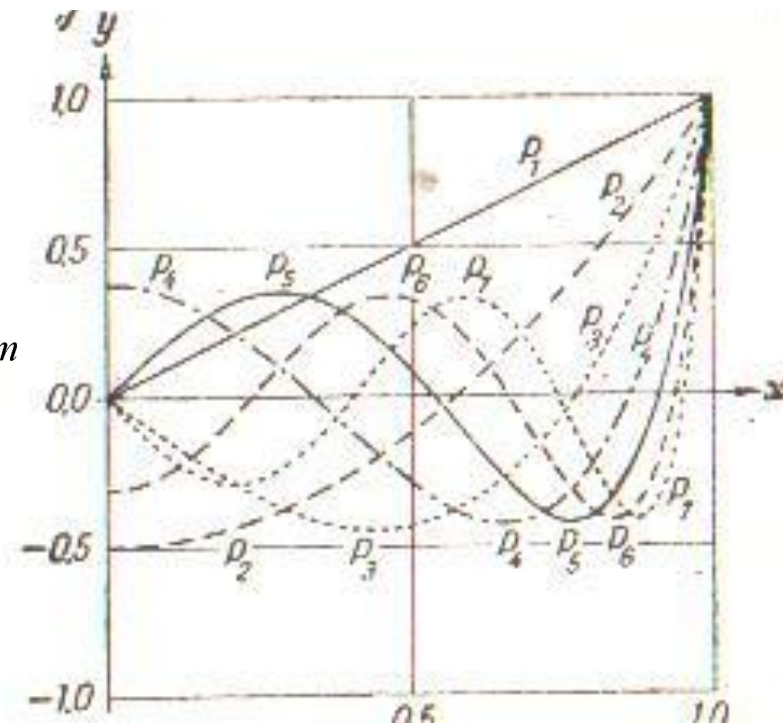
$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Сферические волны

Уч. пособие
стр. 33-36

Полиномы Лежандра

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^l m!(l-m)!(l-2m)!} (\cos \theta)^{l-2m}$$



Высокочастотная асимптотика

- Уч. пособие, стр. 36-42 (последнее уравнение (12.20))