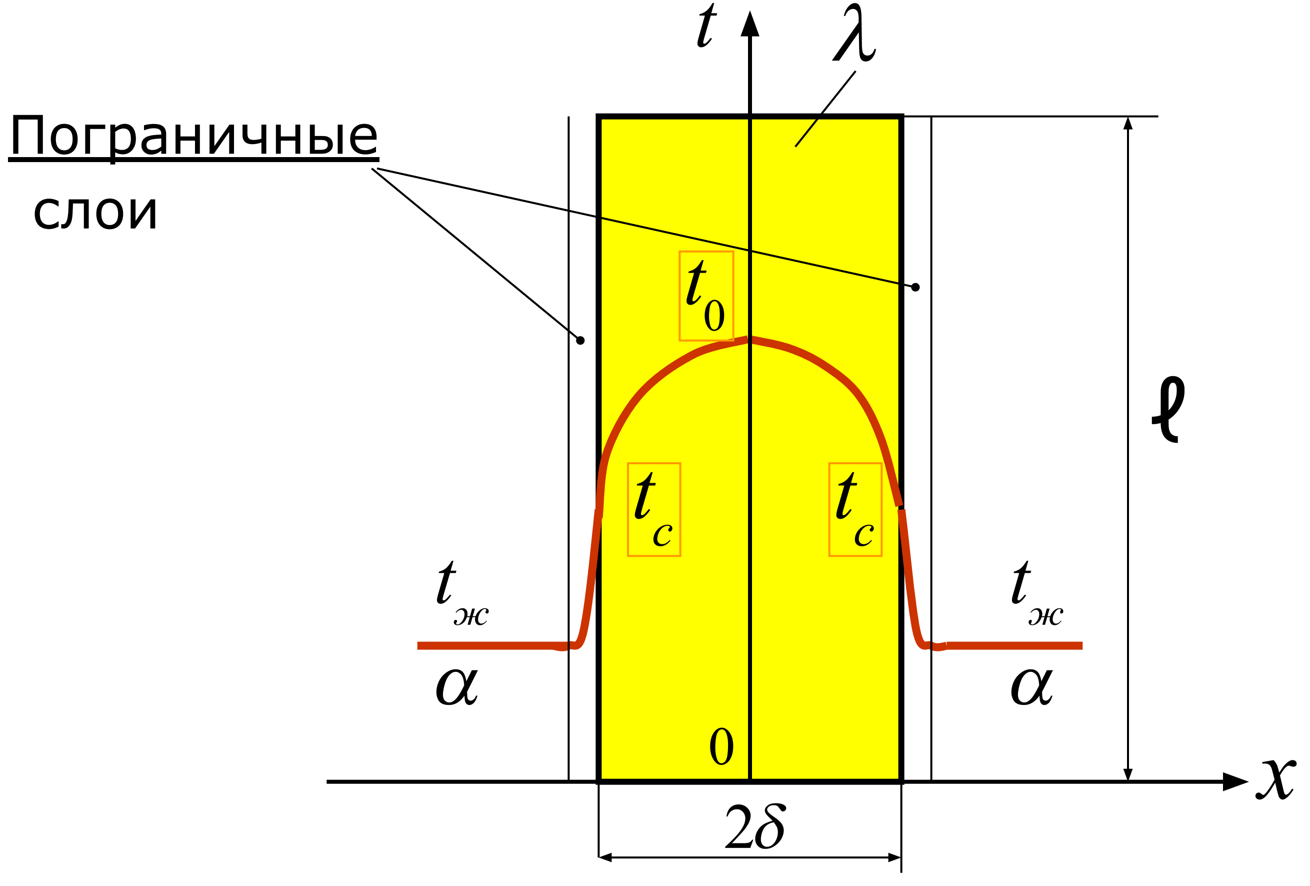
Тепломассообмен 5

Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

А) Однородная пластина



Дифференциальное уравнение теплопроводности

При $\ell >> \delta$: бесконечная пластина.

В стационарном процессе: $q_{жс} = Const; \alpha = Const; t \quad = Const.$

Найти: $t = f(x) = ?; t_0 = ?; t_c = ?$

Дифференциальное уравнение теплопроводности: $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \dfrac{q_v}{c\rho}$, (1)

Для стационарного процесса: $(\partial t / \partial \tau) = 0$

тогда $a\nabla^2 t + \dfrac{q_v}{c\rho} = 0,$ (2) где $\nabla^2 t = \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2} \to$

оператор Лапласа, тогда после деления (2) на $a = \lambda / (c\rho)$ дифференциальное уравнение теплопроводности

в бесконечной пластине: $\boxed{\ell >> \delta \to \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0,}$ (3) $\dfrac{d^2 t}{dx^2} + \dfrac{q_v}{\lambda} = 0.$

Граничные условия

Условия теплоотдачи одинаковы с обеих сторон пластины, поэтому температурное поле симметричное, а тепловыделения в обеих половинах пластины одинаковы, то есть можно рассматривать только ее правую половину. Тогда граничные условия будут:

$$x=0 \rightarrow \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0}=0; \quad (4)$$

$$x=\delta \rightarrow -\lambda\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta}=\alpha(t_c-t). \quad (5)$$

Интегрируем (3): $\frac{dt}{dx}=-\frac{q_v}{\lambda}x+c_1,$

разделяем переменные: $dt=-\frac{q_v}{\lambda}xdx+c_1dx.$

После второго интегрирования имеем уравнение параболы:

$$t=-\frac{q_v}{2\lambda}x^2+c_1x+c_2 \quad (6)$$

Константы интегрирования

Константы интегрирования находятся из граничных условий (4) и уравнения (5) при:

$$x=0 \rightarrow c_1 = \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (7)$$

$$x=\delta \rightarrow \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{q_v}{\lambda}\delta \quad (8)$$

Подставляем (8) в (4):

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\delta} = \boxed{-\frac{q_v}{\lambda}\delta = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_{ж} - t).} \quad (9)$$

После сокращения на λ имеем: $t_{ж} = t + \frac{q_v\delta}{\alpha}$ (10)

Подставляем (10) в (6) при $x=\delta$ и с учетом, что $\boxed{c_1 = 0:}$ получаем:

$$t = t_c = -\frac{q_v\delta^2}{2\lambda} + c_2. \quad (11)$$

Приравнивая (10) и (11), имеем: $\frac{q_v\delta}{\alpha} + t_{ж} = -\frac{q_v\delta^2}{2\lambda} + c_2,$, откуда:

$$\boxed{c_2 = t_{ж} + \frac{q_v\delta}{\alpha} + \frac{q_v\delta^2}{2\lambda}.} \quad (12)$$

Тепловой поток и температуры

Подставим константы интегрирования (7) и (12) в (6):

$$t = t_{ж} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda}(\delta^2 - x^2), \quad (13)$$

уравнение параболы.

Тепловой поток, отдаваемый от правой половины пластины:

$$Q = q_v V/2 = q_v \delta f = qf, \quad (14)$$

то есть:

$$q = q_v \delta, Вт/м^2.$$

Если температура стенки известна или вычислена

уравнению (10), то есть заданы граничные условия I рода:

$$t = t_c + \frac{q_v}{2\lambda}(\delta^2 - x^2), \quad (15)$$

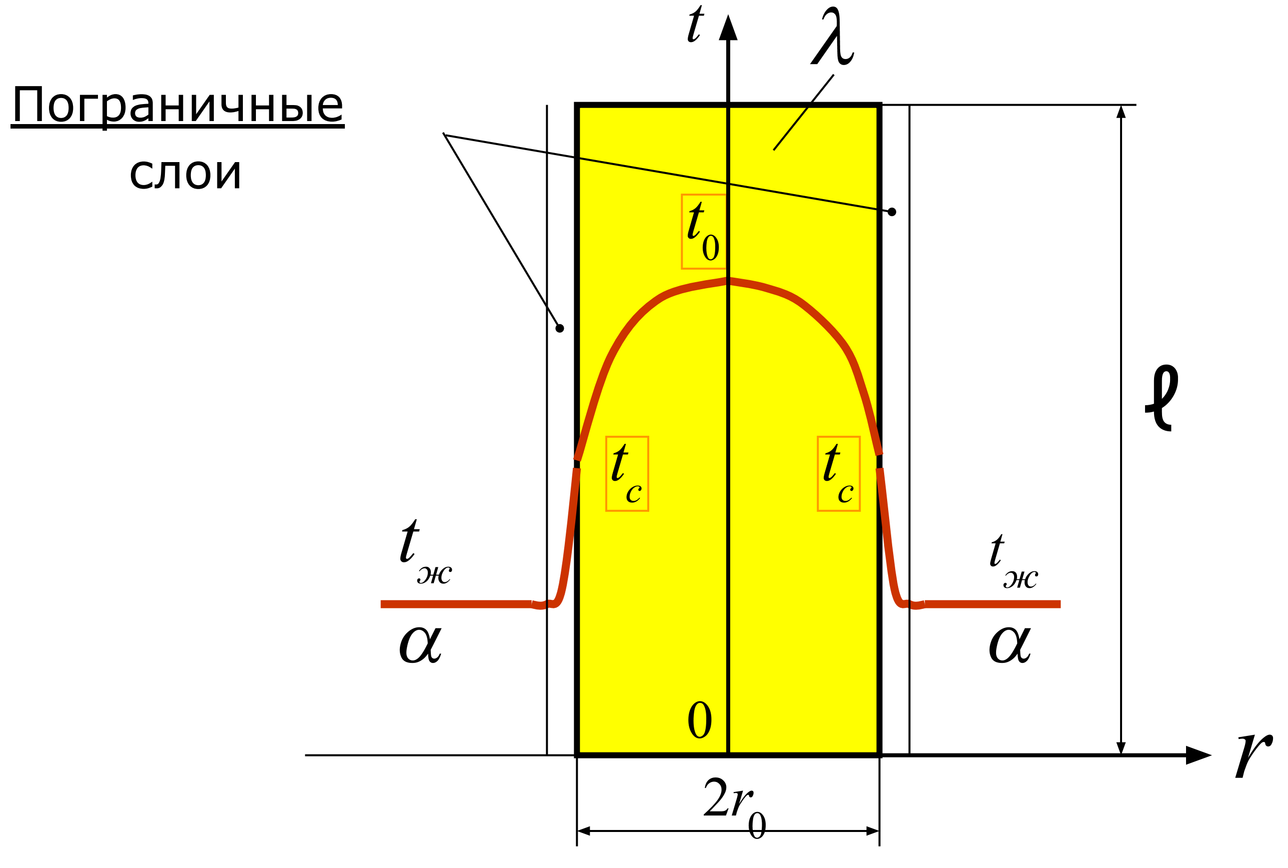
тогда при

$$x = 0:$$

$$t = t_0 = t_c + \frac{q_v}{2\lambda}\delta^2 = t_c + \frac{q\delta}{2\lambda} \quad (16)$$

-температура в центре.

Однородный цилиндр



Дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра

Для бесконечного цилиндрического стержня $\ell >> 2r_0$

При стационарном режиме $q_{ж} = Const; \alpha = Const; t \quad = Const.$

Найти $t = f(r); t_0; t_c!$

Условия теплоотдачи со всех сторон одинаковы (симметричная задача), то есть можно рассматривать только правую половину цилиндра. Дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1)$$

Для стационарного процесса:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0,$$

тогда:

$$a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} = 0, \quad (2)$$

где оператор Лапласа в полярных (цилиндрических) координатах:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Граничные условия

В бесконечном цилиндре температура изменяется только по по радиусу, то есть: $\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0,$ после деления (2) на: $a = \frac{\lambda}{c\rho}$

получим дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндра при стационарном режиме:

$$\boxed{\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.} \quad (4)$$

Граничные условия: при

$$r = 0 \to \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=0} = 0; \quad (5)$$

$$r = r_0 \to \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_c - t \quad).$$

Найти: $t = f(r); t_0 : t_c!$

После двойного интегрирования (4) имеем:

$$t = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + c_1 \ln r + c_2. \quad (6)$$

Конвективная теплоотдача от цилиндра к жидкости

Определив константы интегрирования и подставив их в (6), имеем:

$$t = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v (r_0^2 - r^2)}{4\lambda}. \quad (7)$$

– это уравнение параболы.

Температура на оси цилиндра находится при $r = 0$:

$$\boxed{t = t_0 = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}.} \quad (8)$$

и на стенке цилиндра – при $r = r_0$:

$$\boxed{t = t_{с} = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha}.} \quad (9)$$

Если заданы граничные условия I рода, то есть известна t_c, тогда:

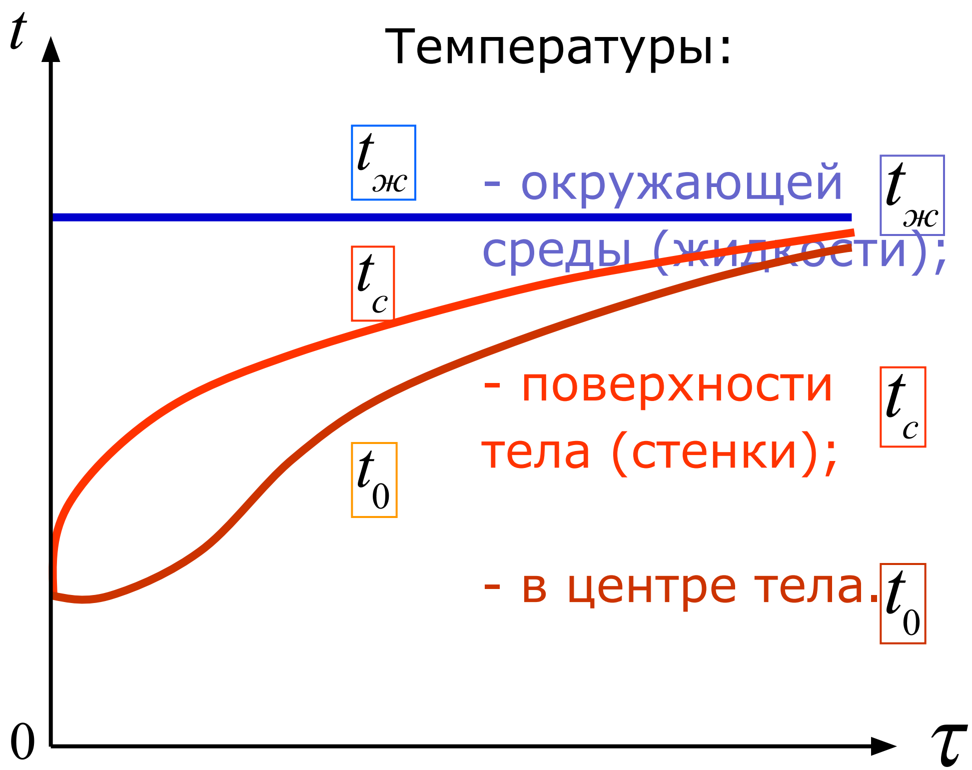
$$t = t_c + \frac{q_v}{4\lambda}(r_0^2 - r^2). \quad (10)$$

Удельный тепловой поток, Вт/м² находится из (9) и теплота, отданная от цилиндра к окружающей его жидкости, Вт:

$$q = \alpha(t_{с} - t_{ж}) = \frac{q_v r_0}{2}. \quad (11)$$

$$Q = qF = \frac{q_v r_0}{2} 2\pi r_0 \ell = q_v \pi r_0^2 \ell. \quad (12)$$

Нестационарная теплопроводность



Температуры:

- окружающей среды (жидкости); $t_{ж}$

- поверхности тела (стенки); $t_{с}$

- в центре тела. t_{0}

Дифференциальное уравнение теплопроводности

Нестационарная теплопроводность имеет место при нагревании и охлаждении заготовок, пуске и отключении теплоэнергетических установок, обжиге кирпича, вулканизации резины. На слайде показан нагрев твердого тела в среде с температурой $t_{ж} = Const$.

Процесс описывается дифференциальным уравнением теплопроводности без внутренних источников теплоты $q_v = 0$.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

Условия однозначности:

● геометрические; ● физические;

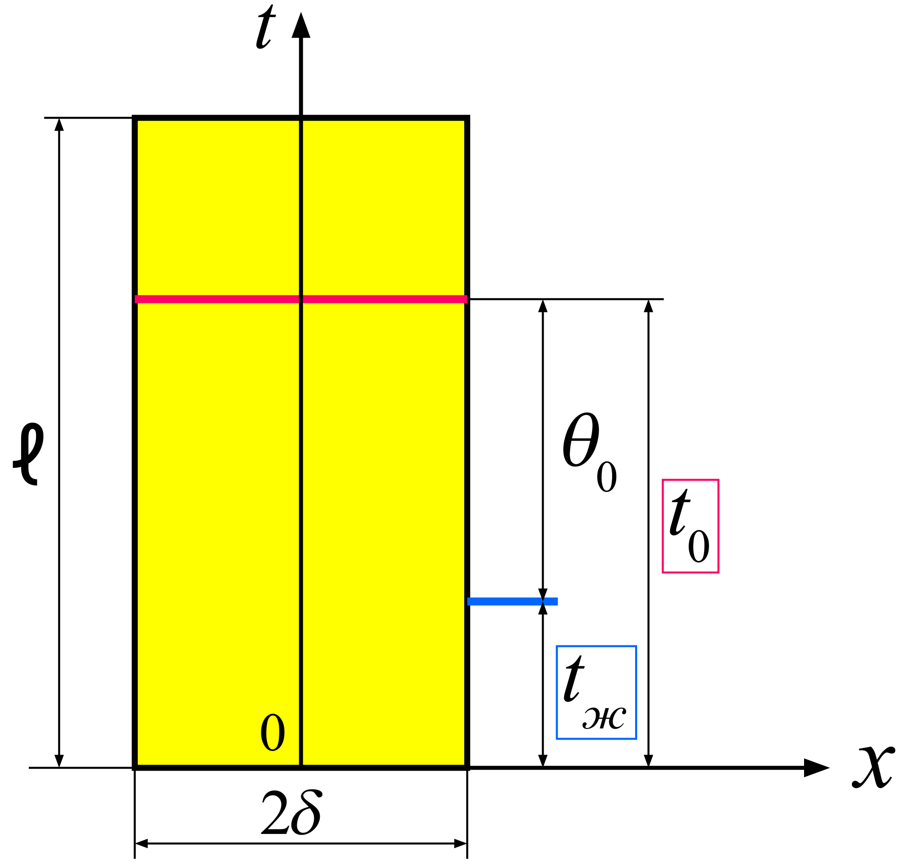
● начальные: при $\tau = 0 \rightarrow t = t_0 = f(x, y, z);$

● граничные условия III рода: $\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_{n=0} - t_{ж}).$

Решение заключается в нахождении функции:

$$t = f(x, y, z, \tau, \alpha, \lambda, a, t_0, t_{ж}, \ell).$$

Охлаждение пластины



Начальные и граничные условия

Рассматриваем охлаждение (нагревание) пластины при:

$$\alpha = Const; t_{ж} = Const; \quad при: \tau = 0 \rightarrow t = t_0 = Const.$$

Подставляем избыточную температуру пластины $\theta = t - t_{ж}$

в дифференциальное уравнение (1) и граничные условия.

Для бесконечной пластины $\ell >> 2\delta$: $(\partial t / \partial y) = (\partial t / \partial z) = 0$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Начальные условия: при

$$\boxed{\tau = 0 \rightarrow \theta = \theta_0 = t_0 - t_{ж}.} \quad (3)$$

При $\alpha = Const$: симметричная задача, тогда граничные условия III рода:

$$При: x = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0;$$

$$x = \delta \rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta_{x=\delta}. \quad (4)$$

Разделение переменных

Решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде: произведения двух функций, из которых одна является только функцией времени τ , другая – только функцией *x*.

$$\theta = f(\tau, x) = \varphi(\tau)\psi(x). \quad (5)$$

Подставляем (5) в (2):

$$\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\psi(x) = a\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\varphi(\tau),$$

или:

$$\varphi'(\tau)\psi(x) = a\psi''(x)\varphi(\tau).$$

Разделим переменные:

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}. \quad (6)$$

Так как левая часть уравнения (6) является только функцией τ , а правая – только *x*, то равенство (6) имеет место при любых их значениях. Тогда левая и правая части этого уравнения равны константе. Пусть это будет $\boxed{-k^2.}$

Решение в общем виде

$$\frac{1}{a}\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}=\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}=-k^2,$$ то есть

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}+ak^2=0; \quad (7)\\ \psi''(x)+k^2\psi(x)=0.\end{array}}$$ (8)

Получилась система дифференциальных уравнений (7) и (8), которой удовлетворяют соответственно функции:

$$\varphi(\tau)=c_1e^{-ak^2\tau} \qquad \psi(x)=c_2\sin(kx)+c_3\cos(kx)$$

Подставляя их в (5), получим:

(9)

$$\theta=[c_2\sin(kx)+c_3\cos(kx)]c_1e^{-ak^2\tau}.$$

При граничных условиях на оси: $x=0\rightarrow\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=0}=0:$

производная от (9): $\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=0}=c_1e^{-ak^2\tau}k[c_2\cos(kx)-c_3\sin(kx)]=0,$

Константы интегрирования

Так как $c_1 e^{-ak^2\tau} \neq 0$, то $[c_2\cos(kx) - c_3\sin(kx)] = 0$,

или: $c_2\cos 0 = c_3\sin 0$. При: $\sin 0 = 0$, $c_3 \neq 0$;

а при $\cos 0 \neq 0$, $\boxed{c_2 = 0.}$

Таким образом, решение $\psi(x) = c_2\sin(kx)$ надо отбросить, как не удовлетворяющее граничным условиям.

Тогда при $\boxed{c_2 = 0; c_1 c_3 = A}$ уравнение (9) запишется в виде:

$$\theta = Ae^{-ak^2\tau}\cos(kx), \qquad (10)$$

или с учетом граничных условий на поверхности: $x = \delta \to \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda}\theta_{x=\delta} \to$

Аналитическое решение

то есть $-kAe^{-ak^2\tau}\sin(k\delta) = -\dfrac{\alpha}{\lambda}Ae^{-ak^2\tau}\cos(k\delta).$ (11)

После сокращения на $Ae^{-ak^2\tau}$: $k\sin(k\delta) = \dfrac{\alpha}{\lambda}\cos(k\delta),$

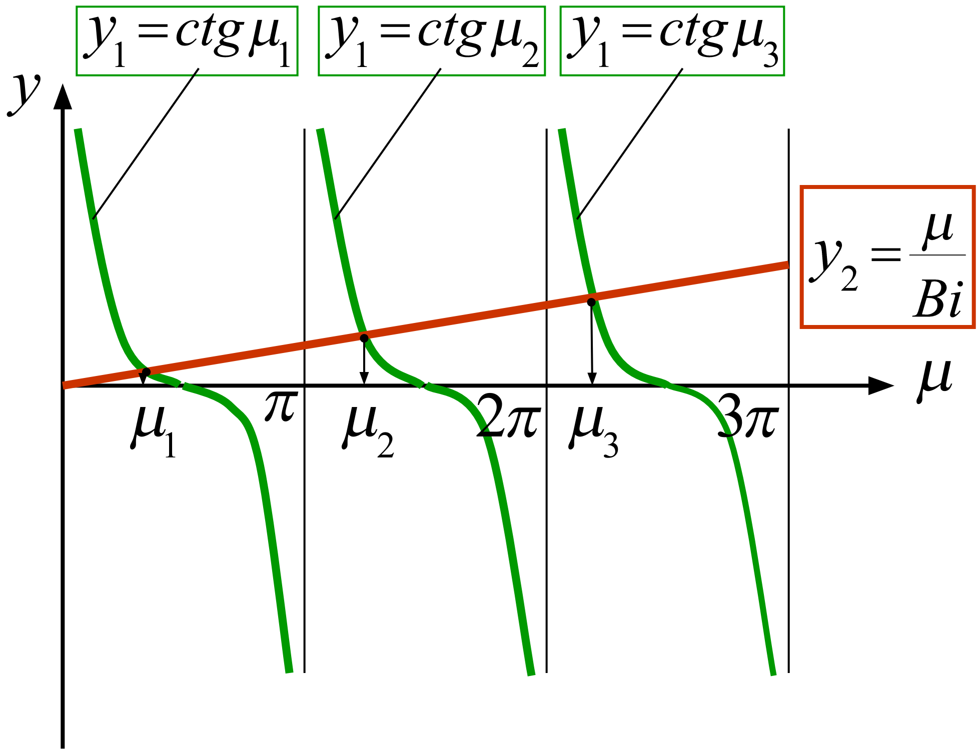
или: $ctg(k\delta) = \dfrac{k\lambda}{\alpha} = \dfrac{k\delta}{\dfrac{\alpha\delta}{\lambda}}.$ Здесь $\boxed{\dfrac{\alpha\delta}{\lambda} = Bi \rightarrow}$ число (критерий)

Био – соотношение конвективной теплоотдачи снаружи и теплопроводности внутри тела.

Обозначив $k\delta = \mu,$ получим: $ctg\,\mu = \dfrac{\mu}{Bi}.$ (12)

Уравнение (12) можно решить графически (см. следующий слайд).

Графическое решение уравнения охлаждения (нагревания) пластины



Результаты графического решения

При $Bi \to \infty : y_2 = \frac{\mu}{Bi} = 0,$ то есть функция y_2 совпадает с осью абсцисс, то есть: $\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \mu_2 = \frac{3}{2}\pi; \mu_3 = \frac{5}{2}\pi; \ldots \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$

При $Bi \to 0 : y_2 = \frac{\mu}{Bi} = \infty,$ то есть функция y_2 совпадает с осью ординат, при этом: $\mu_1 = 0; \mu_2 = \pi; \mu_3 = 2\pi; \ldots \mu_n = (n-1)\pi.$

Каждому μ_i соответствует свое частное распределение избыточных температур θ_i, которое не является решением дифференциального уравнения (2).

Решение можно представить в виде суммы ряда $\boxed{\theta = \sum_1^n \theta_i,}$ где достаточно иметь *n* = 4 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ значения которых при *Bi* = 0 - ∞ приведены в таблице на следующем слайде.

Значения μ_i для пластины

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
∞	1,571	4,712	7,854	11.00
2,747	1,169	3,771	6,674	9,701
1,000	0,8603	3,426	6,437	9,529
0,3640	0,5885	3,253	6,341	9,463
0,0000	0,0000	3,142	6,283	9,425

Условия на оси пластины

В безразмерном виде: $\Theta = \frac{\theta}{\theta_0}; X = \frac{x}{\delta}; Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \rightarrow$

здесь число *Fo* (критерий) Фурье – безразмерное время.

Для $Fo \geq 0{,}3$, с достаточной точностью, можно ограничиться только первым членом ряда μ_1: , тогда:

(13)

$$\Theta = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}\cos(\mu_1 X)\exp(-\mu_1^2 Fo).$$

Пусть $\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1} = D_{1,}$ тогда:

(14)

$$\boxed{\Theta = D_1\cos(\mu_1 X)\exp(-\mu_1^2 Fo).}$$

На оси пластины $X = \frac{x}{\delta} = 0; \cos 0 = 1,$ обозначим $D_1\cos 0 = N(Bi).$

Итак, безразмерный избыток температуры на оси пластины:

(15)

$$\boxed{\Theta_{X=0} = N(Bi)\exp(-\mu_1^2 Fo).}$$

Условия на поверхности пластины

На поверхности пластины: $X = \frac{x}{\delta} = 1; \cos(\mu_1 X) = \cos\mu_1.$

Введем обозначение $D_1 \cos\mu_1 = P(Bi),$ тогда:

(16)

$$\boxed{\Theta_{X=1} = P(Bi)\exp(-\mu_1^2 Fo).}$$

Функции $N(Bi), P(Bi)$ табулированы и могут быть взяты из справочника. Логарифмируя (15), получим:

(17)

$$\ell n(\Theta)_{X=0} = \ell n N(Bi) - \mu_1^2 Fo,$$

то есть в логарифмических координатах эта зависимость прямолинейна.

То же самое для уравнения (16). Решения для уравнений (15) и (16) могут быть найдены графически.

Графические решения

На оси пластины: $\Theta_{X=0} = \dfrac{t_{x=0} - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$ (18)

На поверхности пластины: $\Theta_{X=1} = \dfrac{t_{x=\delta} - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$ (19)

Точные графики для оси пластины (*X* = 0) и для ее поверхности (*X* = 1) есть в учебнике Исаченко, В.П. «Теплопередача».

По этим графикам находятся сначала избыточные температуры $\Theta_{X=0}; \Theta_{X=1}$ на оси и на поверхности в К, после чего по уравнениям (18) и (19) соответственно определяются сами температуры пластины $t_{x=0}; t_{x=\delta}$ в °*C*.

На следующем слайде показан вид такого графика.

График логарифмический

$$\Theta = f(Bi, Fo)$$