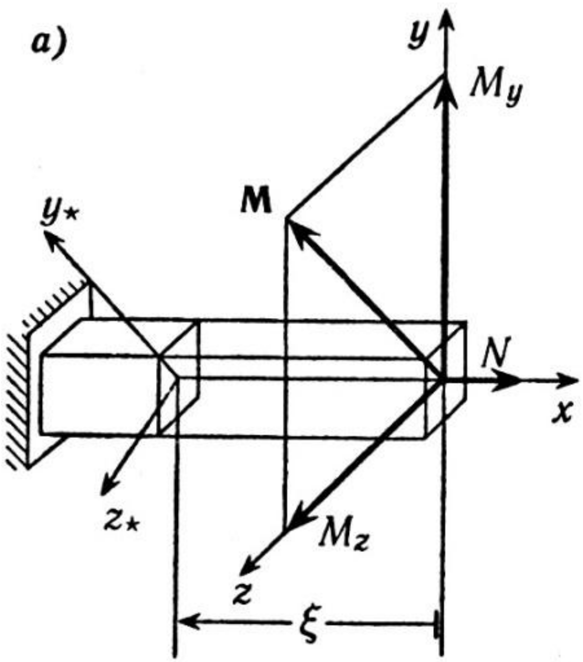
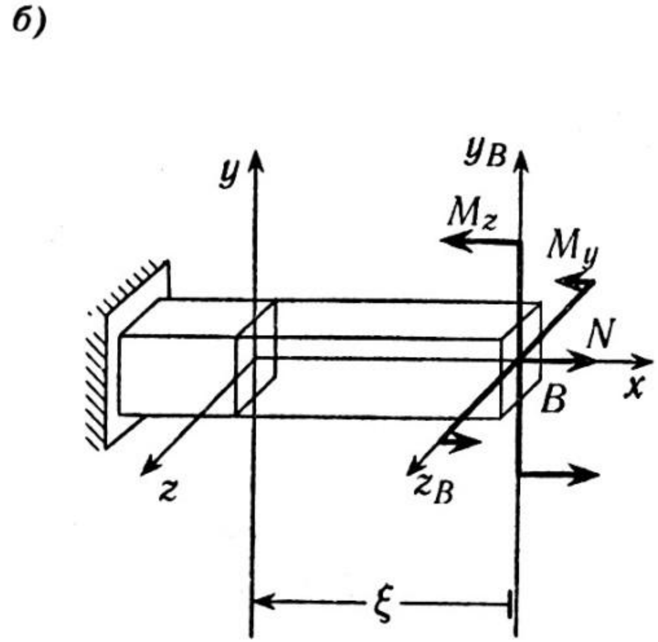
СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ С КРУЧЕНИЕМ И РАСТЯЖЕНИЕМ-СЖАТИЕМ

Формула для нормальных напряжений





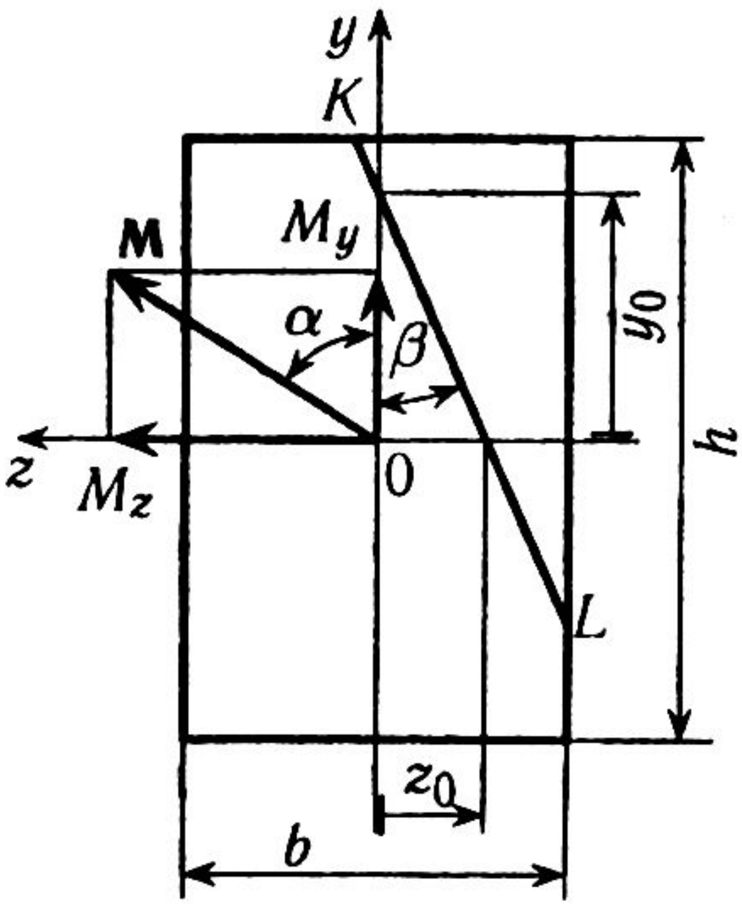
$$\sigma^{*} = -\frac{M_z}{I_z}y,$$

$$\sigma^{**} = \frac{M_y}{I_y}z$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

$$\sigma^{***} = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y \quad (1)$$

Уравнение нейтральной линии



• *Нейтральная линия* – это след пересечения плоскости поперечного сечения нейтральным слоем. Т.е. $\sigma = 0 \implies$

$$0 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y (2)$$

Отрезок KL отвечает этому уравнению.

- Отрезки, отсекаемые нейтральной линией от осей координат:

при $z = 0$ $\qquad y_0 = \frac{NI_z}{M_z A}$, (3)

при $y = 0$ $\qquad z_0 = -\frac{NI_y}{M_y A}$ (4)

Наклон $\vec{M}$ к оси y: $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{M_z}{M_y}$. (5)

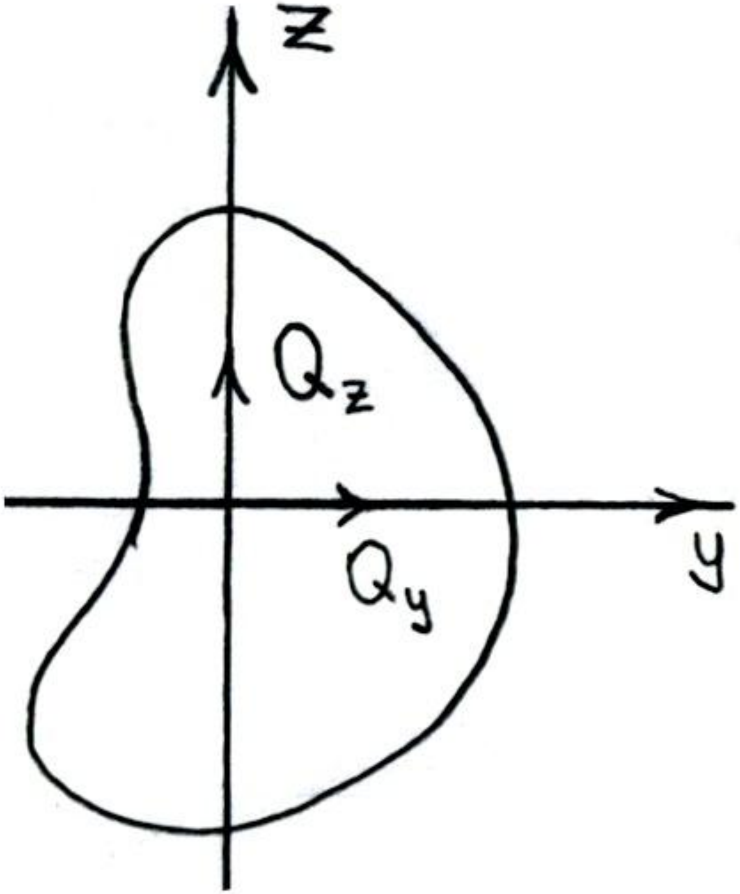
Наклон нейтральной линии к оси y:

$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_z I_y}{M_y I_z}$ (6)

$(5) \to (6) \Longrightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{I_y}{I_z}\operatorname{tg}\alpha.$ (7)

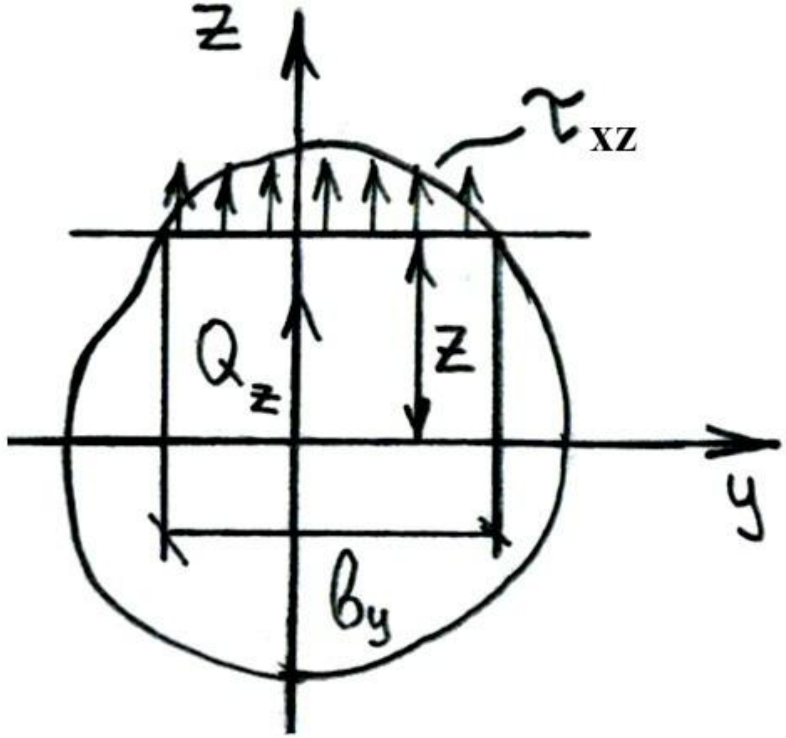
При $I_y \neq I_z$ нейтральная линия $\nparallel \vec{M}$.

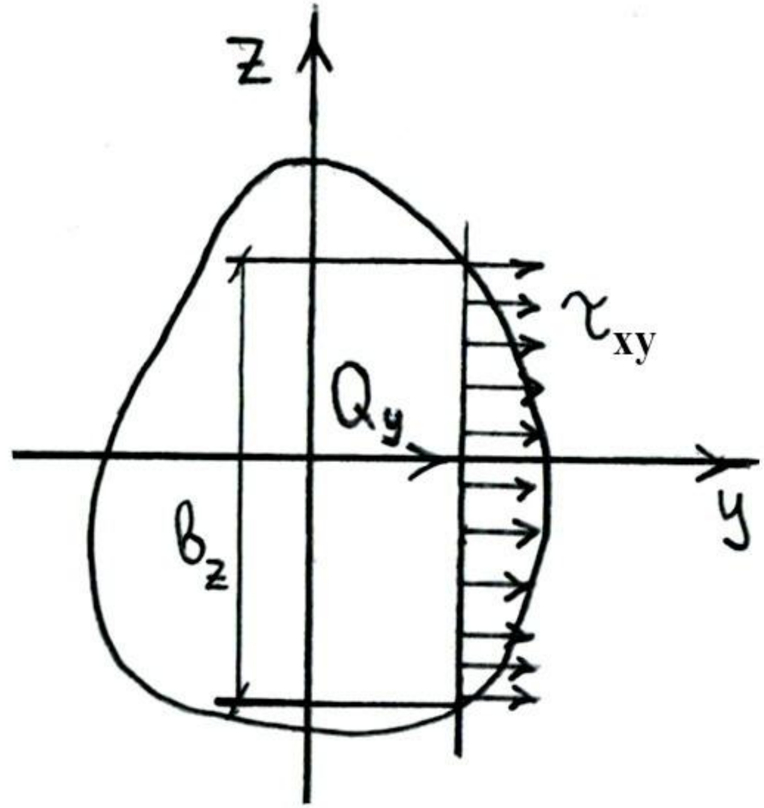
Вычисление касательных напряжений



- Q_y, Q_z – перерезывающие силы

Рассмотрим по отдельности их действие.





$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{I_y b_y} \qquad \tau_{xy} = \frac{Q_y S_z}{I_z b_z}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2}$$

тонкостенные стержни не изучаем

Стержень круглого сечения

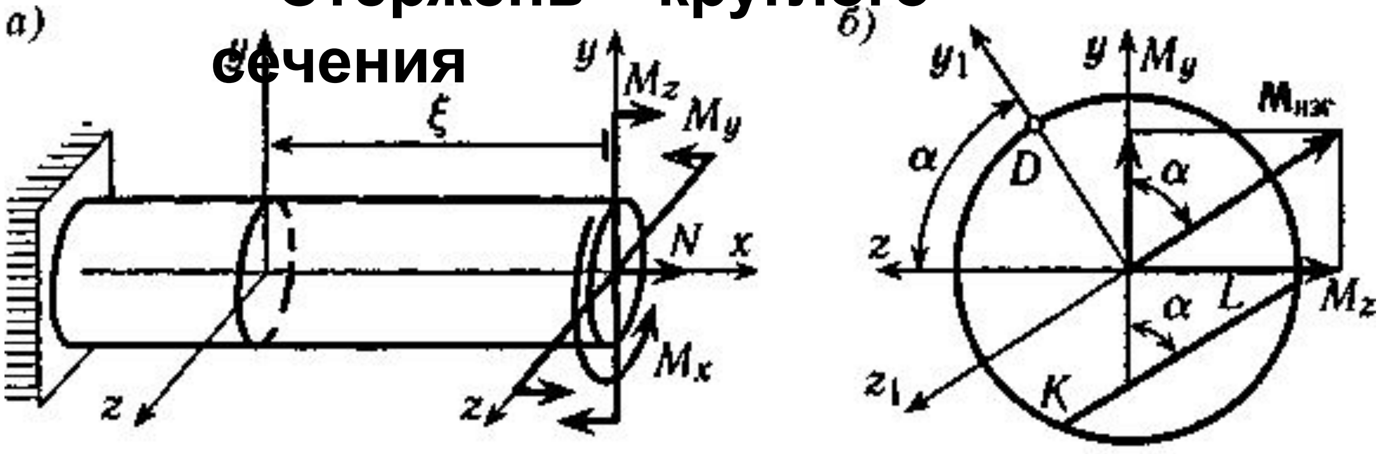


Рис.1

$$I_y = I_z = I \qquad \to (7') \Rightarrow \qquad tg\alpha = \frac{M_z}{M_y} \qquad \left(M_y > 0; M_z < 0\right)$$

$$M_{y_1} = 0 \qquad M_{z_1} = M_{изг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad ; \mathrm{K}L \parallel M_{изг}$$

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_{z_1}}{W} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} \tag{1}$$

$$\tau_D = \frac{M_x}{W_p} \tag{2}$$

$$\text{рис. б} \Rightarrow \sigma_D = \sigma_{\max}$$

Условие прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = 2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_D^2 + 4\tau_D^2} \qquad (3)$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_p}\right)^2} \qquad (4)$$

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma] \qquad (5)$$

Подбор R

Если $N = 0$

$$\sigma_{max} = 4\frac{\sqrt{{M_y}^2+{M_z}^2}}{\pi R^3} \qquad (6)$$

$$\tau_{max} = \frac{2M_x}{\pi R^3} \qquad (7)$$

$$\sqrt{{\sigma_{max}}^2 + 4{\tau_{max}}^2} = \sqrt{\frac{{M_y}^2+{M_z}^2}{\left(\frac{\pi R^3}{4}\right)^2} + \frac{4{M_x}^2}{\left(\frac{\pi R^3}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{{M_x}^2+{M_y}^2+{M_z}^2}}{\frac{\pi R^3}{4}} \le [\sigma] \qquad (8)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} + \Delta\, \boldsymbol{R} \rightarrow \mathbf{(4)} \rightarrow \mathbf{(5)}$$

Стержень прямоугольного сечения

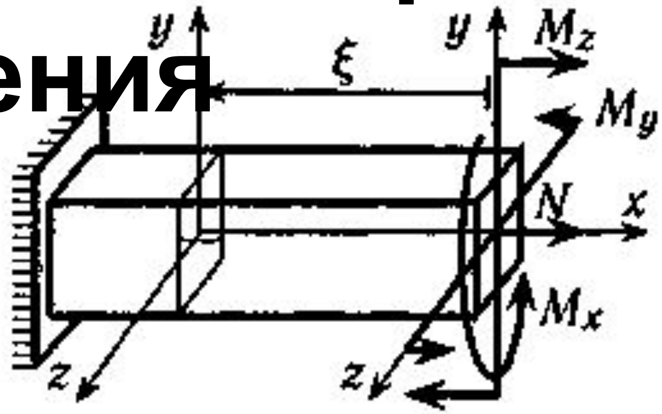


Рис.2 $\left(M_y > 0; M_z < 0\right)$

$$\tau_E = \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_k} \qquad (1)$$

$$W_k = \beta b^3 \qquad (2)$$

$$\tau^*_{\max} = \gamma \tau_{\max} \qquad (3)$$

$$\tau^*_{\max} = \tau_F$$

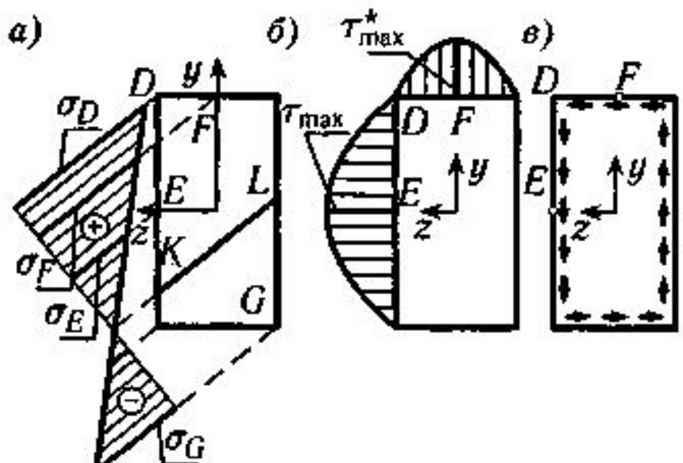


Рис .2

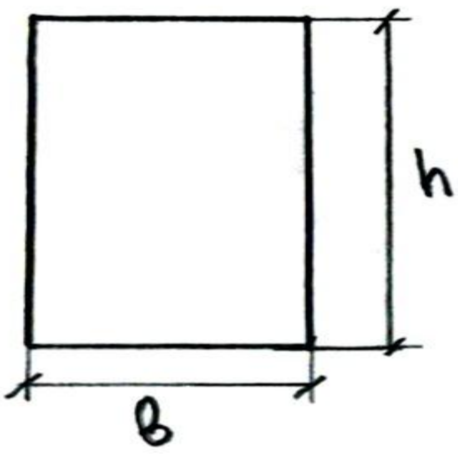
$$\tau^*_{\max} \le \tau_{\max} \qquad (4)$$

$$\varphi = \frac{M_x l}{G I_k} \qquad (5)$$

$$I_k = \alpha b^4 \qquad (6)$$

Зависимость коэффициентов α, β и γ от отношения h/b сторон прямоугольного сечения стержня

	h/b									
	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
α	0,140	0,294	0,375	0,457	0,622	0,790	1,123	1,789	2,456	3,123
β	0,208	0,346	0,418	0,493	0,645	0,801	1,128	1,789	2,456	3,123
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742



Условие прочности

1. $$\sigma_D = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} \le [\sigma] \qquad (7)$$

(См.Рис.1. $\left(M_y > 0; M_z < 0\right)$; Рис. 2)

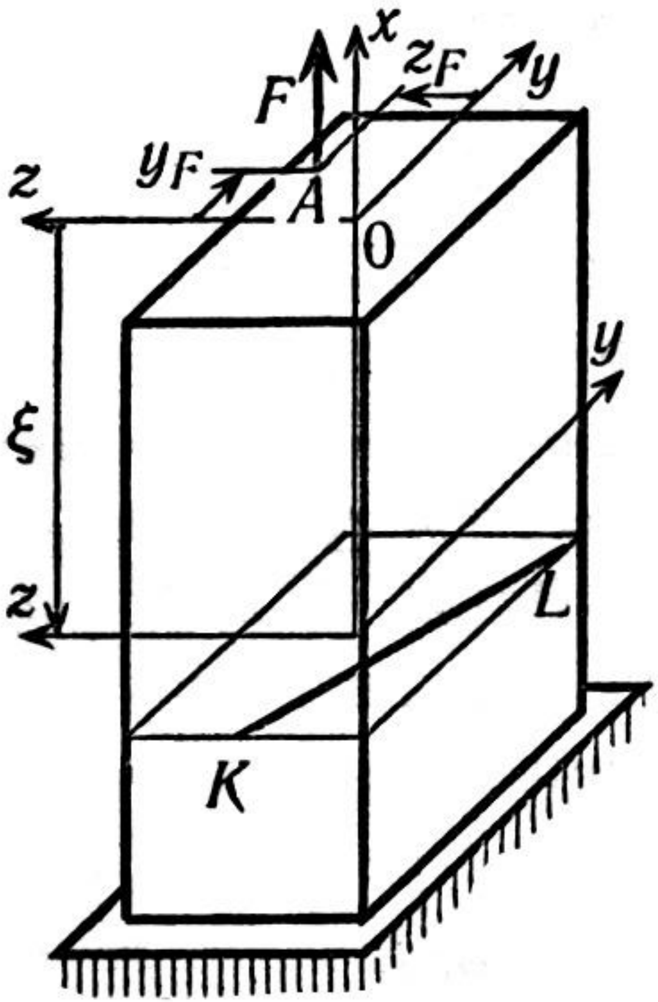
2. $\tau_E = \tau_{\max} \to (1),(2) \to$ $$\sigma_{\text{экв,E}} = \sqrt{\sigma_E^2 + 4\tau_E^2} \le [\sigma] \qquad (8)$$

3. $\tau_{\max} = \tau_F \to (1),(3) \to$ $$\sigma_{\text{экв,F}} = \sqrt{\sigma_F^2 + 4\tau_F^2} \le [\sigma] \qquad (9)$$

$$\sigma_E = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} \qquad \left((y_E = 0; z_E = \frac{b}{2})\text{Рис. 2}\right) \qquad (10)$$

$$\sigma_F = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} \qquad \left(y_F = \frac{h}{2}; z_F = 0\right) \qquad (11)$$

Внецентренное растяжение и сжатие



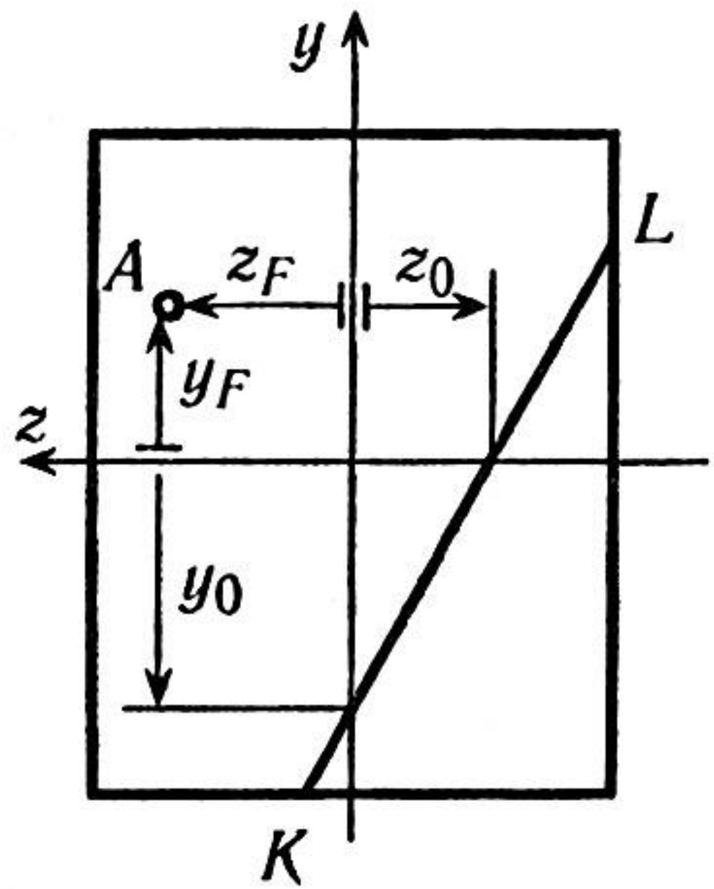
F параллельна оси x

$$N = F, M_y = Fz_F, M_z = -Fy_F$$

$$\Longrightarrow \sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fz_F}{I_y} z + \frac{Fy_F}{I_z} y \quad (1)$$

Нейтральная линия

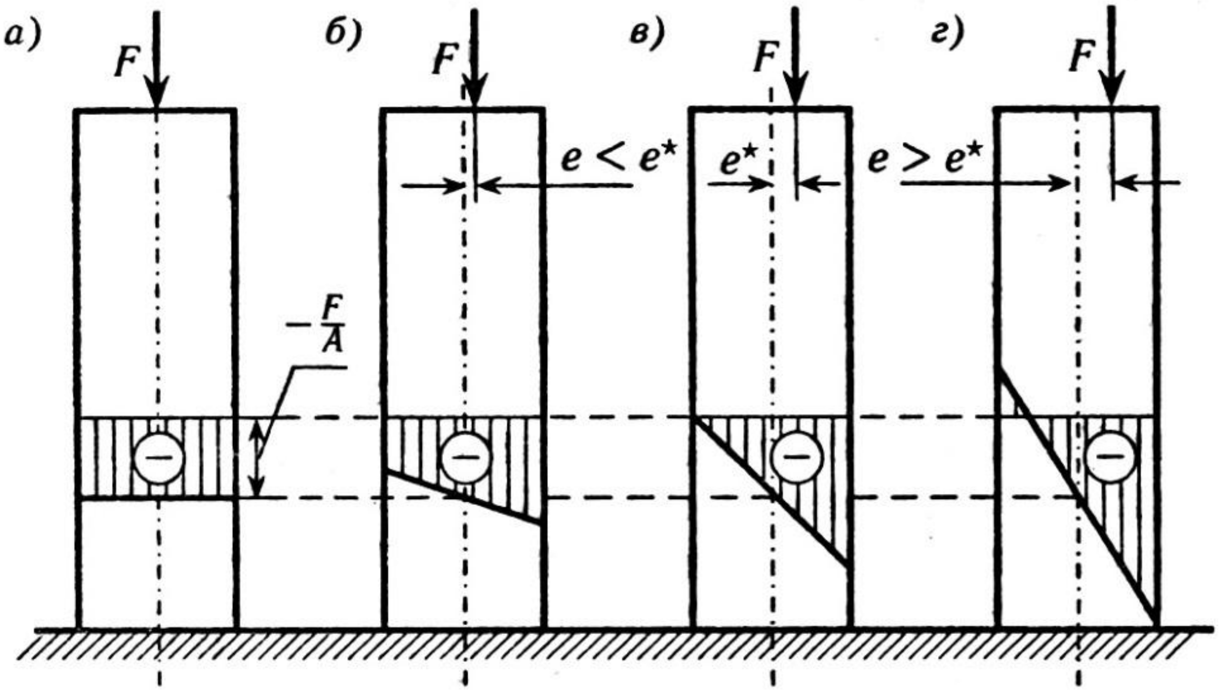
$$0 = \frac{1}{A} + \frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y$$



- Отрезки, отсекаемые нейтральной линией от осей координат:

$$y_0 = -\frac{I_z}{Ay_F}\ ,\quad z_0 = -\frac{I_y}{Az_F}$$

При $y_F \to 0$ и $z_F \to 0 \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A}$



- а) $e = 0$, $\sigma = -\frac{F}{A}$

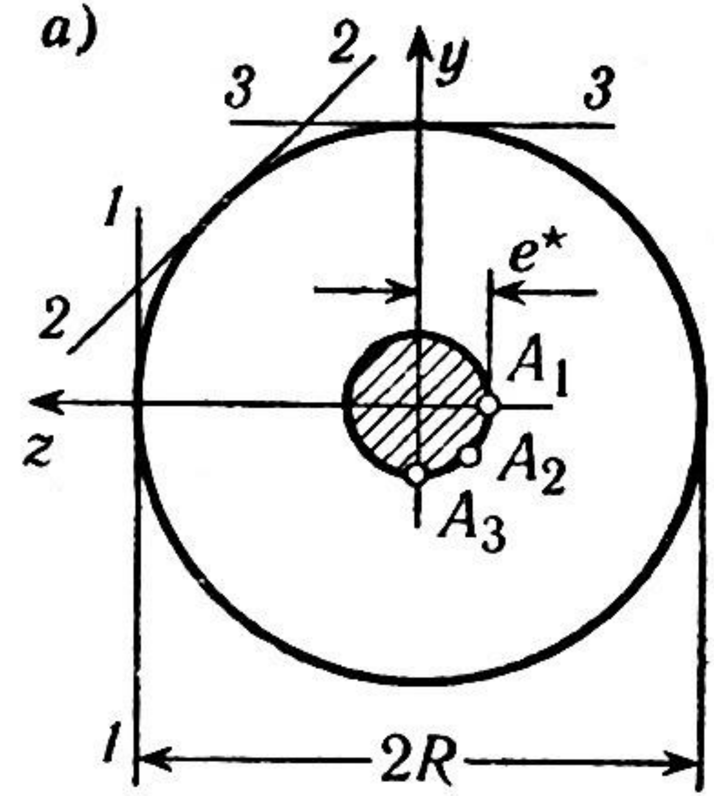
б) При наличии эксцентриситета $\sigma = -\frac{F}{A} + \frac{Fe}{W}$

в) $\sigma = -\frac{F}{A} + \frac{Fe^*}{W} = 0 \Rightarrow e^* = \frac{W}{A}$

e^* ограничивает зону вокруг центра тяжести, называемую *ядром сечения*. Если продольная сила приложена внутри ядра сечения, то по поперечному сечению рассматриваемого стержня возникнут нормальные напряжения одного знака (отрицательные при сжатии, положительные при растяжении).

г) $\left|\frac{F}{A}\right| < \left|\frac{M_{изг}}{W}\right|$

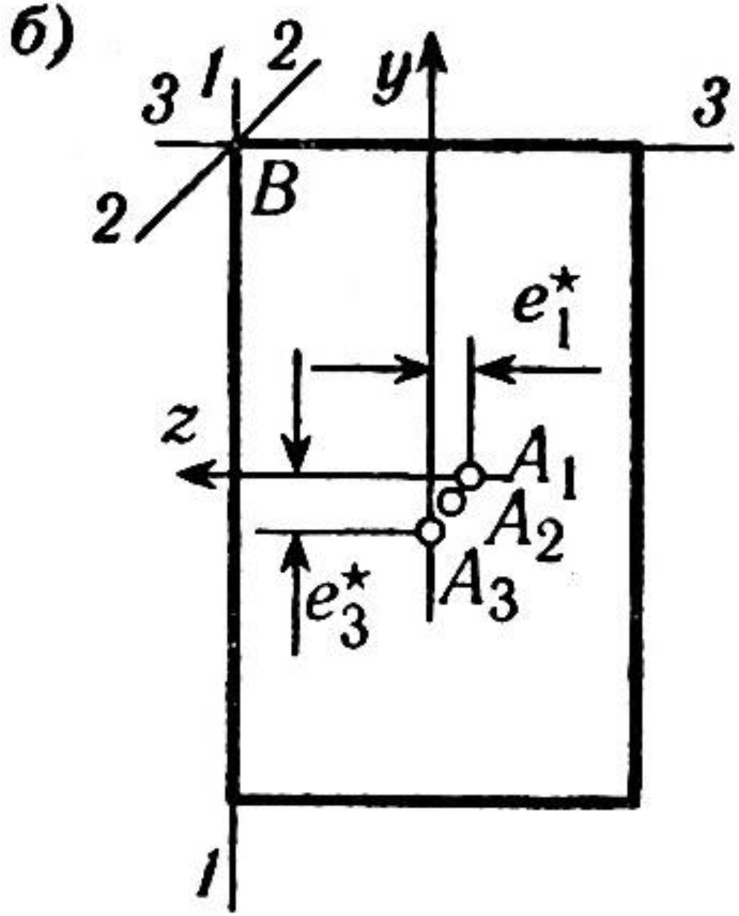
Круговое сечение



$$e^* = \frac{W}{A} = \left(\frac{1}{4}\pi R^3\right)/(\pi R^2) = \frac{R}{4}$$

A_1, A_2, A_3 - точки приложения продольной силы в случае, когда нейтральная линия «обкатывается» по внешнему контуру сечения, занимая положения 1-1, 2-2, 3-3.

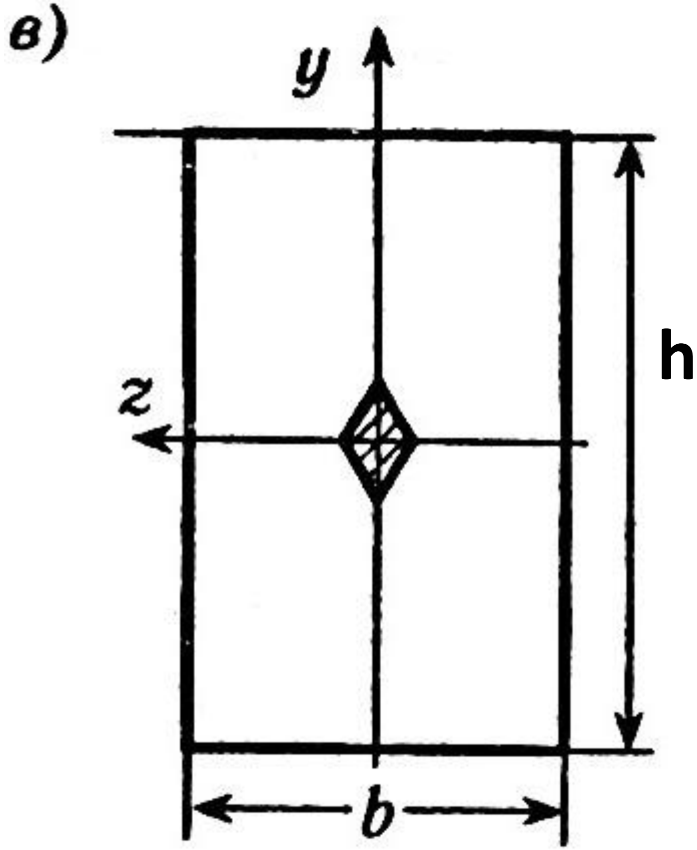
Прямоугольное сечение



$$e_1{}^* = \frac{W_\gamma}{A} = \left(\frac{1}{6}hb^2\right)/(hb) = \frac{b}{6}$$

$$e_3{}^* = \frac{W\mathrm{z}}{A} = \left(\frac{1}{6}bh^2\right)/(hb) = \frac{h}{6}$$

При перемещении точки приложения продольной силы A_1, A_2, A_3 нейтральная линия «поворачивается» вокруг точки *B*, занимая положения 1-1, 2-2, 3-3.



Ядро сечения для прямоугольника имеет форму ромба.

$$z_B, y_B \rightarrow (1) \Rightarrow$$

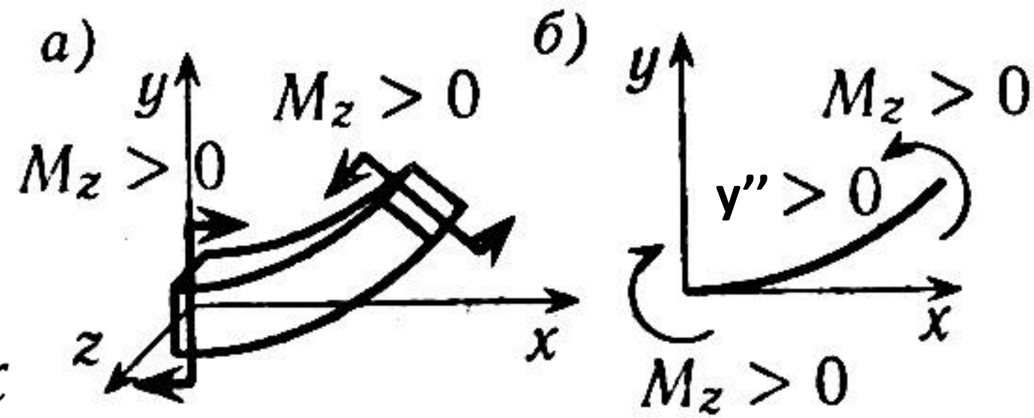
$$0 = \frac{1}{A} + \frac{z_F}{I_y} z_B + \frac{y_F}{I_z} y_B \quad (2)$$

$z_B = const, y_B = const \Rightarrow$

(2) –уравнение прямой.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

- Перемещения в главных плоскостях взаимно независимы. Для плоскости xy было получено ранее:

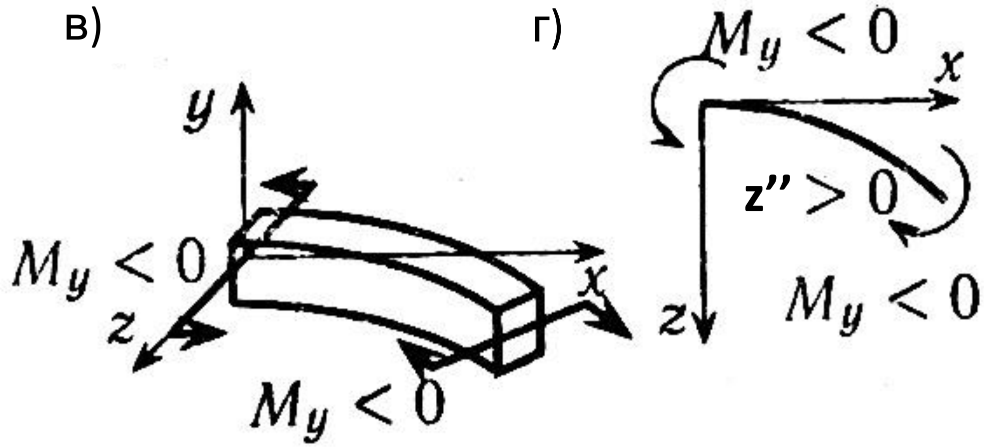


$$EI_z y'' = M_z$$

$$EI_z y' = C_z + \int M_z dx$$

$$EI_z y = D_z + C_z x + \int\left(\int M_z dx\right)dx$$

• Сопоставляя схемы, приведённые на рис. *в* и *г*, получаем для плоскости *xz*



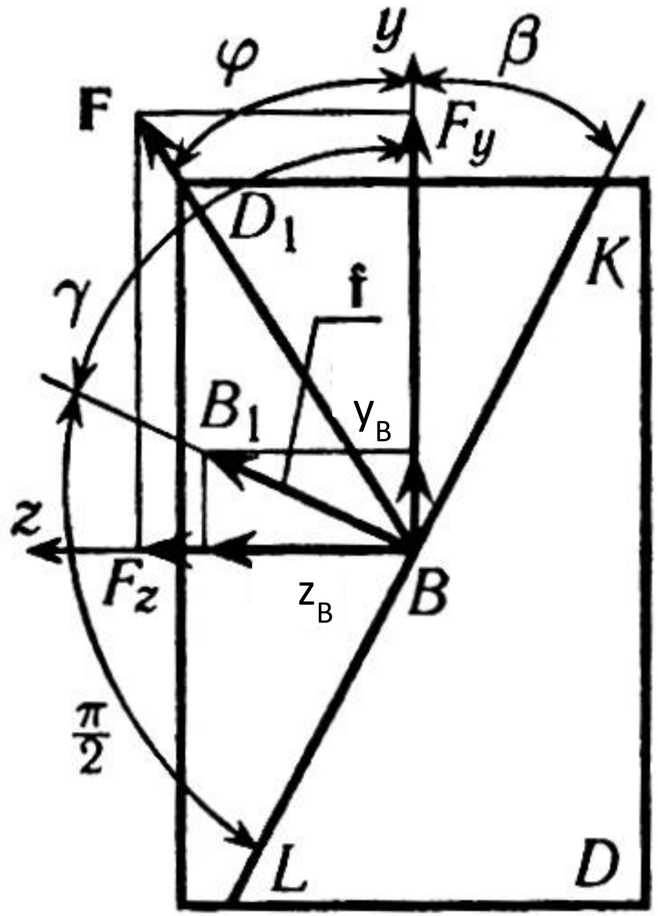
$$EI_y z'' = -M_y$$

$$EI_y z' = C_y - \int M_y dx$$

$$EI_y z = D_y + C_y x - \int\left(\int M_y dx\right)dx$$

В общем случае $C_y \neq C_z$, $D_y \neq D_z$.

Пример. Косой изгиб



- y_B и z_B свободного конца:

$$y_B = \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3 \cos\varphi}{3EI_z}$$

$$z_B = \frac{F_z l^3}{3EI_y} = \frac{Fl^3 \sin\varphi}{3EI_y}$$

$$f = \sqrt{{y_B}^2 + {z_B}^2}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{z_B}{y_B} = \frac{I_z F_z l}{I_y F_y l} = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

Внутренние усилия в заделке балки:

$$N = 0,\ M_y = -F_z l = Fl\sin\varphi,\ M_Z = F_Y l = Fl\cos\varphi$$

Уравнение для нормальных напряжений:

$$\sigma = -\frac{Fl}{I_y} z\sin\varphi - \frac{Fl}{I_z} y\cos\varphi$$

Условие прочности:

$$\sigma_D = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \le [\sigma]$$

- $$\sigma_D = \frac{Fl}{W_y}\sin\varphi + \frac{Fl}{W_z}\cos\varphi = \frac{Fl}{W_z}\left(\frac{W_z}{W_y}\sin\varphi + \cos\varphi\right) \le [\sigma]$$

Двутавровая балка

При $\varphi = 0°$ $\quad \sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} \le [\sigma]$

При $\varphi = 6°$ $\quad \cos\varphi \approx 1{,}0$, $\sin\varphi \approx 0{,}1$.

Для оценочного расчета примем $\frac{W_z}{W_y} \approx 10{,}0$.

$$\sigma_{max} = \frac{2M_z}{W_z} \le [\sigma]$$

Небольшая неаккуратность в установке двутавра под нагрузку приводит к существенному увеличению напряжений.

Спасибо за внимание!

- $(\cdot)A \qquad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{I_u} v_{max}$

$$v_{max} = r \,,\ I_u = \frac{\pi r^4}{4} \ ,\mathrm{A} = \pi r^2$$

$$\sigma = \left|\frac{N}{\pi r^2}\right| + \left|\frac{4M_y}{\pi r^3}\right|$$

$$\tau_A = \tau_{max} = \left|\frac{2M_x}{\pi R^3}\right|$$

$$\sqrt{\sigma_A{}^2 + 4\tau_A{}^2} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\sigma_A{}^2 + 3\tau_A{}^2} \leq [\sigma]$$

- Если $N = 0$, то

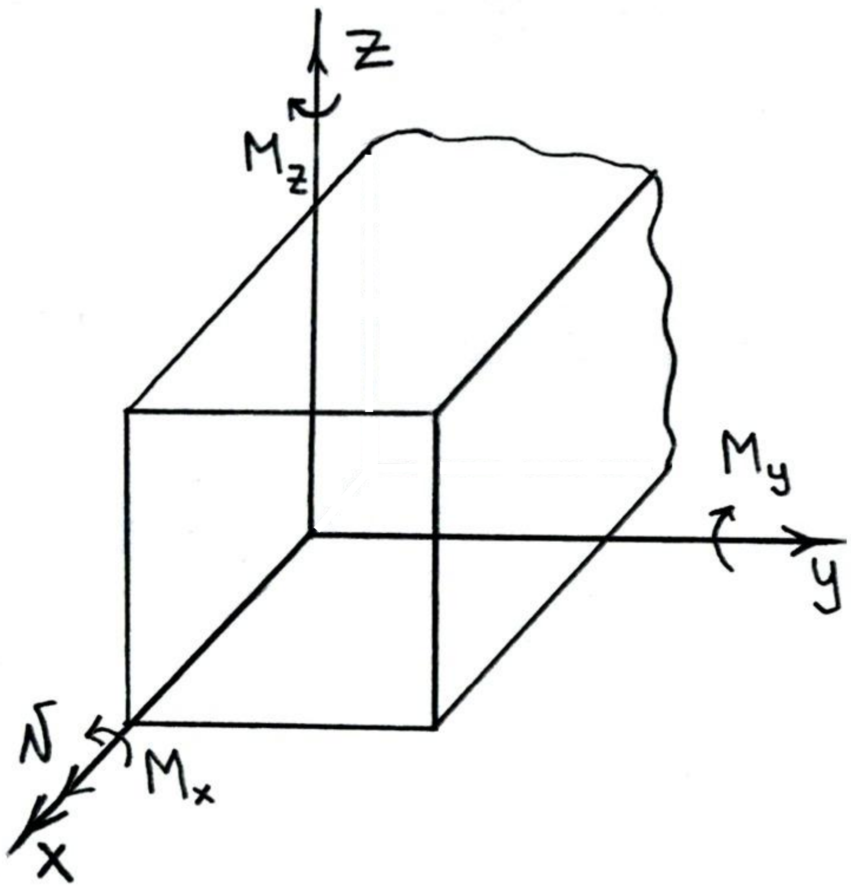
$$\sigma_{max} = 4\frac{\sqrt{{M_y}^2+{M_z}^2}}{\pi R^3}$$

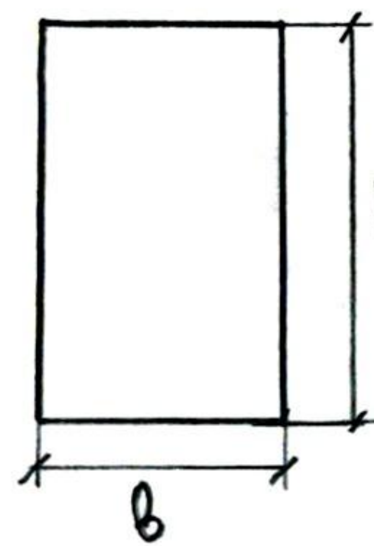
$$\tau_{max} = \frac{2M_x}{\pi R^3}$$

$$\sqrt{{\sigma_{max}}^2 + 4{\tau_{max}}^2} = \sqrt{\frac{{M_y}^2+{M_z}^2}{\left(\frac{\pi R^3}{4}\right)^2} + \frac{4{M_x}^2}{\left(\frac{\pi R^3}{2}\right)^2}} =$$

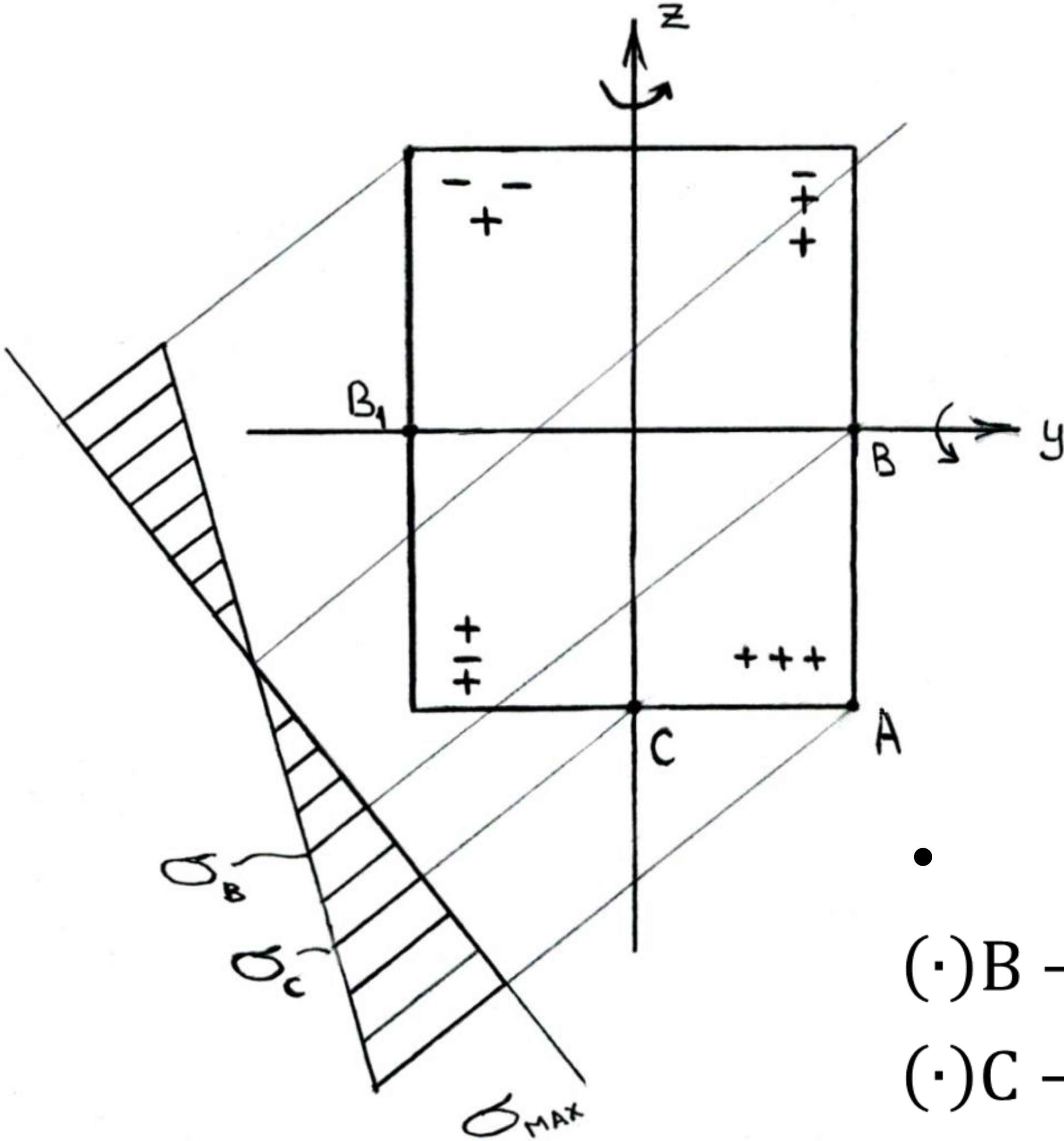
$$= \frac{\sqrt{{M_x}^2+{M_y}^2+{M_z}^2}}{\frac{\pi R^3}{4}} \leq [\sigma]$$

Проверка прочности при одновременном растяжении, кручении и изгибе





$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$



- $(\cdot)A - \ \sigma_{max}$

$(\cdot)B - \ \tau_{B\_max}$ и σ_B

$(\cdot)C - \ \tau'_{C\_max}$ и σ_C

1. (·)A

$$|\sigma| = |\sigma|_{max} = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_y}{I_y} z_{max}\right| + \left|\frac{M_z}{I_z} y_{max}\right| \quad (13)$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}, W_y = \frac{bh^2}{6}, \text{ A} = bh, W_z = \frac{I_z}{y_{max}}, (14)$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6}$$

Условие прочности:

$$\left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_y}{I_y} z_{max}\right| + \left|\frac{M_z}{I_z} y_{max}\right| \le [\sigma] \qquad (15)$$

2. $(\cdot)B$

$$\sigma_B = \left|\frac{N}{bh}\right| + \left|\frac{6M_z}{hb^2}\right| \tag{16}$$

τ_B по таблицам $\tau_B = \frac{M_K}{\beta b^3}$, где $\beta = f\left(\frac{h}{b}\right)$ (17)

$$\beta < 1$$

$\sqrt{\sigma_B{}^2 + 4\tau_B{}^2} \leq [\sigma]$ по теории τ_{max} (18)

$\sqrt{\sigma_B{}^2 + 3\tau_B{}^2} \leq [\sigma]$ по энергетической теории (19)

3) $(\cdot)C$

$$\sigma_{C} = \left|\frac{N}{bh}\right| + \left|\frac{6M_y}{bh^2}\right| \tag{20}$$

$$\tau_{C} = \frac{M_K}{\beta b^3}\gamma \tag{21}$$

$$\sqrt{\sigma_C{}^2 + 4\tau_C{}^2} \leq [\sigma] \tag{22}$$

- $$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$$

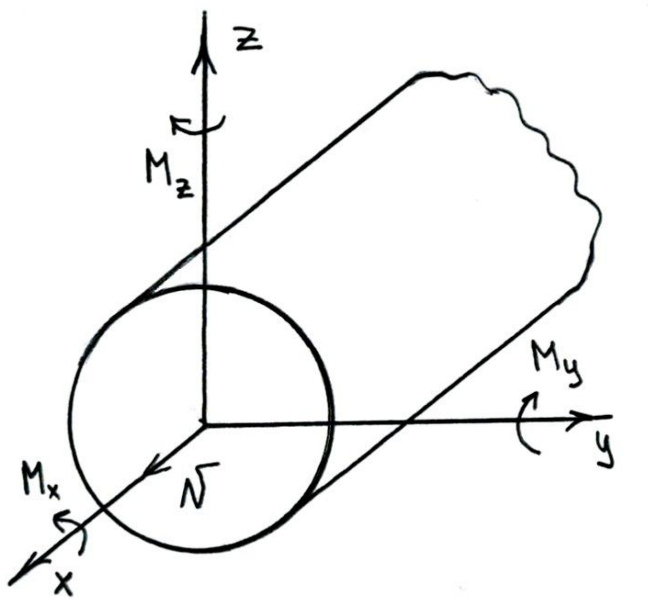
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)^2 + (\sigma^2 + 4\tau^2) + \frac{1}{4}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\begin{array}{c}\frac{1}{4}\left(\sigma^2 + 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \sigma^2 + 4\tau^2\right) + (\sigma^2 + 4\tau^2) + \\ + \frac{1}{4}\left(\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \sigma^2 + 6\tau^2\right)\end{array}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sigma^2 + 6\tau^2}$$

Круглый стержень



$$\sigma = \frac{N}{\mathrm{A}} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = \frac{N}{\mathrm{A}} - \frac{M_u}{I_u} v$$

$$I_y = I_z = I_u = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$M_u = \sqrt{{M_y}^2 + {M_z}^2}$$

Косой изгиб

Из конспекта!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

- $$M_u = \frac{qx^2}{2}$$

Разложим по осям *z* и *y*:

$$M_y = \frac{qx^2}{2}\cos\alpha$$

$$M_z = -\frac{qx^2}{2}\sin\alpha$$

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

$$z > 0\,,\;\; y > 0$$

- $$\sigma = \frac{qx^2}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{I_y}z + \frac{\sin\alpha}{I_z}y\right)$$

Для нейтральной линии:

$$\frac{\cos\alpha}{I_y}z + \frac{\sin\alpha}{I_z}y = 0$$

$$\frac{z_0}{y_0} = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

$$|\operatorname{tg}\varphi| = |\operatorname{tg}\alpha| \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

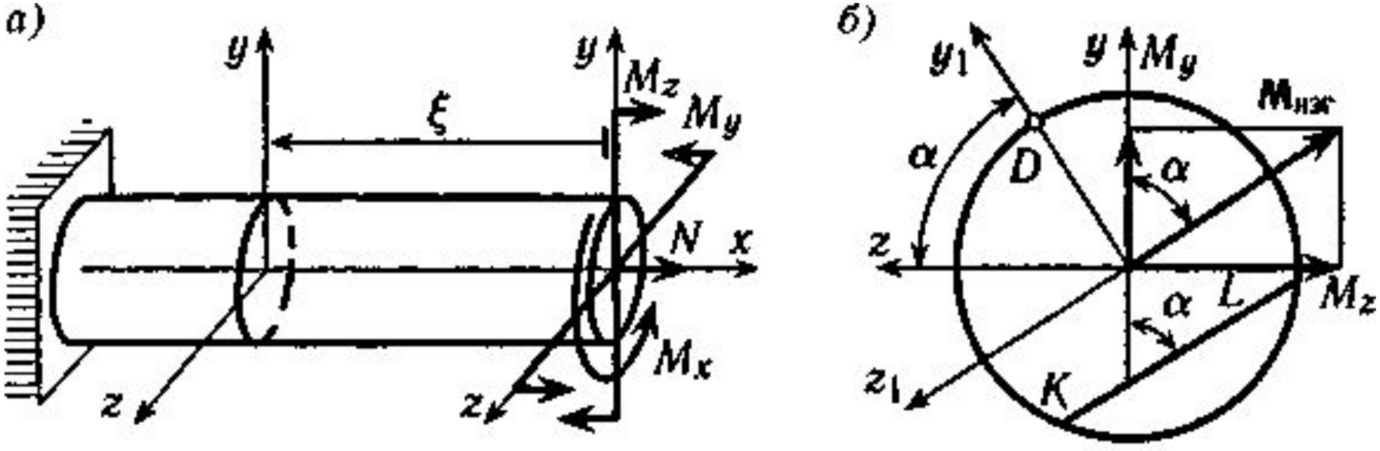


Рис. 12.11

$$tg\alpha = \frac{M_z}{M_y} \qquad I_y = I_z = I$$

$$\sigma_{\text{экв}} = 2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_D^2 + 4\tau_D^2}$$

$$M_{y_1} = 0 \qquad M_{z_1} = M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_p}\right)^2}$$

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_{z_1}}{W} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}$$

$$\sigma_{\text{экв}} \le [\sigma]$$

$$\tau_D = \frac{M_x}{W_p}$$