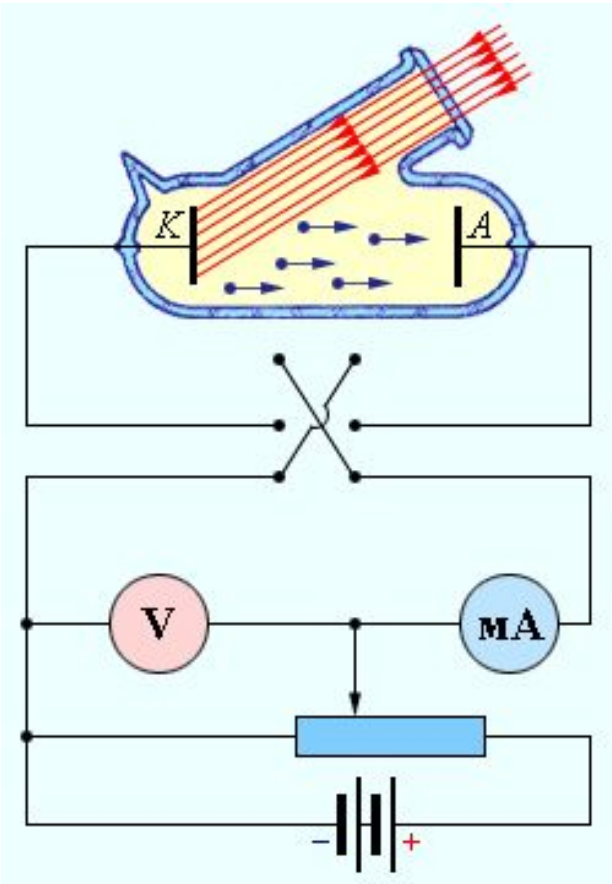
Лекция № 6 (15.04.14г.)

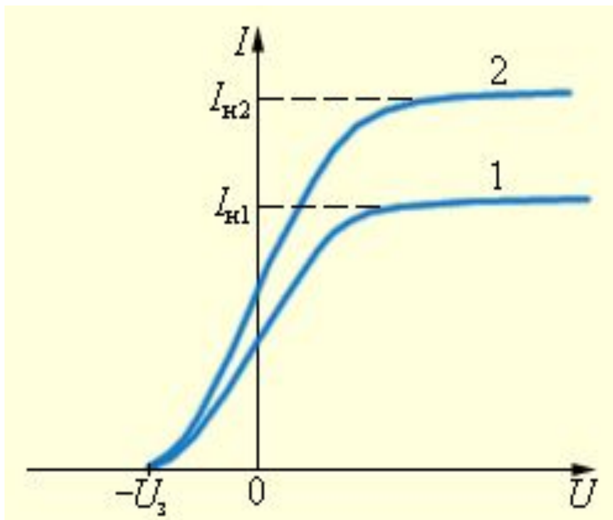
«КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ»

1) **Внешний фотоэффект.**
2) **Эффект Комптона.**
3) **Опыт Томаса Юнга. Дифракция электронного пучка на двух щелях. Опыты Дж. Томсона.**
4) **Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза де Бройля. Скорость волны де Бройля.**
5) **Волновая функция и ее свойства.**
6) **Уравнение Шредингера для стационарного состояния квантовой частицы.**
7) **Решение уравнения Шредингера для свободной квантовой частицы.**

1) Внешний фотоэффект - *вырывание электронов из вещества под действием падающего на него света*

- Измерения показали, *что ток насыщения $I_н$ прямо пропорционален интенсивности падающего света.* Анода могут достичь только те электроны, кинетическая энергия которых превышает |eU|. Измеряя $U_з$, можно определить максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов.





$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{max} = eU_з$$

Закономерности фотоэффекта

Р.Э.Милликен
(1886-1953)

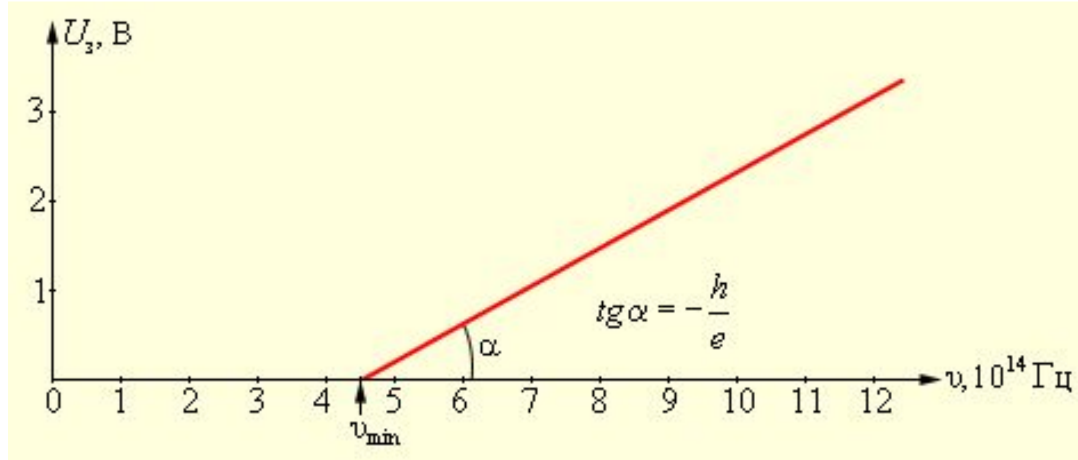
А. Г. Столетов
(1839-1896)

- Число высвобождаемых электронов прямо пропорционально интенсивности падающего света.
- Максимальная кинетическая энергия электронов E зависит от частоты ω и не зависит от интенсивности падающего света.
- Энергия электронов E является линейной функцией частоты падающего света ω.
- Существует граничная частота света ω_0, ниже которой фотоэффект невозможен (**красная граница фотоэффекта**).

1) Внешний фотоэффект

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{max} = eU_з = hv - A.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта



Из уравнения Эйнштейна → <u>тангенс угла наклона прямой</u>, выражающей зависимость запирающего потенциала $U_з$ от частоты υ (рис.), *равен отношению постоянной Планка h к заряду электрона e:*

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{h}{e}.$$

↓

экспериментально определено значение *постоянной Планка.*

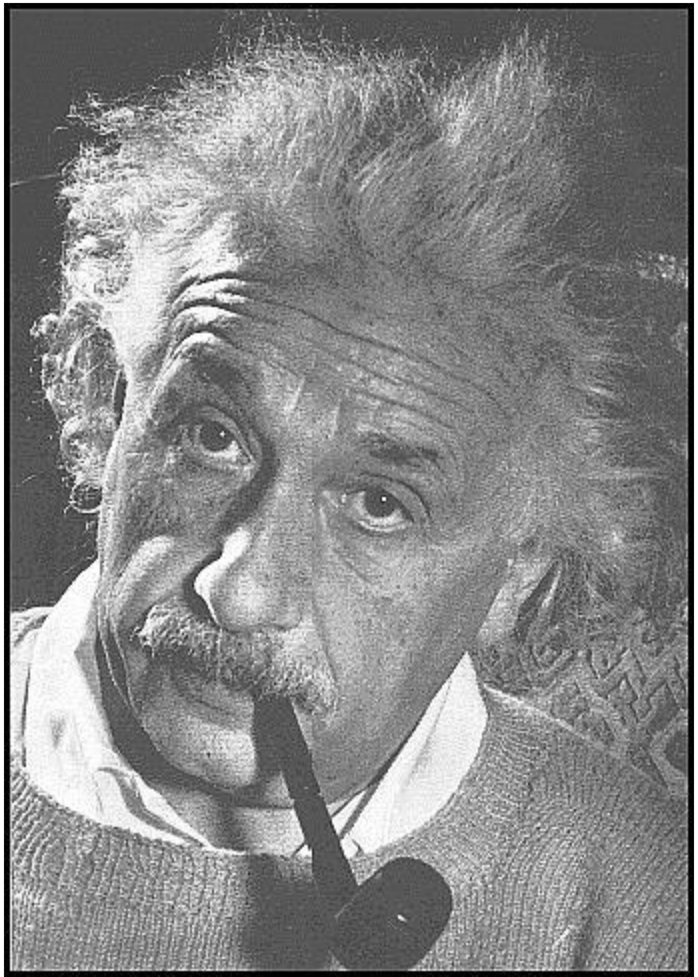
Экспериментально определена *работа выхода A*:

$$A = hv_{\text{min}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}},$$

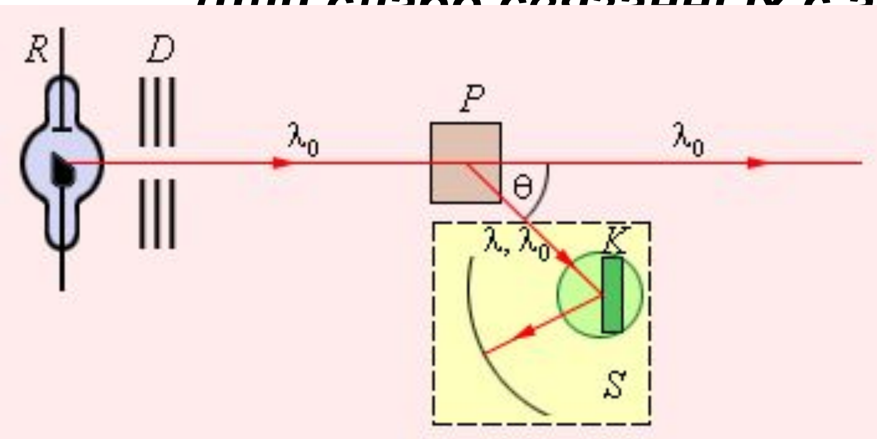
где *c* – скорость света, $\lambda_{кр}$ – длина волны, соответствующая *красной границе фотоэффекта*.

***<u>Законы фотоэффекта свидетельствуют,</u>* что свет при испускании и поглощении ведет себя подобно потоку частиц - *фотонов или световых квантов*.**

Благодаря формуле Эйнштейна для фотоэффекта квант света превратился из математической абстракции Макса Планка в физическую реальность.



2) Эффект Комптона - *эффект увеличения длины волны упруго рассеянного рентгеновского излучения на свободных (или слабо связанных с атомами) электронах вещества*



$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\Lambda \sin^2 \theta/2$$

$\Lambda = 2{,}43 \cdot 10^{-3}$ нм – ***комптоновская длина волны***, **не зависящая от свойств рассеивающего вещества**

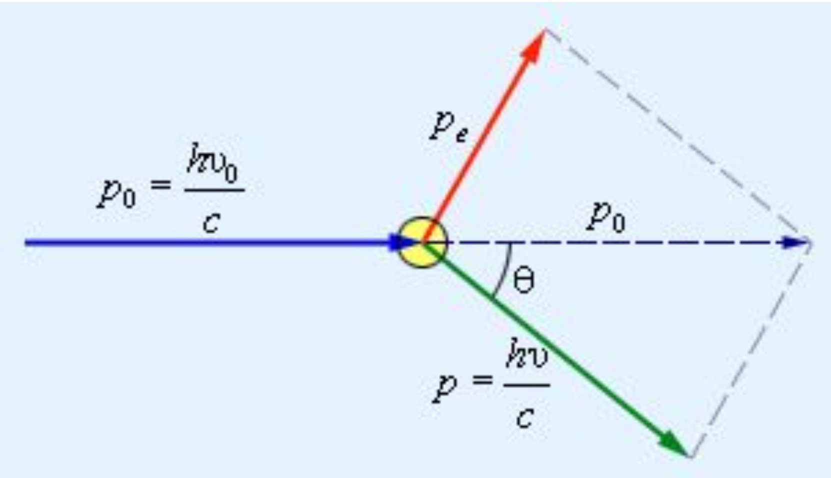
Эффект Комптона не укладывается в рамки *волновой теории*, согласно которой длина волны излучения не должна изменяться при рассеянии.

Рентгеновское излучение с длиной волны λ_0, исходящее *из рентгеновской трубки R*, проходит через *свинцовые диафрагмы* и в виде узкого пучка направляется на *рассеивающее вещество-мишень P* (графит, алюминий). *Излучение, рассеянное под некоторым углом θ*, анализируется с помощью *спектрографа рентгеновских лучей S*, в котором роль дифракционной решетки играет *кристалл K*, закрепленный на поворотном столике.

Если принять, что *излучение представляет собой поток фотонов*, *то* эффект Комптона есть результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. *У легких атомов* рассеивающих веществ электроны слабо связаны с ядрами атомов, поэтому такие *электроны можно считать свободными*.

В процессе столкновения фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами сохранения.

2) Эффект Комптона



Рассмотрим **упругое столкновение двух частиц –** ***налетающего фотона*** **с энергией** $E_0 = h_0\upsilon$ **и импульсом** $p_0 = h_0\upsilon/c$ **с** ***покоящимся электроном*****, энергия покоя которого** $E_0 = mc^2$**. Фотон, столкнувшись с электроном, изменяет направление движения (рассеивается).**

Импульс фотона после рассеяния **становится равным** $p = h\upsilon/c$**, а** ***его энергия*** $E = h\upsilon < E_0$**.** **<u>Уменьшение энергии фотона означает увеличение длины волны</u>.**

Энергия электрона после столкновения **(в соответствии с релятивистской формулой) становится равной**

$$E_e = \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4},$$

где p_e **– приобретенный импульс электрона**

Закон сохранения энергии:

$$E + E_{e_0} = E + E_e$$

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu + \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}.$$

Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e$$

$$p_e^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2}{c^2}\nu_0\nu\cos\theta.$$

$$\downarrow$$

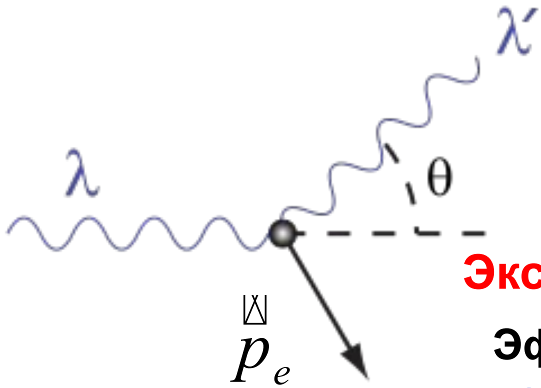
$$mc^2(\upsilon - {}_0\upsilon) = h\upsilon\,{}_0\upsilon(1 - \cos\theta)$$

Т.к. $\left(\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0},\ \nu = \frac{c}{\lambda}\right) \longrightarrow$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

$$\Lambda = \frac{h}{mc} = 2{,}426\cdot10^{-3}\ \text{нм}.$$

Квант света как физическая реальность: эффект Комптона (2)



Классическая физика: $\lambda' = \lambda$

Эксперимент (эффект Комптона): $\lambda' - \lambda \sim 1 - \cos\theta$

Эффект объясняется, если предположить, что фотон – это частица с $\varepsilon = \hbar\omega$ **и** $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. **Тогда:**

$$\begin{cases} \hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + E_e \\ \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}_e \end{cases}$$

$$E_e^2 = \vec{p}_e^{\,2} c^2 + m_e^2 c^4 \qquad \left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \qquad \left|\vec{k}'\right| = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{\omega'}{c}$$

$$\begin{cases} \hbar(\omega - \omega') + m_e c^2 = E_e \\ \hbar\left(\vec{k} - \vec{k}'\right) = \vec{p}_e \end{cases} \Rightarrow$$

Возводим в квадрат

$$\begin{cases} \hbar^2(\omega - \omega')^2 + 2m_e c^2\hbar(\omega - \omega') + m_e^2 c^4 = E_e \\ \hbar^2\omega^2 + \hbar^2\omega'^2 - 2\hbar^2\omega\omega'\cos\theta = c^2\vec{p}_e^{\,2} \end{cases}$$

Вычитаем второе равенство из первого:

$$\omega - \omega' = \frac{\hbar}{m_e c^2}\,\omega\omega'(1 - \cos\theta)$$

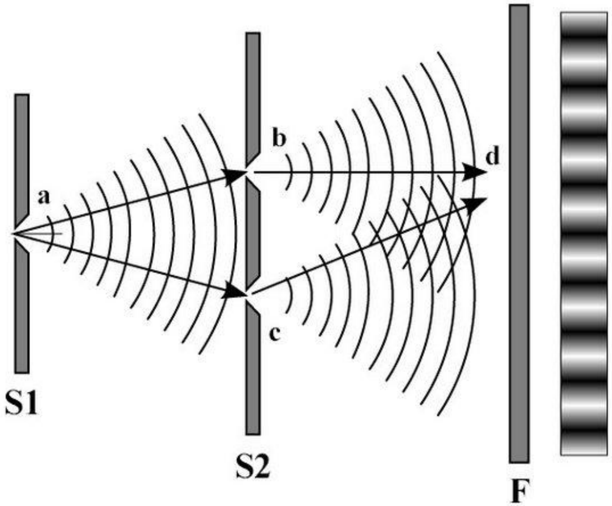
И в терминах длин волн

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e c}(1 - \cos\theta) \equiv \lambda_k(1 - \cos\theta)$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_k = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} \approx 2.426\ 10^{-10}\,см$$

3) Свет как волна: опыт Томаса Юнга



Интерференция света от двух щелей – доказательство волновой природы света

$$A_b(t) = A_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}_1\vec{r}_d + i\varphi},\ A_c(t) = A_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}_2\vec{r}_d + i\varphi},$$

$$|A_0|^2 = I_0,\ \ |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$I = |A_b + A_c|^2 = |A_b|^2 + |A_c|^2 + A_b^* A_c + A_b A_c^* =$$

Интенсивность света в точке d:

$$|A_0|^2 + |A_0|^2 + |A_0|^2\left(e^{i\vec{r}_d(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)} + e^{-i\vec{r}_d(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)}\right) =$$

$$2|A_0|^2\left[1 + \cos\left(\vec{r}_d\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1\right)\right)\right] = 2|A_0|^2\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)\right],$$

Δ **-разность хода лучей по путям “bd” и “cd”. Таким образом:**

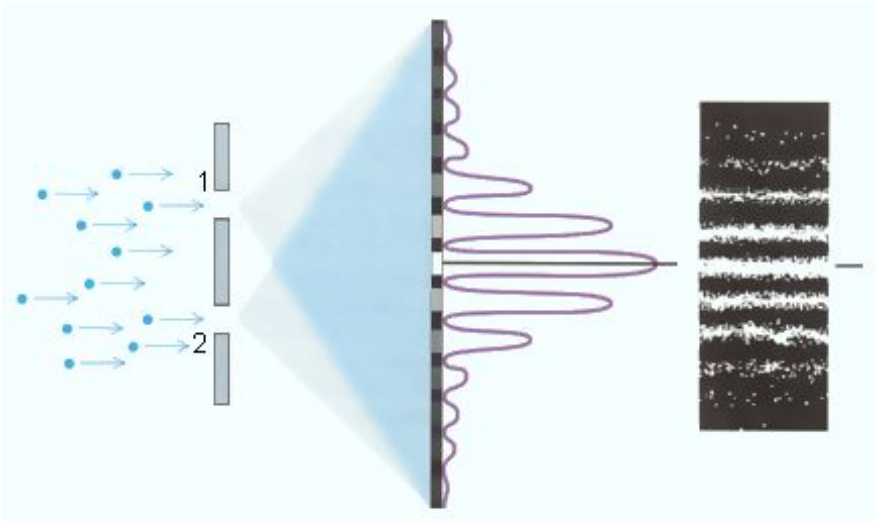
$$I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)\right]$$

Условие максимумов:

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi n,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ \Rightarrow \ \Delta = n\lambda$$

Если свет –корпускула, то $I = |A_b|^2 + |A_c|^2$ **и интерференции быть не должно!**

3) Эксперименты, связанные с квантовой механикой: дифракция электронного пучка на двух щелях



Если в опыте закрыть одну из щелей, **то интерференционные полосы исчезнут, и фотопластинка зарегистрирует распределение электронов, продифрагировавших на одной щели (рис.). В этом случае все электроны, долетающие до фотопластинки, проходят через единственную открытую щель.**

Если же открыты обе щели, **то появляются интерференционные полосы.**

Вопрос: **через какую из щелей пролетает тот или иной электрон?**

Ответ: ***электрон пролетает через обе щели!!!***

- ***Поток электронов дает интерференцию***

4) Гипотеза де Бройля. Скорость волны де Бройля

- ***Так же как свету присущи одновременно свойства частицы (корпускулы) и волны*** (**<u>двойственная корпускулярно-волновая природа света</u>**), ***так и электроны и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают волновыми свойствами.***
- ***Фазовая скорость волн де Бройля*:**

$$\upsilon_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{m\upsilon} = \frac{c^2}{\upsilon}$$

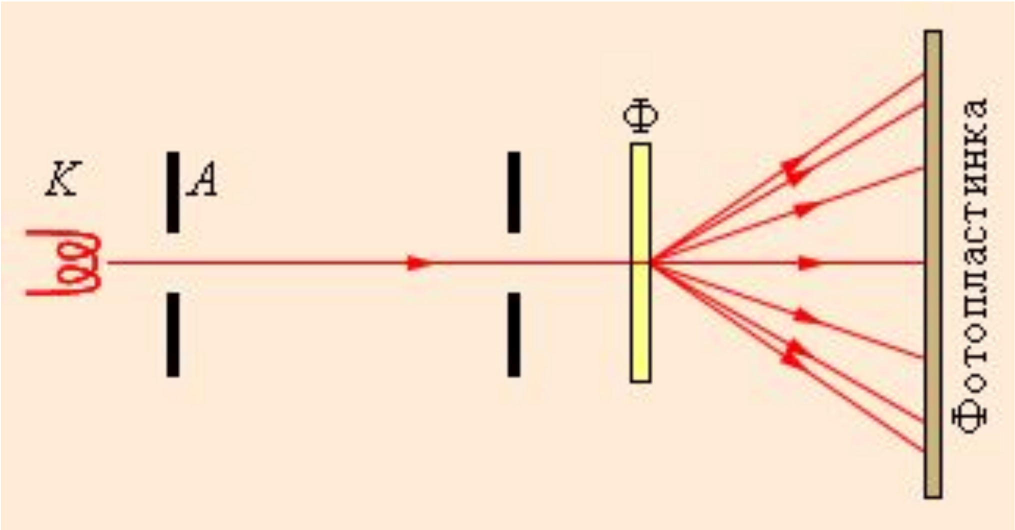
- ***Групповая скорость волн де Бройля* (для свободной частицы):**

$$u = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{m\upsilon c^2}{mc^2} = \upsilon$$

↓

Групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы - *<u>волны де Бройля перемещаются вместе с частицей</u>*.

3) Эксперименты, связанные с квантовой механикой: *Дж. Томсона*



Опыты - подтверждение *гипотезы де Бройля*

Упрощенная схема опытов *Дж. Томсона*: *К* – накаливаемый катод, *А* – анод, Ф – фольга из золота

***Картина дифракции электронов* на образце при длительной экспозиции (а) и при короткой экспозиции (b).**

3) Эксперименты, связанные с квантовой механикой: дифракция электронного пучка на двух щелях

<u>Ответ:</u> ***электрон пролетает через обе щели!***

- **Дебройлевская волна каждого отдельного электрона проходит одновременно через оба отверстия, в результате чего и возникает интерференция. *Поток электронов дает интерференцию*, т. е. <u>электрон, как и фотон, интерферирует сам с собой</u>.**

- ***Объяснить наблюдаемое распределение интенсивности*** **можно с помощью**

<u>принципа суперпозиции</u> <u>для</u> <u>*волновой функции*</u>: ***если квантовая система (электрон) может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями***

Ψ_1 и Ψ_2 , то она может также находиться и в состоянии

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

5) Волновая функция и ее свойства

Для описания поведения квантовых систем вводится волновая функция Ψ (*x, y, z, t*). *Физический смысл имеет только вероятность обнаружить электрон в том или ином месте, описываемая квадратом модуля волновой функции* |Ψ|*²*.

***Волновая функция* Ψ *определяется* таким образом, чтобы вероятность *dw* того, что частица находится в элементе объема *dV* была равна:**

$$dw = \left|\Psi^2\right| dV$$

<u>Волновая функция должна быть</u>: 1) *конечной* (вероятность не может быть больше единицы),

2) *однозначной* (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и 3) *непрерывной* (вероятность не может изменяться скачком).

3) Эксперименты, связанные с квантовой механикой: дифракция электронного пучка на двух щелях

Сложение *волновых функций* (<u>амплитуд вероятностей</u>, определяемых квадратами модулей волновых функций, а не вероятностей) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории:

если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями **Ψ_1, Ψ_2 ,…,Ψ_n**, ***то она также может находиться в состоянии, описываемом линейной комбинацией этих функций (где*** **C_n (n = 1, 2,…) —** ***произвольные, или комплексные числа):***

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

принцип суперпозиции для волновой функции

6) Уравнение Шредингера для стационарного состояния квантовой частицы.

Волновая функция Ψ является решением *__основного уравнения квантовой механики__* – *уравнения Шредингера:*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z,t)\cdot\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

***U (x, y, z, t)* — потенциальная функция частицы в силовом поле, Ψ *(x, y, z, t)* — искомая волновая функция частицы.**

Важный частный случай общего уравнения Шредингера - *__уравнение Шредингера для стационарных состояний__*, *в котором исключена зависимость* Ψ *от t*. В этом случае *функция U* = *U* (*x*, *y*, *z*) *имеет смысл потенциальной энергии*.

6) Уравнение Шредингера для стационарного состояния квантовой частицы.

<u>Решение уравнения</u> может быть представлено в виде произведения двух функций — функции *только координат* и функции *только времени*:

$$\Psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

где *E* — полн

Уравнение Шредингера

п

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\cdot\Delta\psi+U\cdot\psi\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)=i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\cdot\psi\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0$$

— уравнение Шре ... онных *состояний*.

7) Решение уравнения Шредингера для свободной квантовой частицы.

Набор значений энергий E, ***при котором волновая функция Ψ имеет*** **физический смысл** ***называются собственными значениями энергии***.

- ***Решения, которые соответствуют собственным значениям энергии, называются собственными функциями***.
- **Собственные значения *E* могут образовывать как <u>непрерывный</u>, так и <u>дискретный ряд (спектр).</u>**

<u>Для свободной частицы *U* (*x*) = 0 (пусть она движется вдоль оси *x*)</u> ***решение уравнения Шредингера***

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \qquad \Psi(x,t)=A\exp(-i\omega t+ikx)=A\exp\left(-\frac{i(Et-p_x x)}{\hbar}\right),$$

$$A=const\,,\ \ \omega=\frac{E}{\hbar}\,,\ \ k=\frac{p_x}{\hbar}$$

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{p_x^2}{2m}$$

соответствует непрерывному спектру энергий.

~~Свободная квантовая частица описывается плоской~~

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ

УЧИМСЯ ВМЕСТЕ!