Тема 2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

2.1. Силовые линии электростатического поля

- Теорема Остроградского-Гаусса, которую мы докажем и обсудим позже, устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона.

- **Остроградский Михаил Васильевич** (1801 – 1862)
- отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827).
- Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики. Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.). Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях. Известен теоремой Остроградского-Гаусса в электростатике (1828 г.).

Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855) *немецкий математик, астроном и физик.*

Исследования посвящены многим разделам физики.

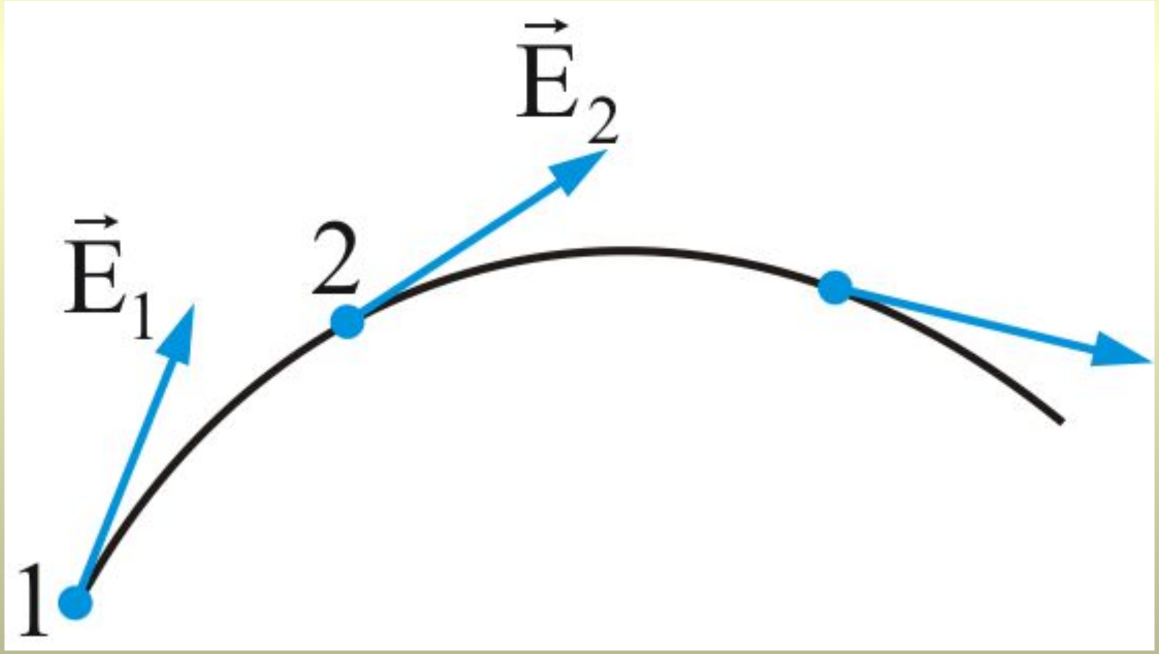
В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

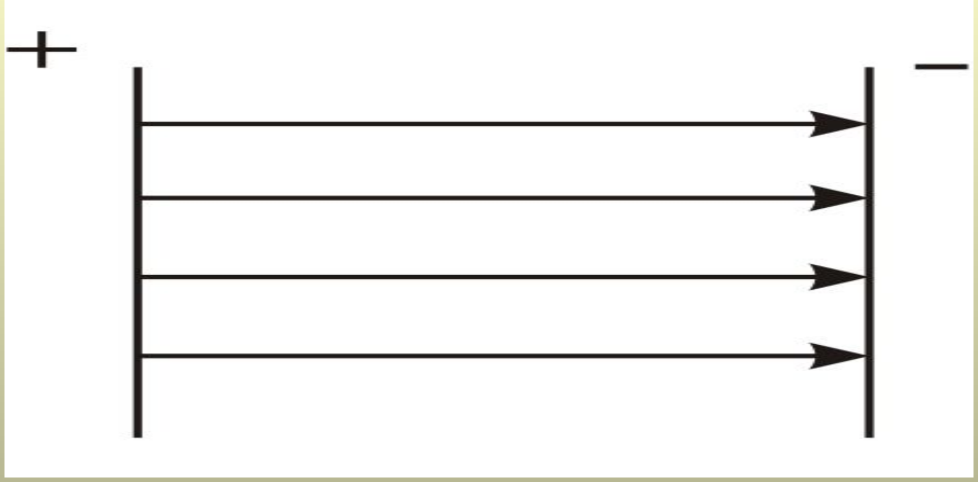
- Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный. В 1829 г.
- Сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).
- Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

- Основная ценность теоремы Остроградского-Гаусса состоит в том, что она позволяет *глубже понять природу электростатического поля и устанавливает* более общую *связь между зарядом и полем.*

• ***силовые линии*** *– это линии, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности*



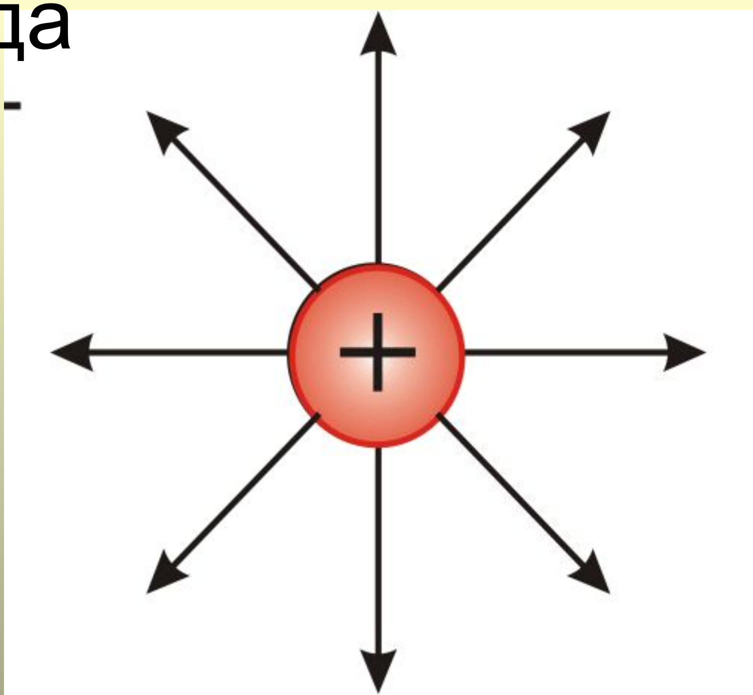
- **Однородным** *называется электростатическое* ***поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению.***
- Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга

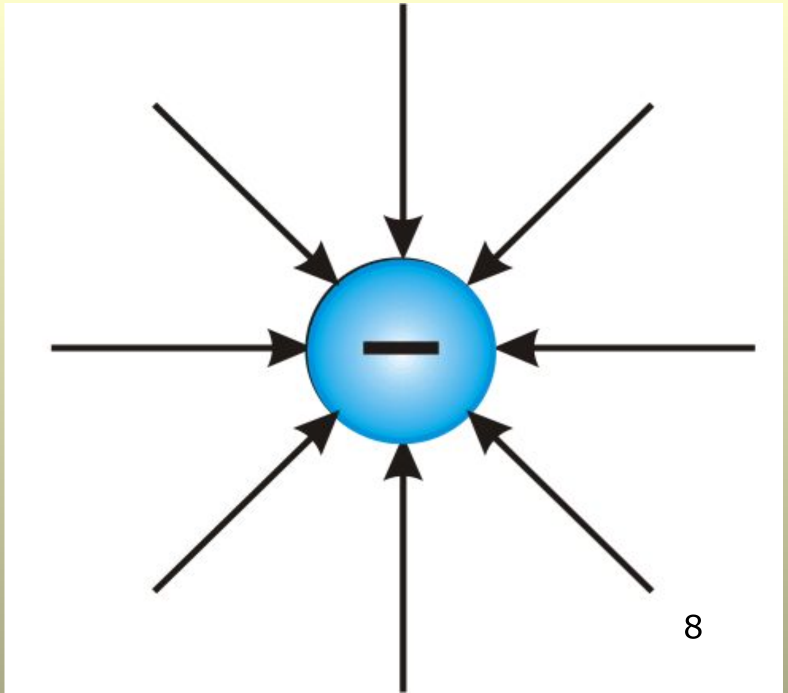


В случае точечного заряда поле неоднородно, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд.

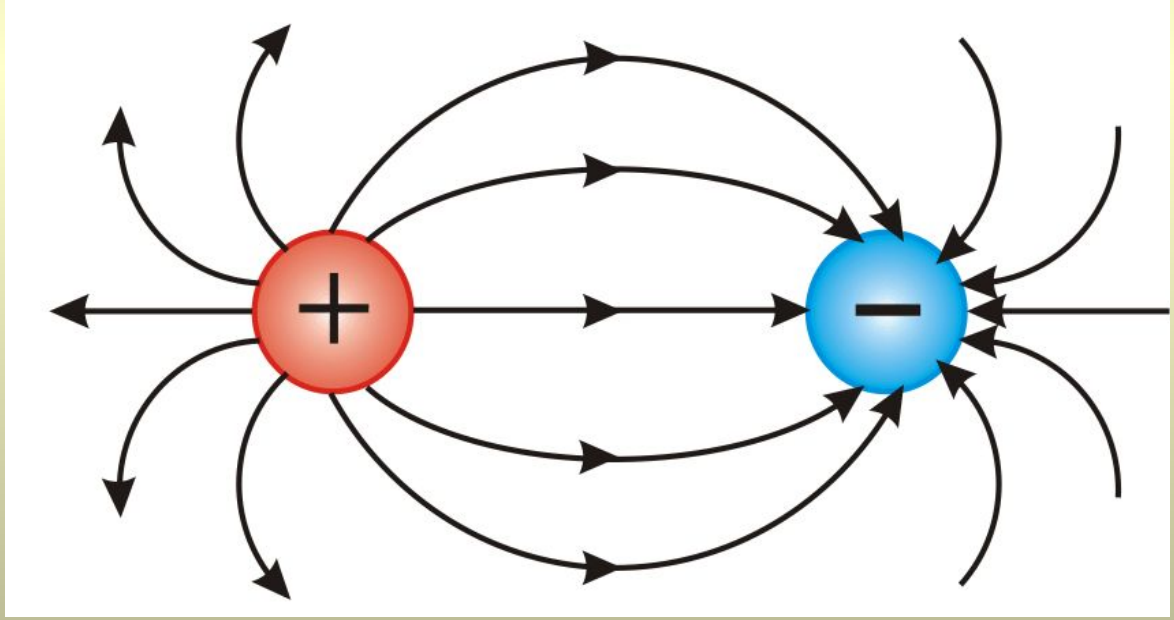
Т.к. $$E \sim 1/r^2,$$

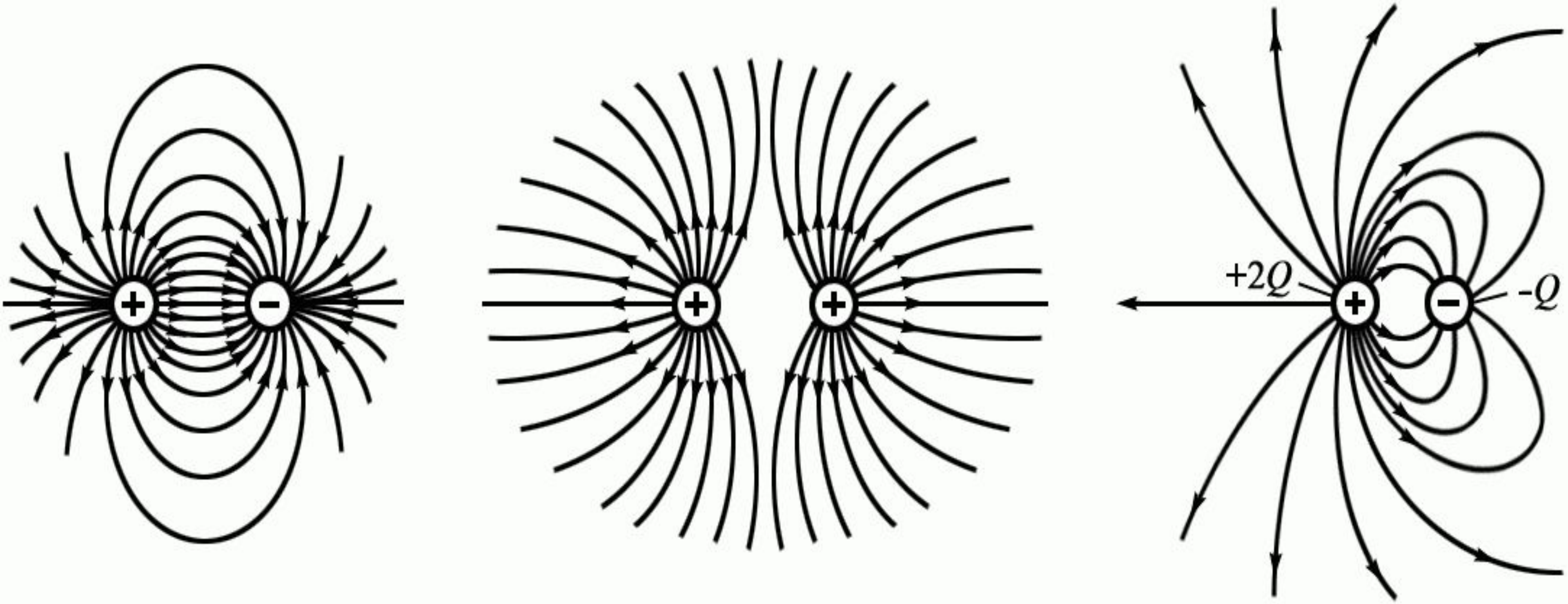
то густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда





- Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному




+2Q
-Q

- *Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности*, т.е. $|\vec{E}|$:

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

2.2. Поток вектора напряженности

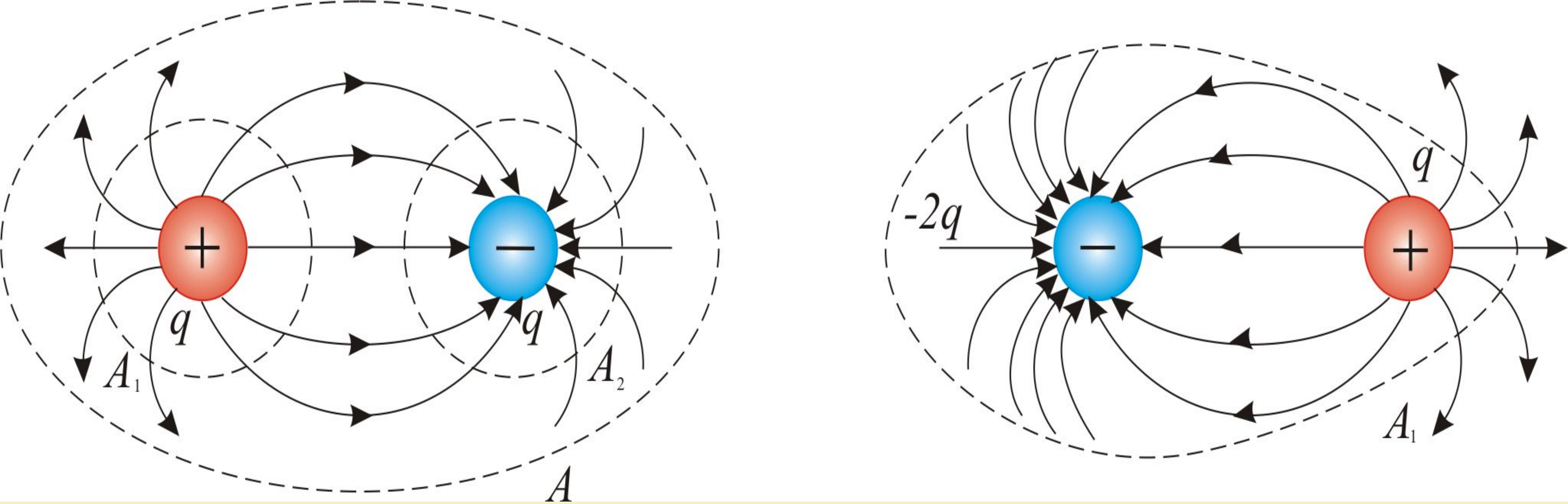
- *Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S называется* **потоком вектора напряженности** Φ *через эту поверхность*
- В векторной форме можно записать

$$\Phi_E = \left(\vec{E}, \vec{S}\right)$$

– скалярное произведение двух векторов, где вектор $\vec{S} = \vec{n}S$.

$$\Phi_E = \left(\vec{E}, \vec{S}\right)$$

- Таким образом, поток вектора есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным.



Для первого рисунка – поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0.$

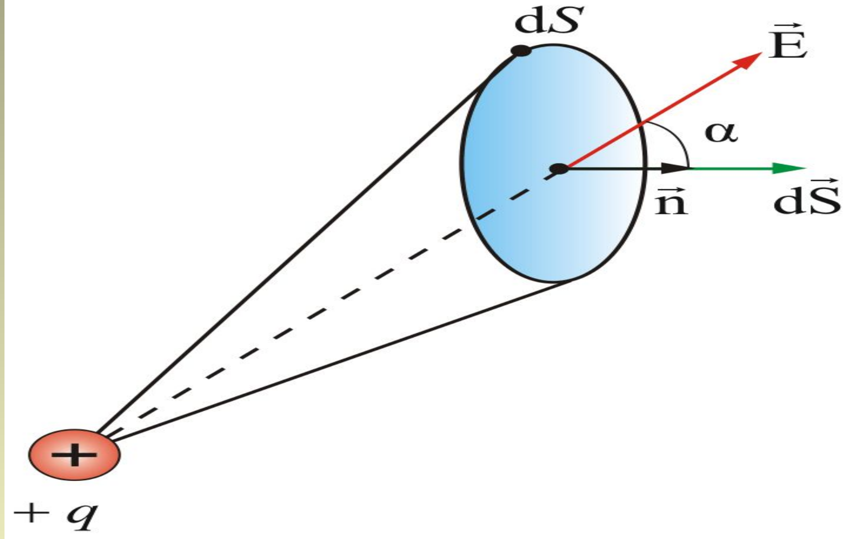
Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi_E < 0$ и направлен внутрь.

Общий поток через поверхность *A* равен нулю.

Опишите второй рисунок самостоятельно.

2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

- *Итак, по определению, поток вектора напряженности электрического поля равен числу линий напряженности, пересекающих поверхность S.*

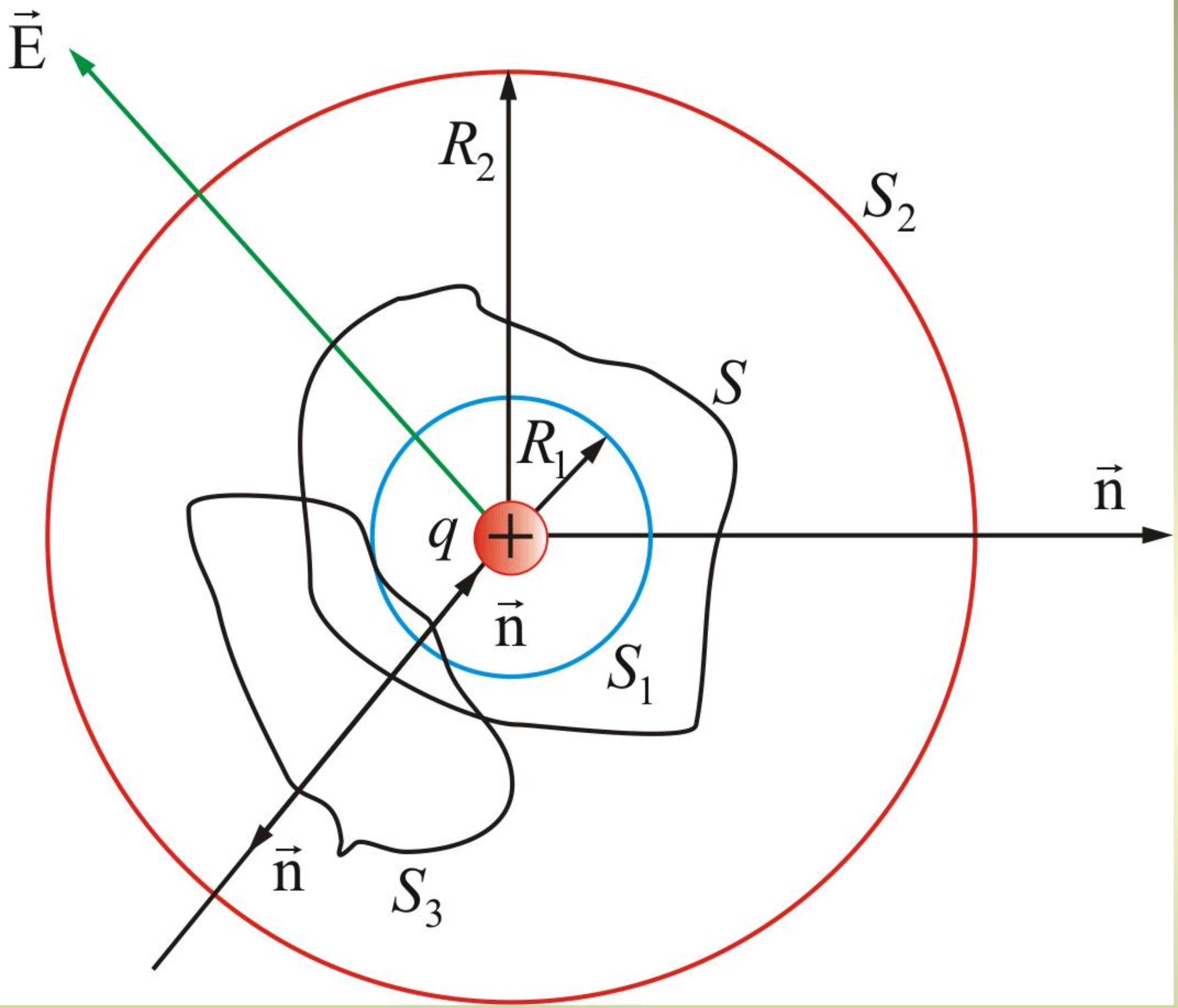


- поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку dS будет равен:

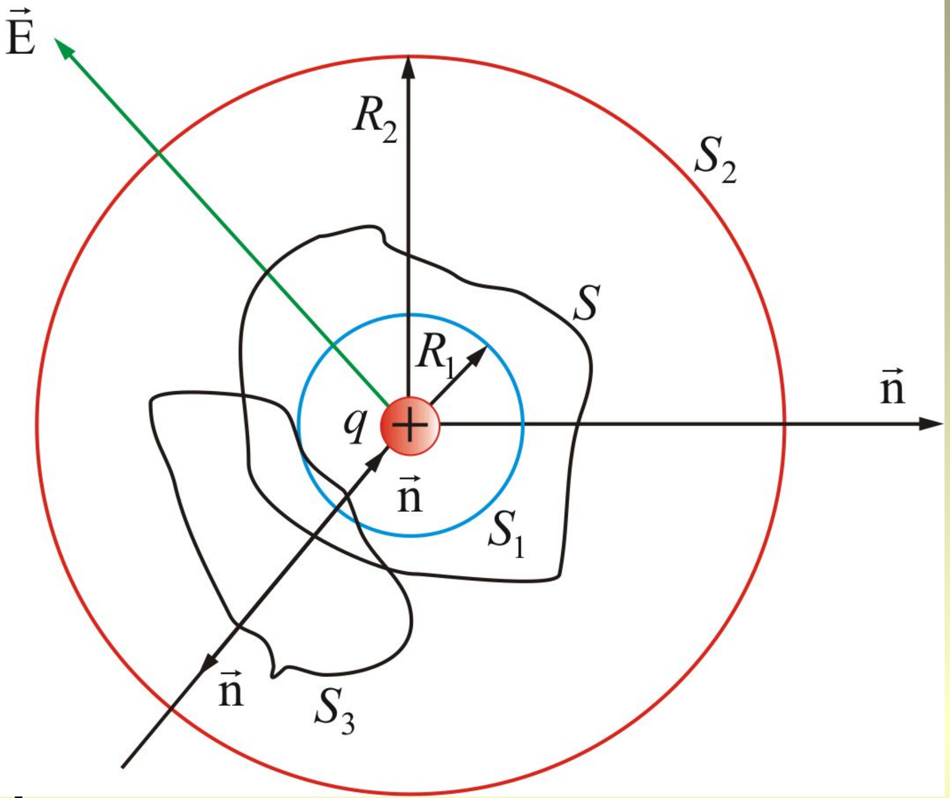
$$\mathrm{d}\Phi_E = E\mathrm{d}S\cos\alpha = E_n\mathrm{d}S.$$

- Т.е. в однородном поле $\Phi_E = ES.$
- В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int_S E_n\mathrm{d}S = \int_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S}.$$



- Подсчитаем поток вектора через произвольную замкнутую поверхность *S*, окружающую точечный заряд *q* . Окружим заряд *q* сферой S_1.

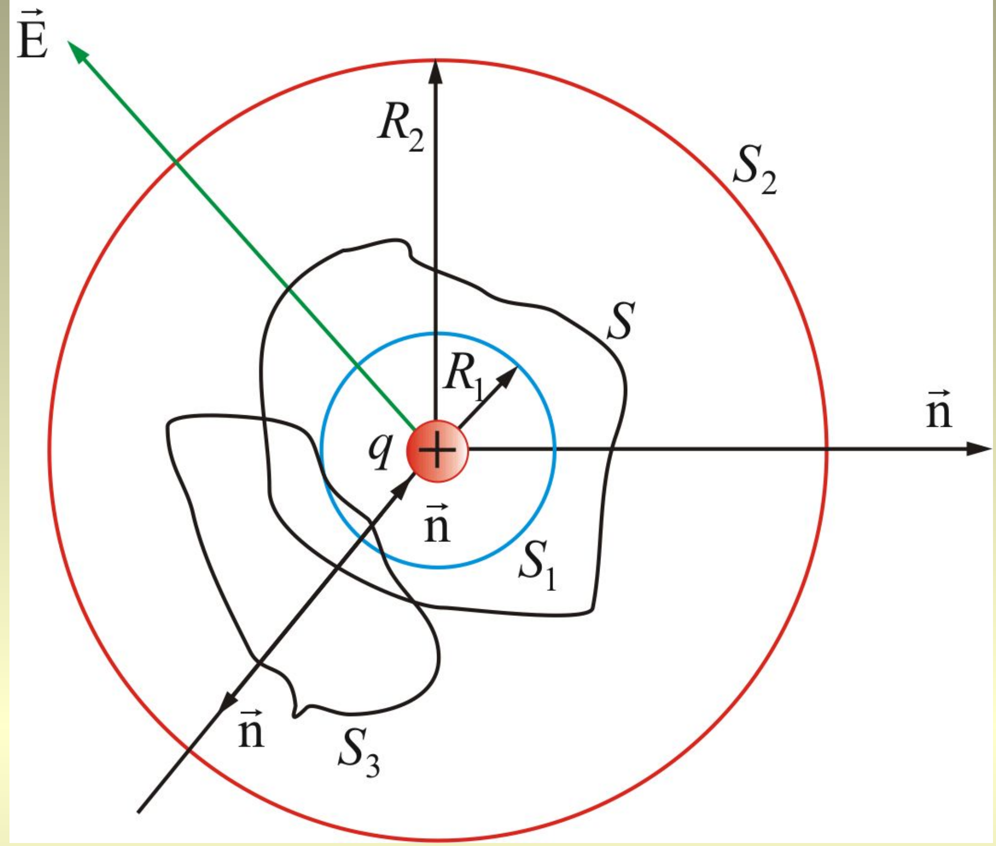


- Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы S_1 равен R_1.
- В каждой точке поверхности S_1 проекция E на направление

внешней нормали

одинакова и равна

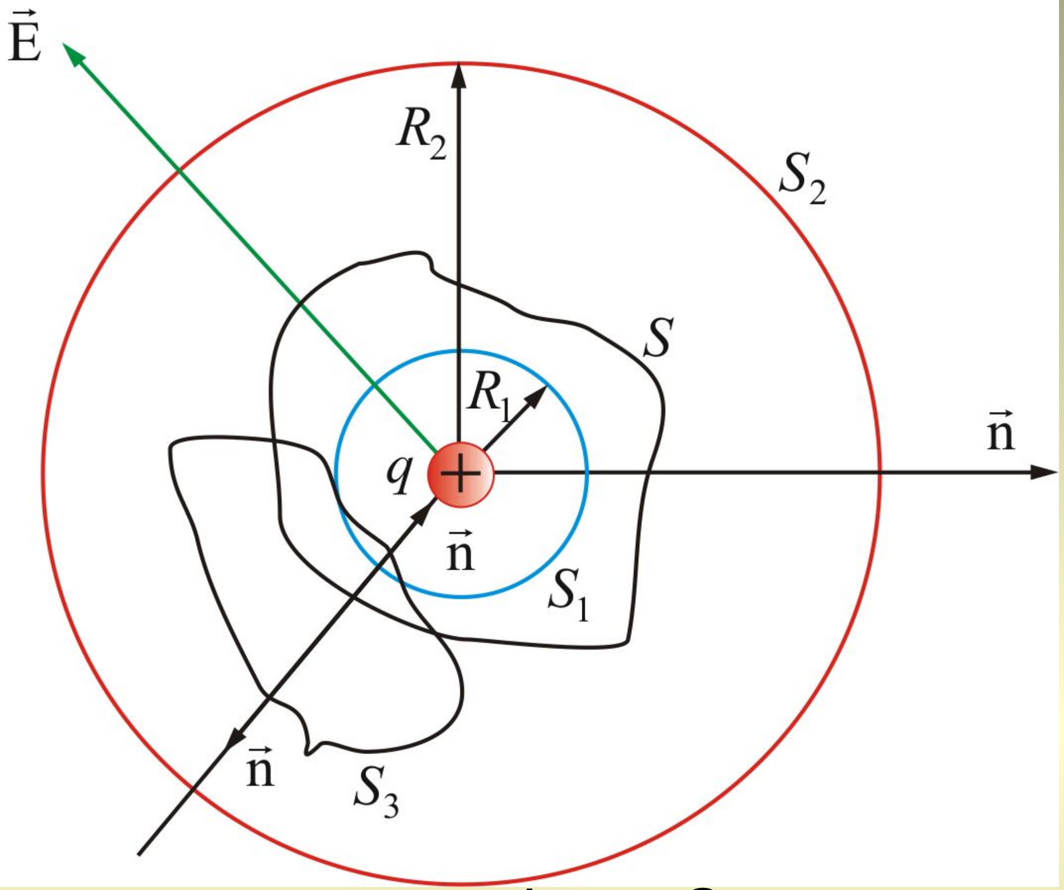
$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.$$



- Тогда поток через S_1

$$\Phi_E = \oint\limits_{S_1} E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

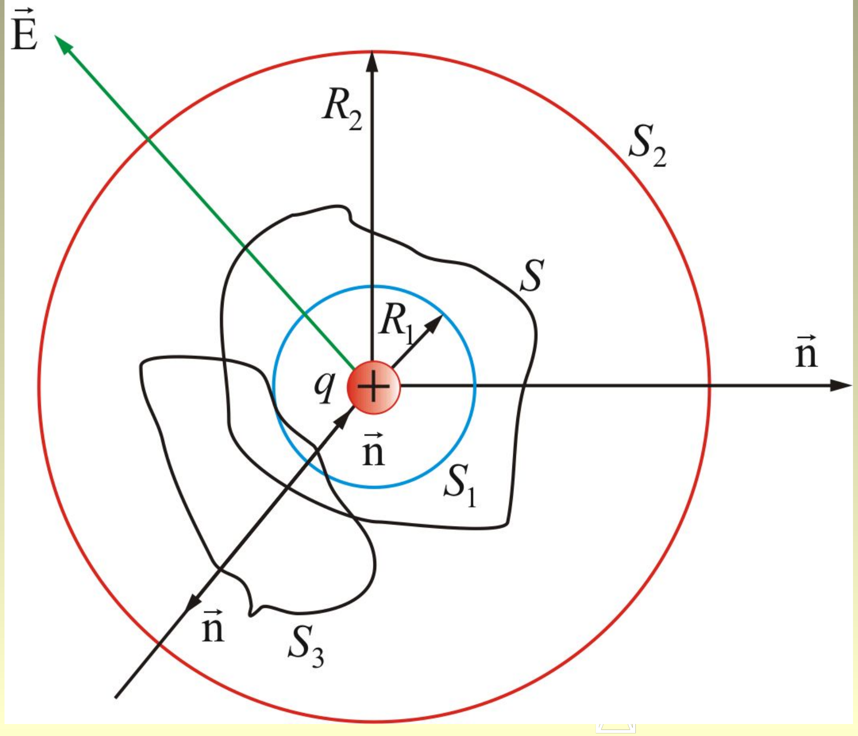
$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.}$$



- Подсчитаем поток через сферу S_2, имеющую радиус R_2:

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.}$$



- Из непрерывности линии $\vec{E}$ следует, что поток и через любую *произвольную* поверхность *S* будет равен этой же величине:

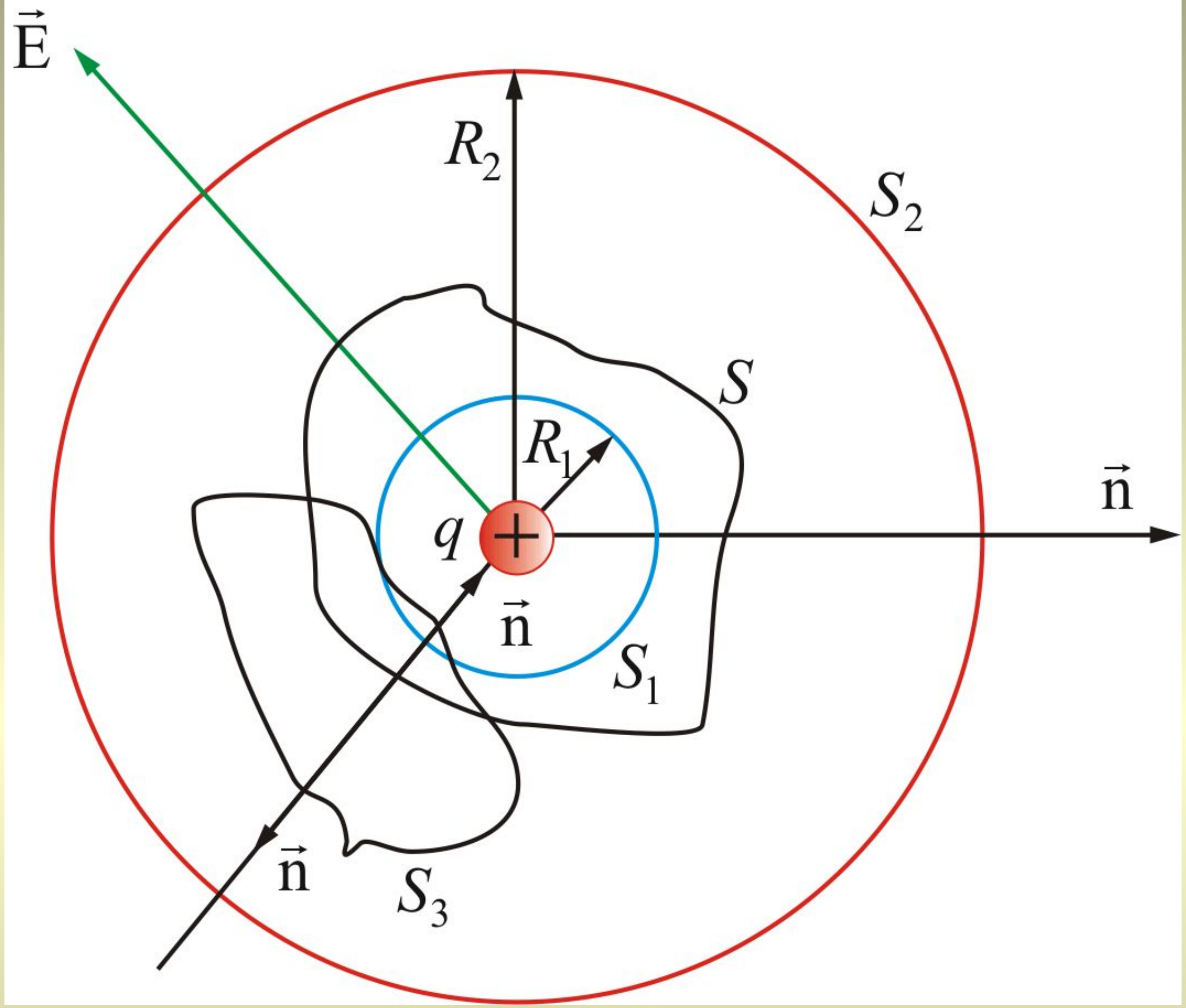
$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- – ***теорема Гаусса для одного заряда***.

- Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

- – ***теорема Гаусса для нескольких зарядов*:**
- ***Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ε_0.***



Полный поток проходящий через S_3, не охватывающую заряд q, равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

- *Таким образом, для точечного заряда q, полный поток через любую замкнутую поверхность S будет равен*:
- $$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ *– если заряд расположен внутри замкнутой поверхности*;
- $\Phi_E = 0$ *– если заряд расположен вне замкнутой поверхности*;
- *этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.*

- Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой **объемной плотностью** различной в разных местах пространства:

$$\rho = \mathrm{d}q \,/\, \mathrm{d}V$$

- Здесь d*V* – ***физически бесконечно малый объем***, под которым следует понимать такой *объем, который с одной стороны достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда*, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона или протона .

- Суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int\limits_V \rho \mathrm{d}V.$$

- Тогда из теоремы Гаусса можно получить:
- $$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{\mathrm{E}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \rho \mathrm{d}V$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \rho \mathrm{d}V$$

- – *это ещё одна форма записи* ***теоремы Остроградского-Гаусса,*** *если заряд неравномерно распределен по объему.*

2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

- Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $<\rho>$. Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{<\rho> \Delta V}{\varepsilon_0} \qquad \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{<\rho>}{\varepsilon_0}$$

- Теперь устремим $\Delta V \to 0$, стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом $<\rho>$ будет стремиться к ρ в данной точке, т.е.

$$\frac{<\rho>}{\varepsilon_0} \to \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

- ***Величину, являющуюся пределом отношения*** $\oint \vec{E} d\vec{S}$ ***к ΔV, при*** $\Delta V \to 0$ ***называют дивергенцией поля E***

$$\operatorname{div} \vec{E}$$

- ***Дивергенция поля*** $\vec{E}$
- $$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} \qquad (2.4.1)$$
- Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля.
- Из этого определения следует, что *дивергенция является скалярной функцией координат*.
- В декартовой системе координат

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

- Итак, $$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.4.3)$$

- ***Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.***

- Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ (Набла)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

где ***i***, ***j***, ***k*** – орты осей (единичные векторы).

- Сам по себе оператор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- ***дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса.***

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- В тех точках поля, где $\operatorname{div} E > 0$ – ***источники*** поля

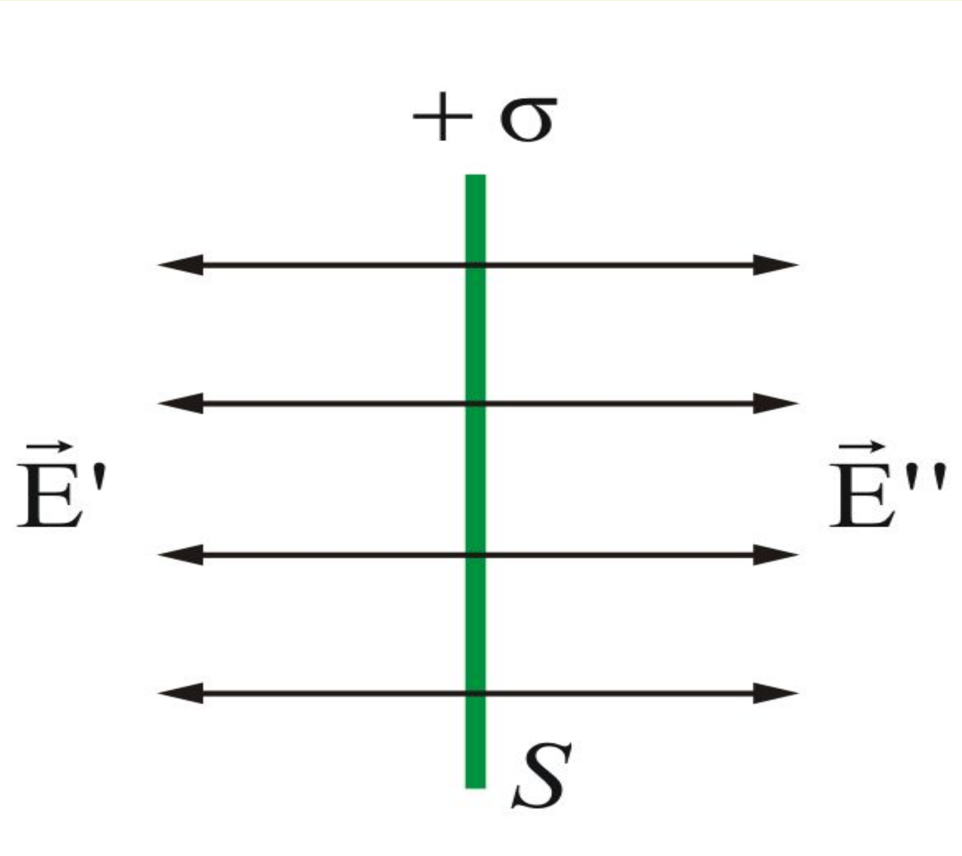
(положительные заряды),

- где $\operatorname{div} E < 0$ – ***стоки*** (отрицательные заряды).

- ***Линии напряженности выходят из источников и заканчиваются в стоках.***

2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

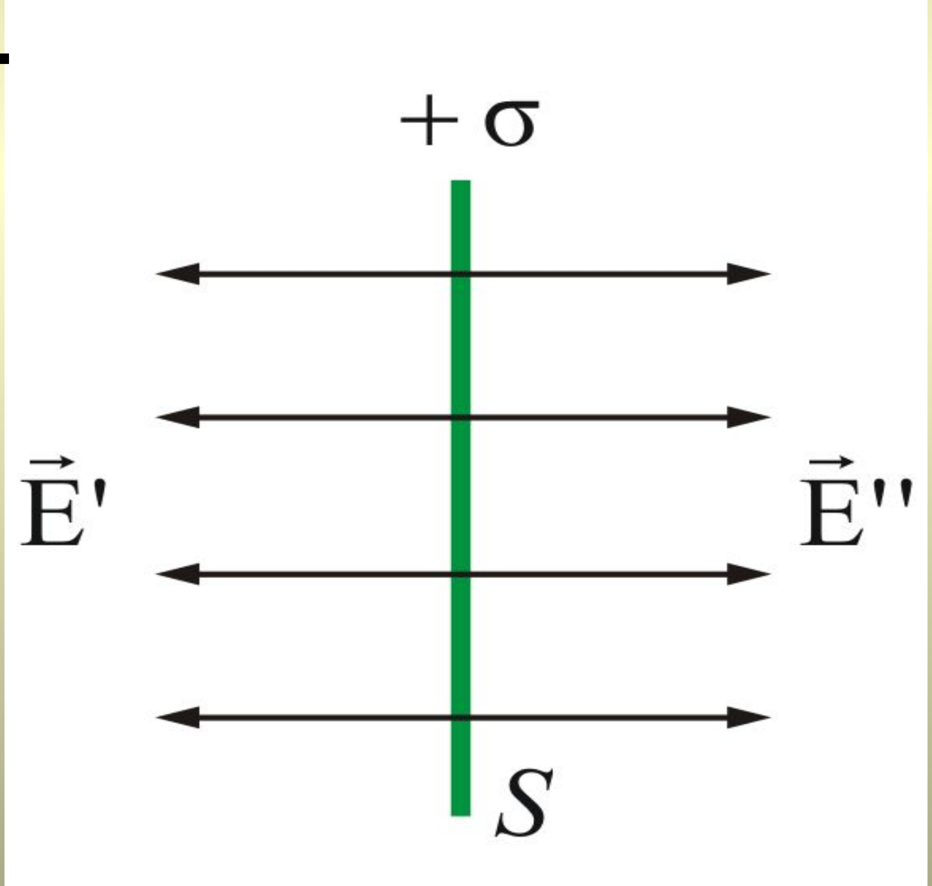


$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

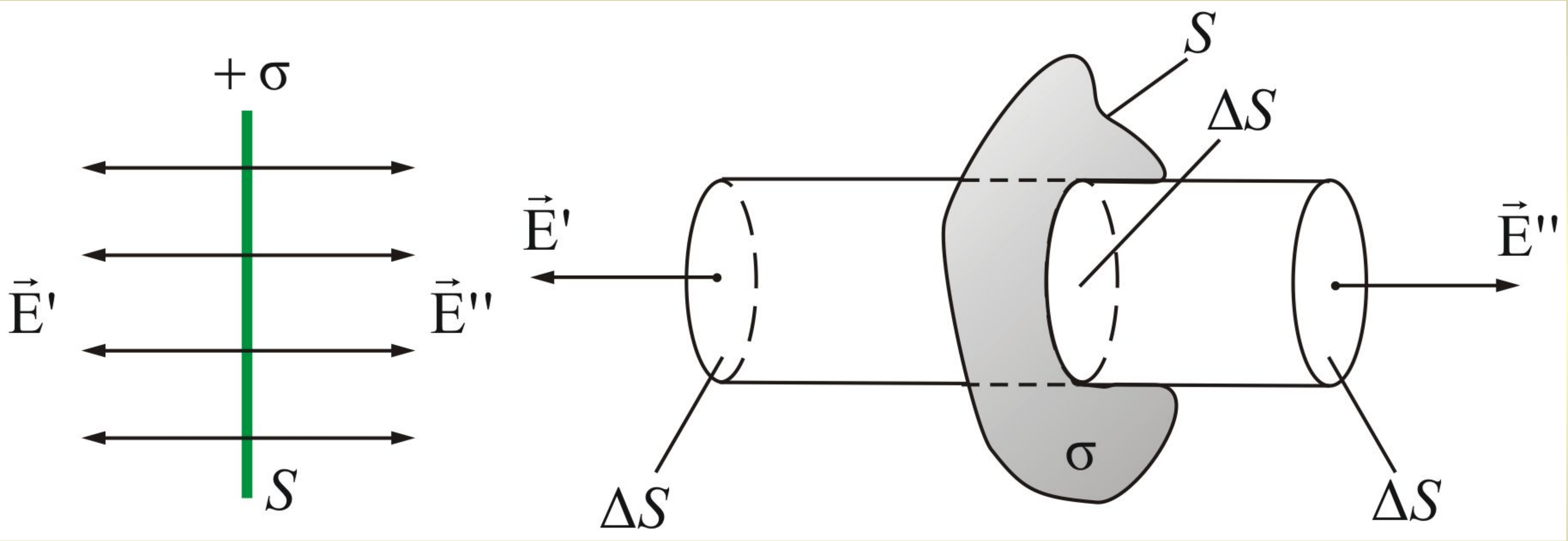
Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью S определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

dq – заряд, сосредоточенный на площади dS;
dS – физически бесконечно малый участок поверхности.



- Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями ΔS, расположенными симметрично относительно плоскости



- Тогда

$$E' = E'' = E.$$

- Суммарный **поток** через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

- Внутри поверхности заключен заряд . Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

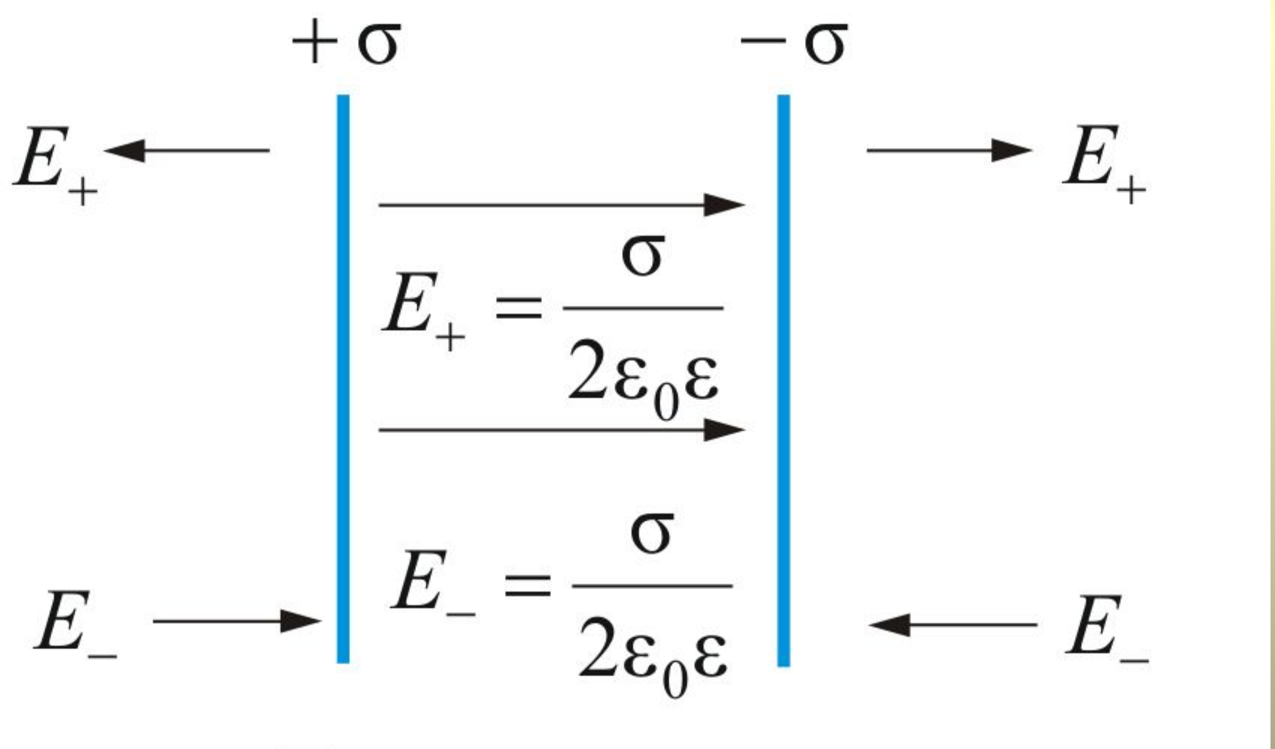
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S\frac{1}{\varepsilon_0}$$

- откуда видно, что ***напряженность поля плоскости S***:
-

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (2.5.1)$$

2.5.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

- Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине плотностью σ



- **Результирующее поле**, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей.
- Тогда ***внутри плоскостей***

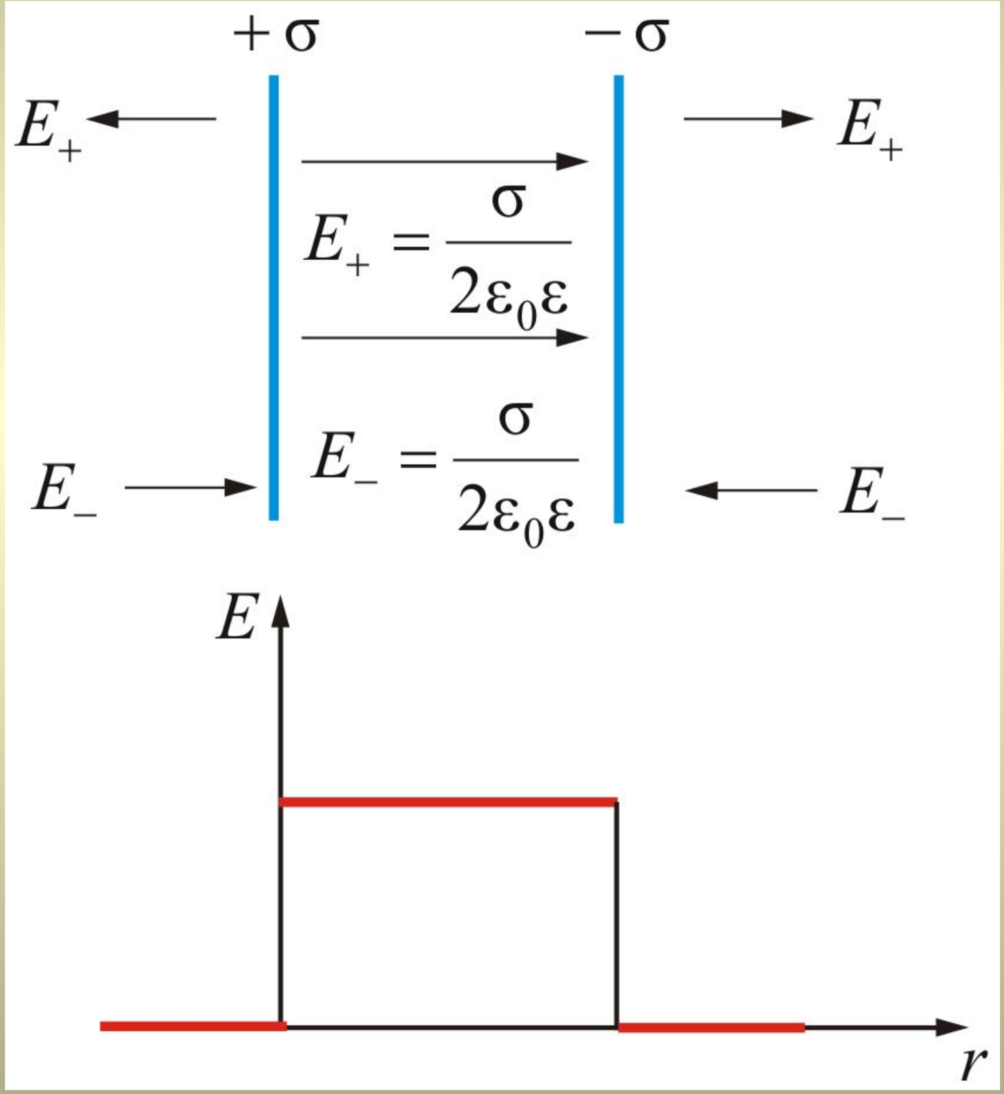
$$E = E_+ + E_- \quad \text{отсюда} \quad E = \sigma / \varepsilon_0$$

- ***Вне плоскостей* напряженность поля**

$$E = 0.$$

- Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

• ***Распределение напряженности*** электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке:



- Между пластинами конденсатора действует **сила взаимного притяжения** (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S} \text{ т.е. } \qquad F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

- *Механические силы, действующие между заряженными телами, называют* ***пондермоторными.***

- Сила притяжения между пластинами конденсатора:
- $$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$
- где *S* – площадь обкладок конденсатора.
- Т.к. $$\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$$

$$\boxed{F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}}$$

- Это формулы для расчета **пондермоторной силы**

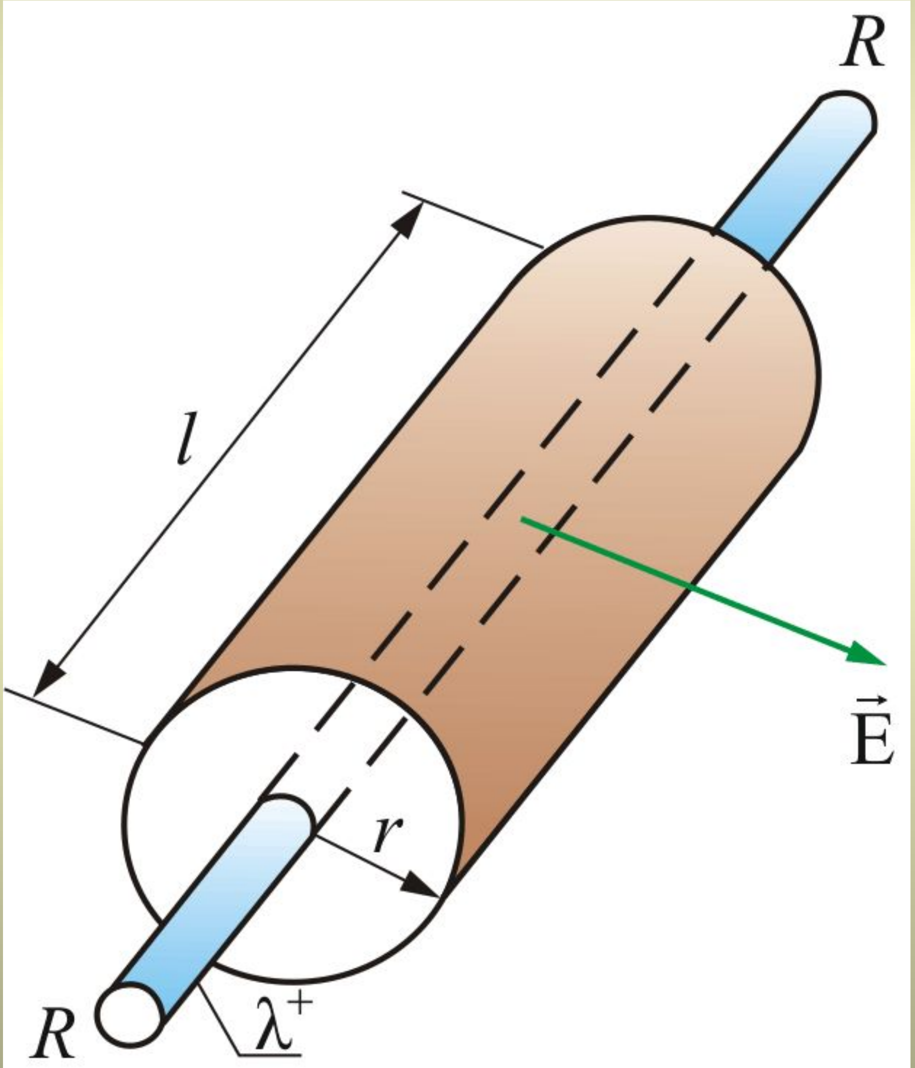
2.5.3. Поле равномерно заряженного бесконечно длинного цилиндра (нити)

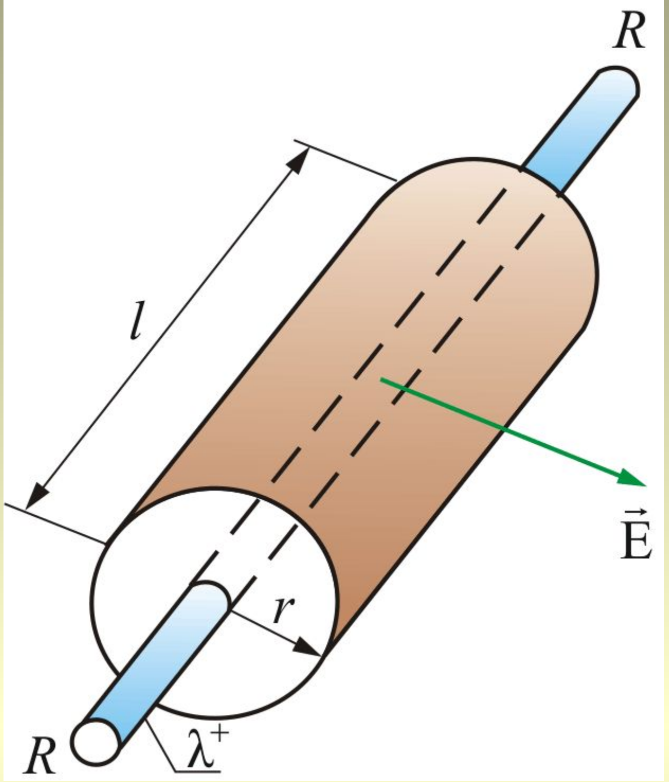
- Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса R*, заряженной с постоянной линейной плотностью

$$\lambda^{+} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

- где d*q* – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра

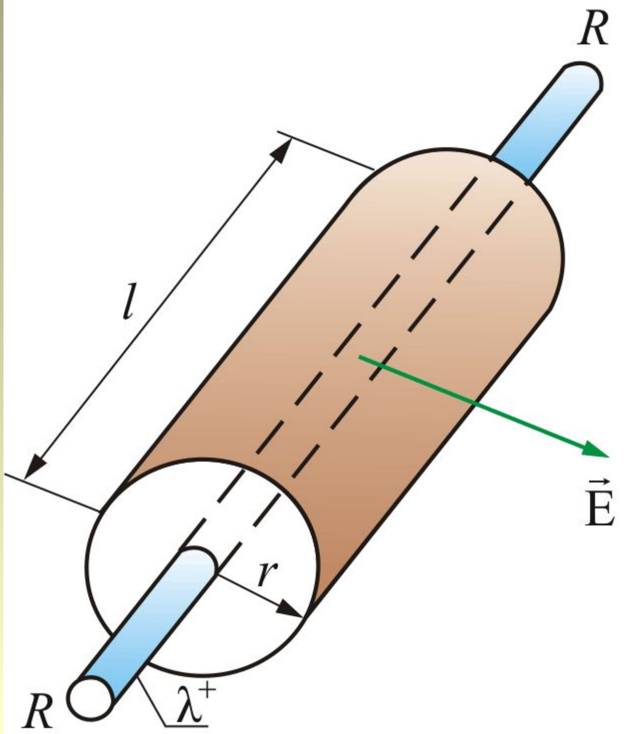
Представим вокруг цилиндра (нити) *коаксиальную* замкнутую поверхность (*цилиндр в цилиндре*) радиуса *r* и длиной *l* (основания цилиндров перпендикулярно оси).





- Для оснований цилиндров $E_n = 0,$
- для боковой поверхности $E_n = E(r),$ т.е. зависит от расстояния *r*.
- *Следовательно,* ***поток вектора*** *через рассматриваемую поверхность, равен*

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl.$$

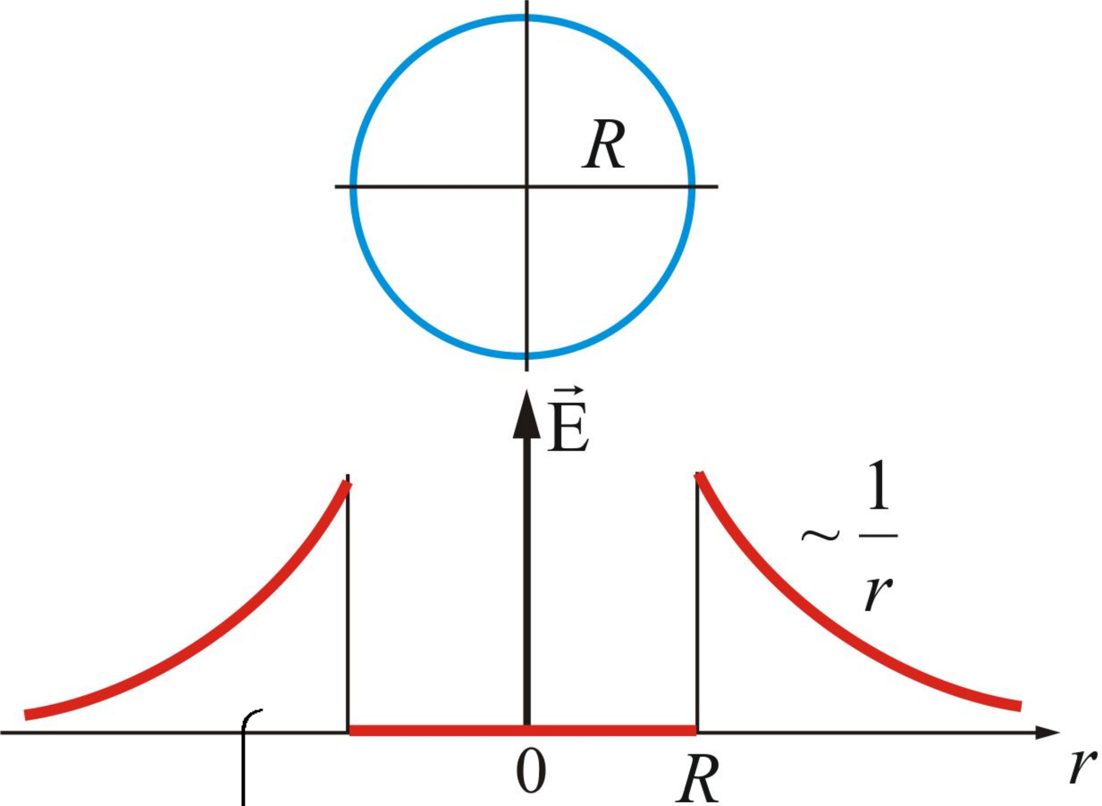


- При $r \geq R,$ на поверхности будет заряд $q = \lambda l.$

- По теореме Остроградского-Гаусса $E(r)2\pi rl = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0}$
- Тогда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ \text{при}\ r \geq R$$

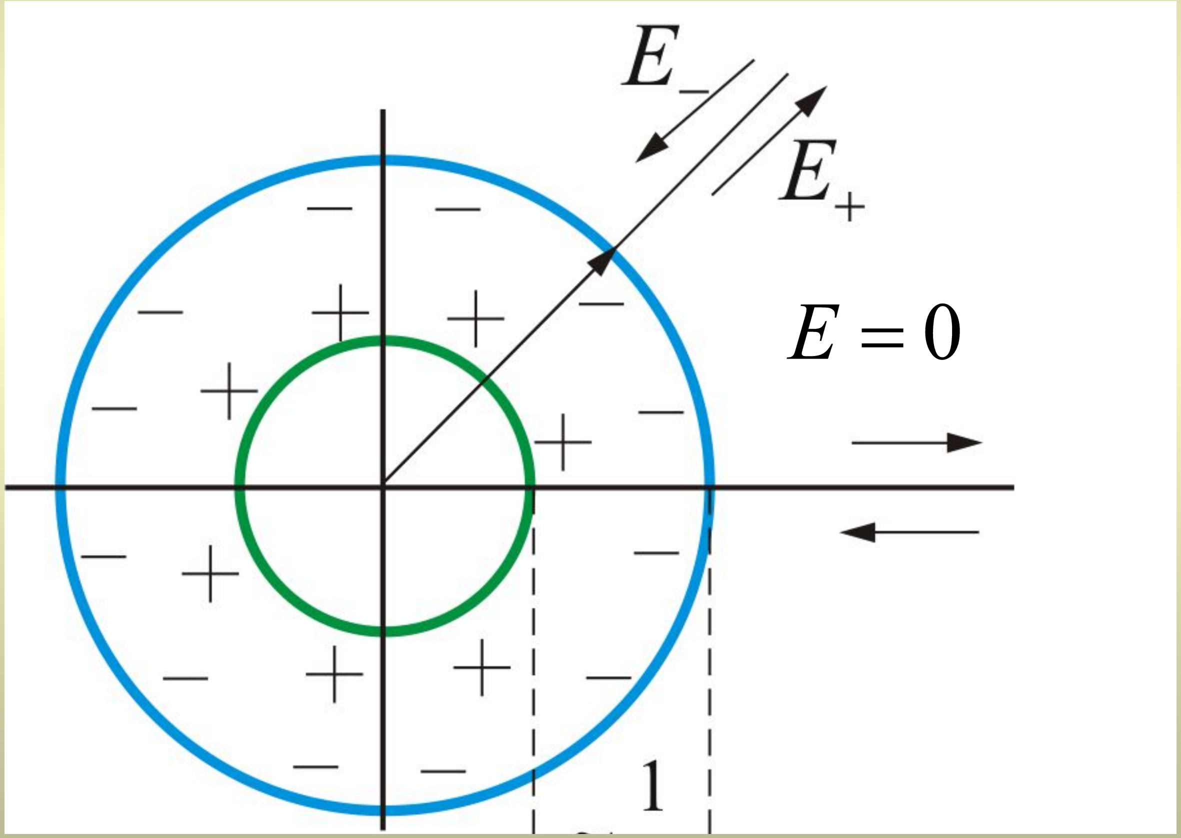
- Если $r < R,\quad E(r) = 0$, т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет.



- График распределения напряженности электростатического поля цилиндра

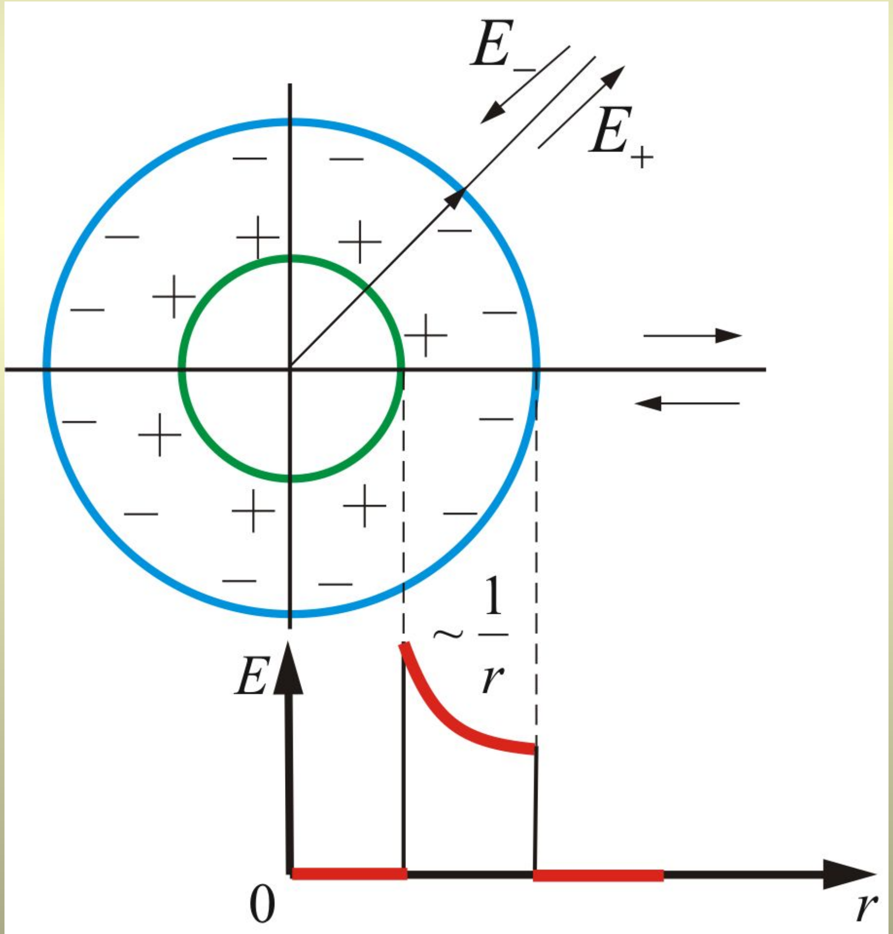
$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R l} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l} \text{ вне цилиндра} \end{cases}$$

2.5.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью λ, но разным знаком



- Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать $E = 0$

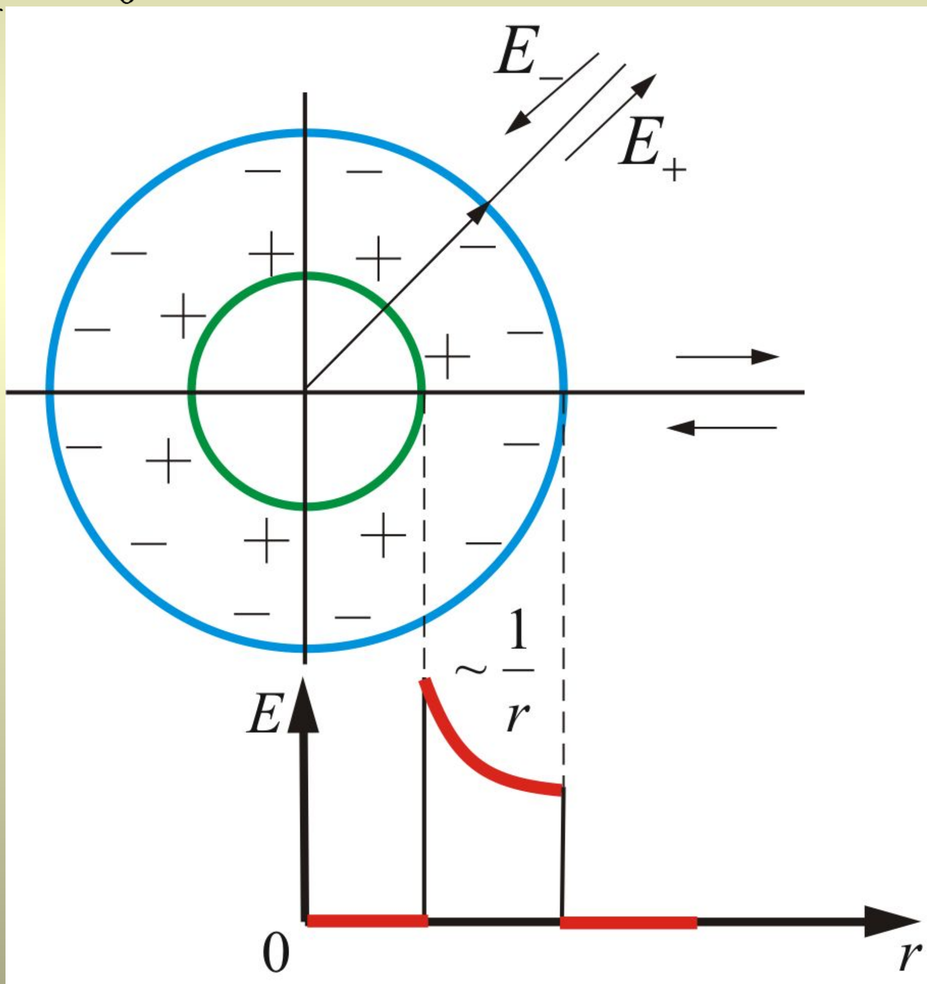
- В зазоре ***между цилиндрами***, поле определяется так же, как в п. 2.5.3:



$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

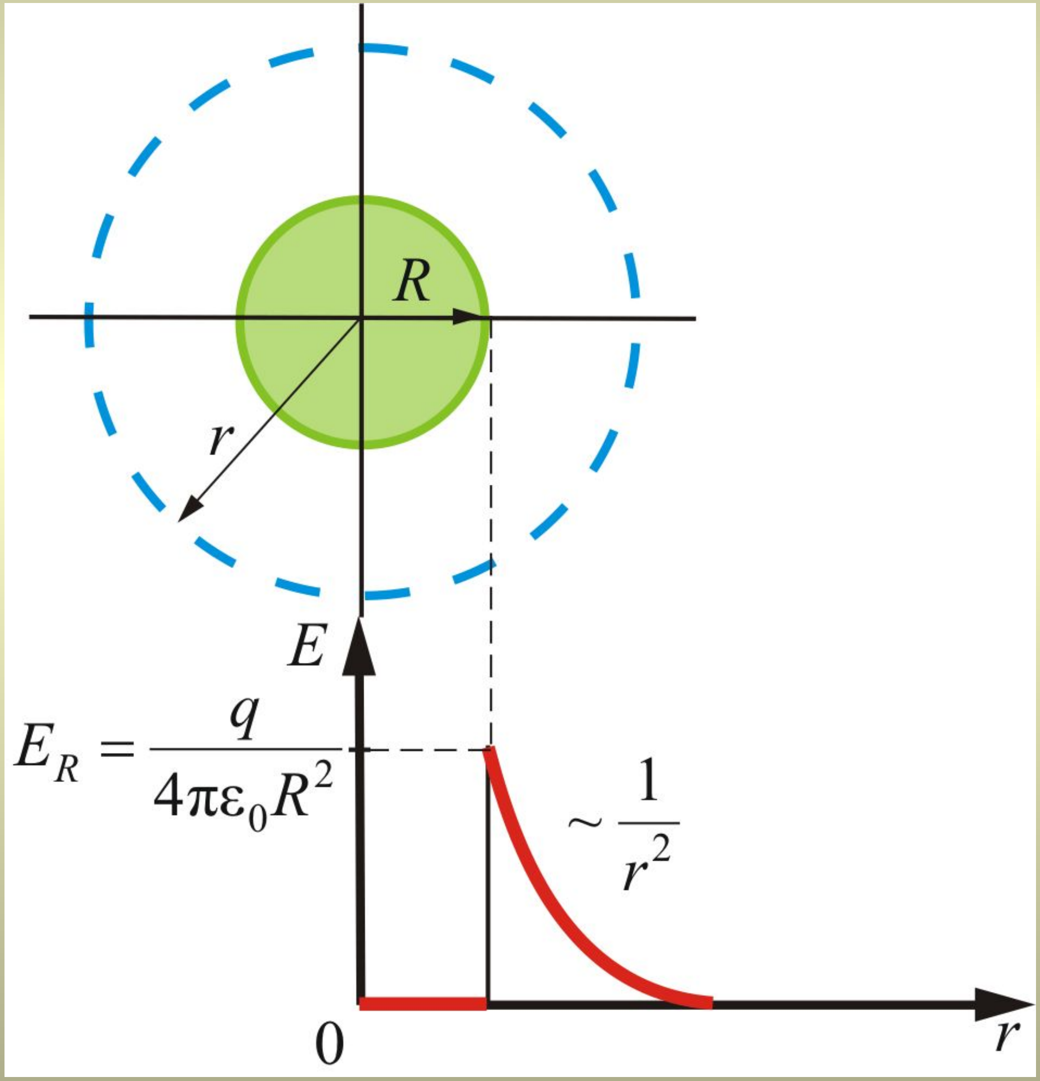
Таким образом для коаксиальных цилиндров имеем:

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядовне} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

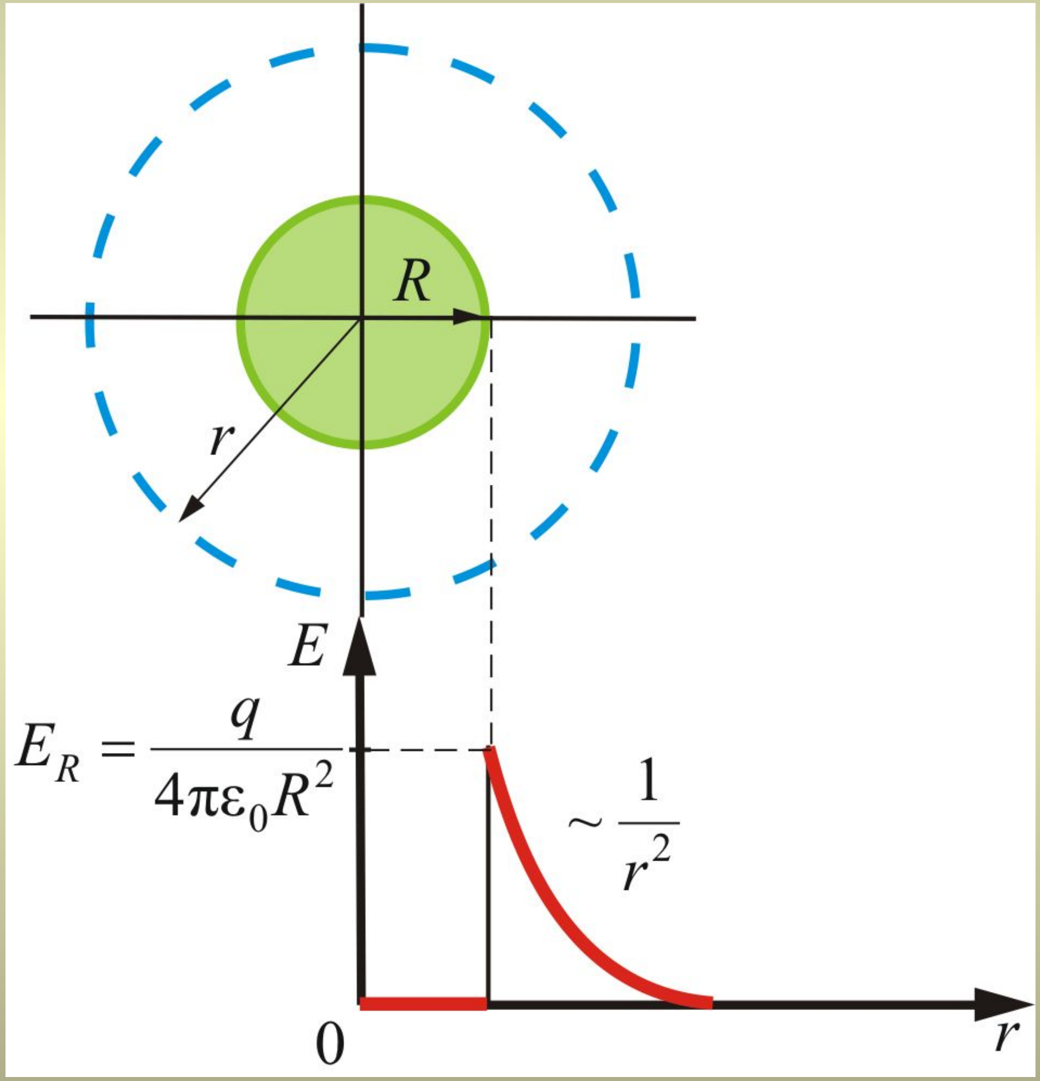


- Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

2.5.5. Поле заряженной сферы



- Вообразим вокруг шара – сферу радиуса *r* (рис).



- Если $r \geq R,$ то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд *q*, распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

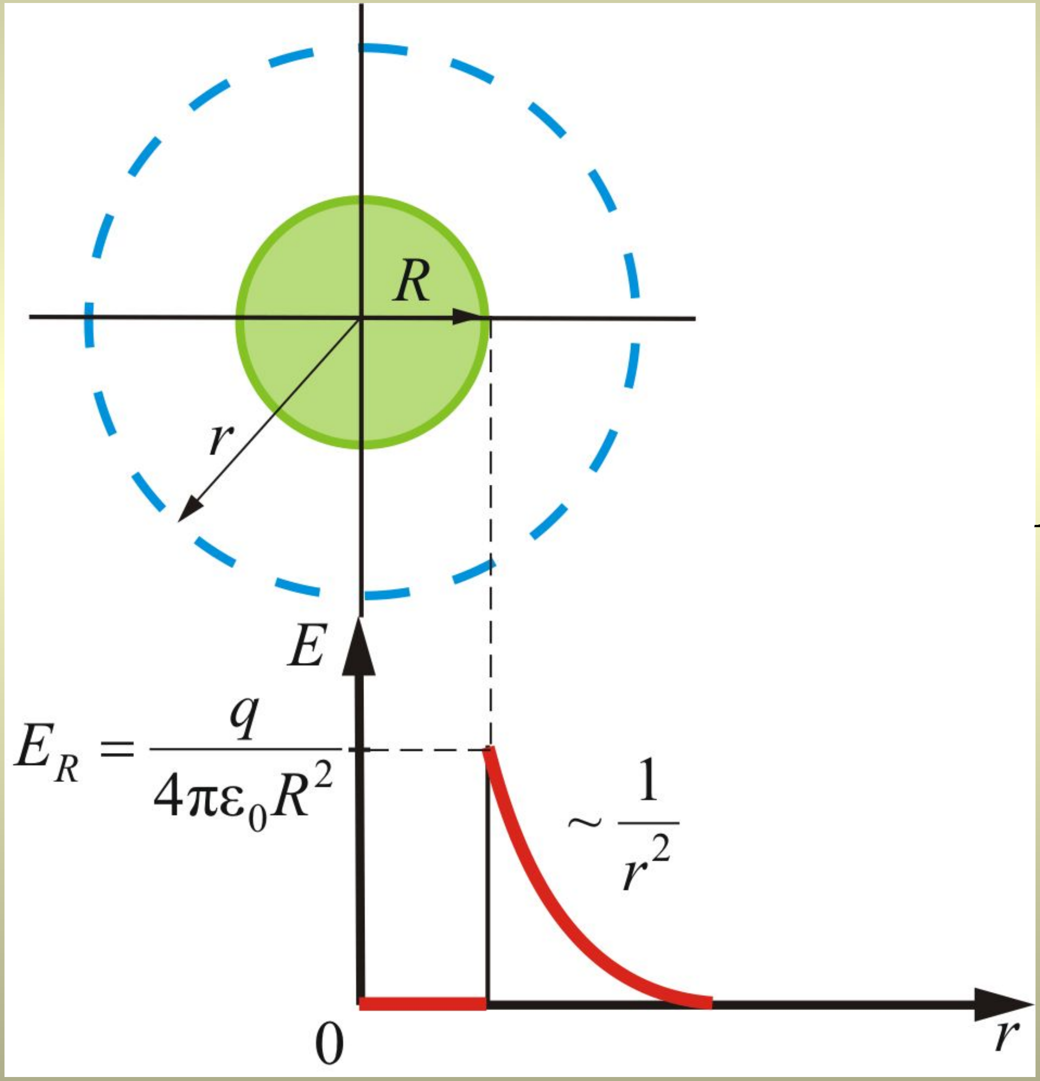
- откуда ***поле вне сферы***:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

- ***Внутри сферы***, при $r < R,$ поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

$$E(r) = 0.$$

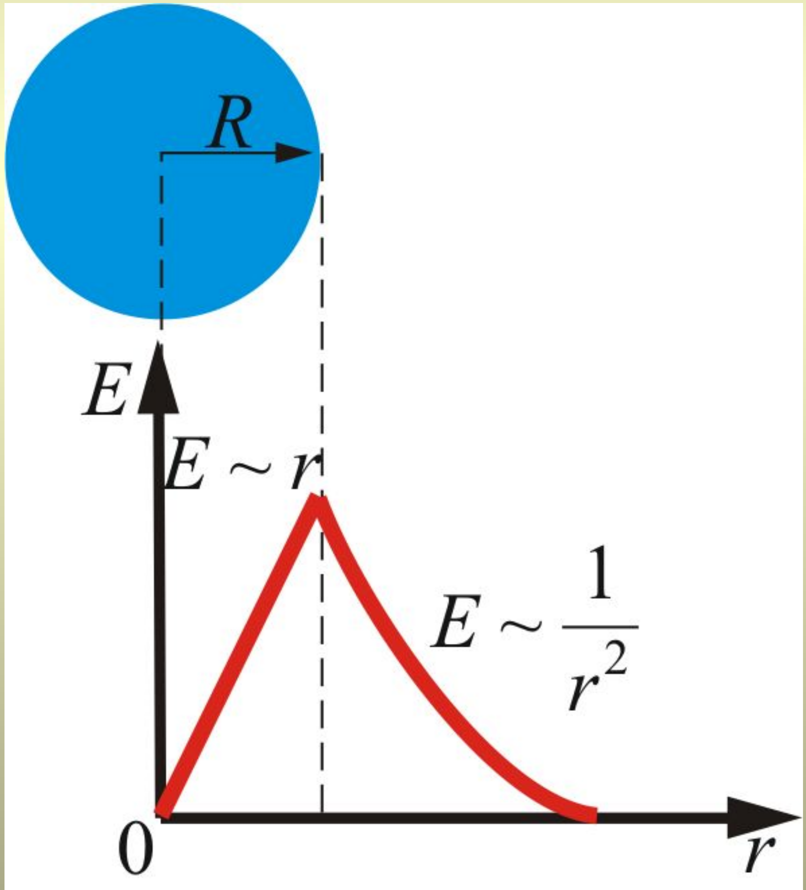
Как видно, **вне сферы** поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

2.5.6. Поле объемного заряженного шара

- Для поля ***вне шара*** радиусом *R* получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- Внутри шара при $r < R,$ сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

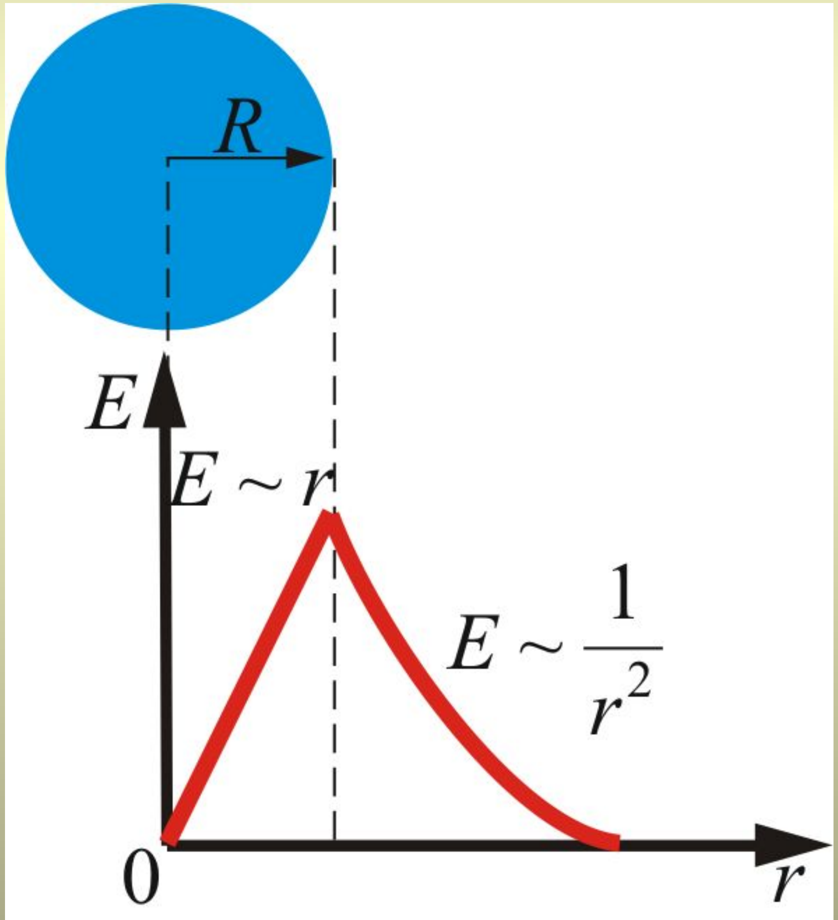
- где ρ – объемная плотность заряда: $\rho = \frac{q}{V}$
объем шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

-
- Тогда, по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

- Т.е. ***внутри шара***
- $$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$
- Т.е., внутри шара имеем $E \sim r.$



Таким образом, имеем: поле объемного заряженного шара

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара} \ (r > R) \end{cases}$$

Лекция окончена

*