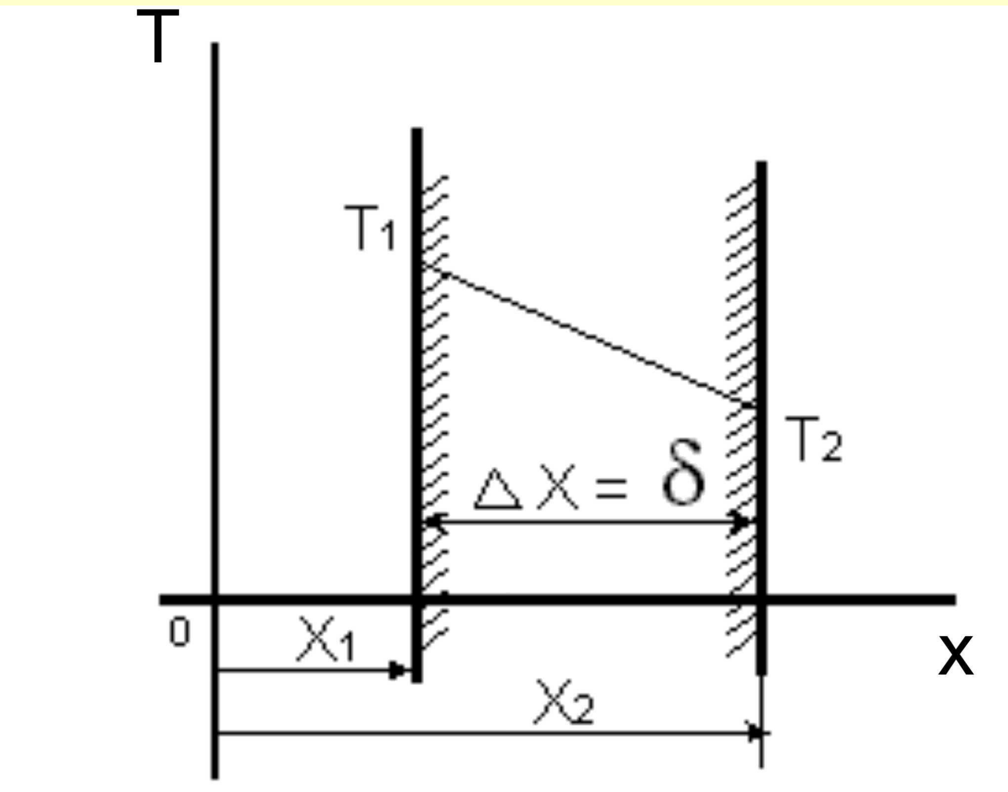
ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Если плоское тело (пластина) имеет толщину δ, значительно меньшую двух других характерных размеров, можно пренебречь отводом и подводом тепла через торцы, считая, что **тепловой поток направлен перпендикулярно поверхности пластины**



Задача является пространственно-одномерной, а следовательно, температурное поле зависит только от одной координаты x:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Плоская стенка. Термическое сопротивление

При отсутствии объемного тепловыделения ($q_v = 0$) и λ = const уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \frac{Q_V}{c\rho}$$

имеет вид:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Закон распределения температур по толщине стенки после интегрирования:

$$T = C_1 x + C_2$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Видно, что распределение температур в стенке соответствует линейному закону. Изотермические поверхности представляют собой плоскости, параллельные поверхностям стенки и нормальные к оси x.

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Определим константы интегрирования исходя из граничных условий первого рода:

при $x = 0,\ T = T_1$
при $x = \delta,\ T = T_2$

T_1 – температура более нагретой стенки, T_2 – температура более холодной стенки $T_1 > T_2$

Подставим условия в уравнение:

$$T_1 = C_2 \qquad T_2 = C_1\delta + T_1$$

Окончательно:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\delta}x + T_1$$

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Для определения количества тепла, проходящего через элемент стенки в единицу времени (dt = 1), воспользуемся законом Фурье:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dS$$

Поскольку:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta}$$

Следовательно:

$$dQ = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{\delta} dS = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\delta} dS$$

Для участка поверхности площадью S:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_2)S$$

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Обозначим $T_1 - T_2 = \Delta T$, тогда

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T S$$

Количество тепла, проходящее через единицу поверхности в единицу времени, определяется соотношением:

$$q = \frac{Q}{S} = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T$$

Отношение λ/δ обычно называют тепловой проводимостью стенки, а обратная величина δ/λ – сопротивлением теплопроводности стенки.

Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

К **объемному тепловыделению** можно отнести следующие явления: конденсация, нагревание, ядерные реакции и др.

Основное уравнение будет иметь вид:

$$a\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{Q_V}{c\rho}=0$$

Принимая во внимание, что a = λ(cρ):

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{Q_V}{\lambda}=0$$

Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

Считая Q_V = const, после первого интегрирования получаем:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{Q_V}{\lambda}x + C_1$$

После второго:

$$f(x) = -\frac{Q_V x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий

Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

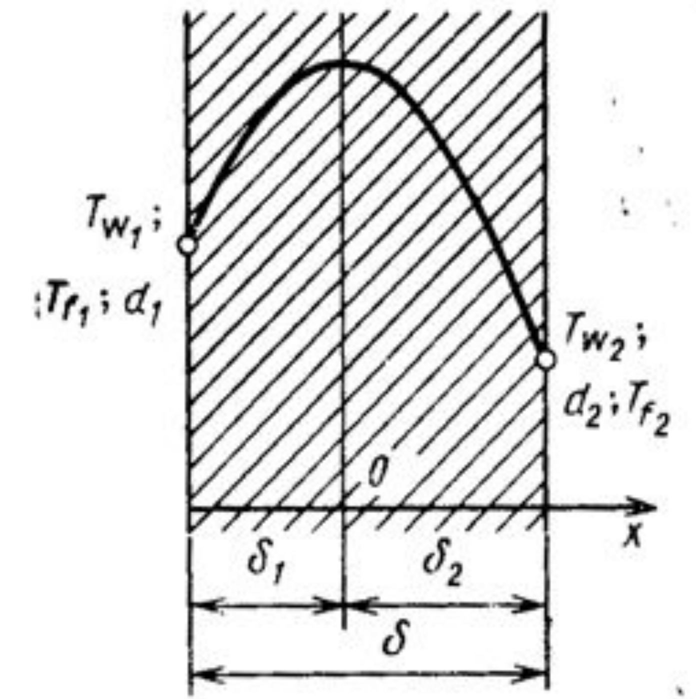


Схема распределения температур в пластине при объемном тепловыделении

Решение принимает простой вид в случае симметричного теплосъема с пластины, т.е. когда: $a_1 = a_2 = a$ и $T_{f1} = T_{f2} = T_f$. Очевидно, что $\delta_2 = \delta/2$

$$T(x) = -\frac{Q_V}{2\lambda}\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right] + \frac{Q_V\delta}{2\alpha} + T_f$$

Максимальная температура:

$$T_{\max} = -\frac{Q_V\delta^2}{8\lambda} + \frac{Q_V\delta}{2\alpha} + T_f$$

При постоянных Q_V и δ будет тем больше, чем меньше теплопроводность пластины λ и чем хуже теплоотдача с ее поверхности, т.е. чем меньше a

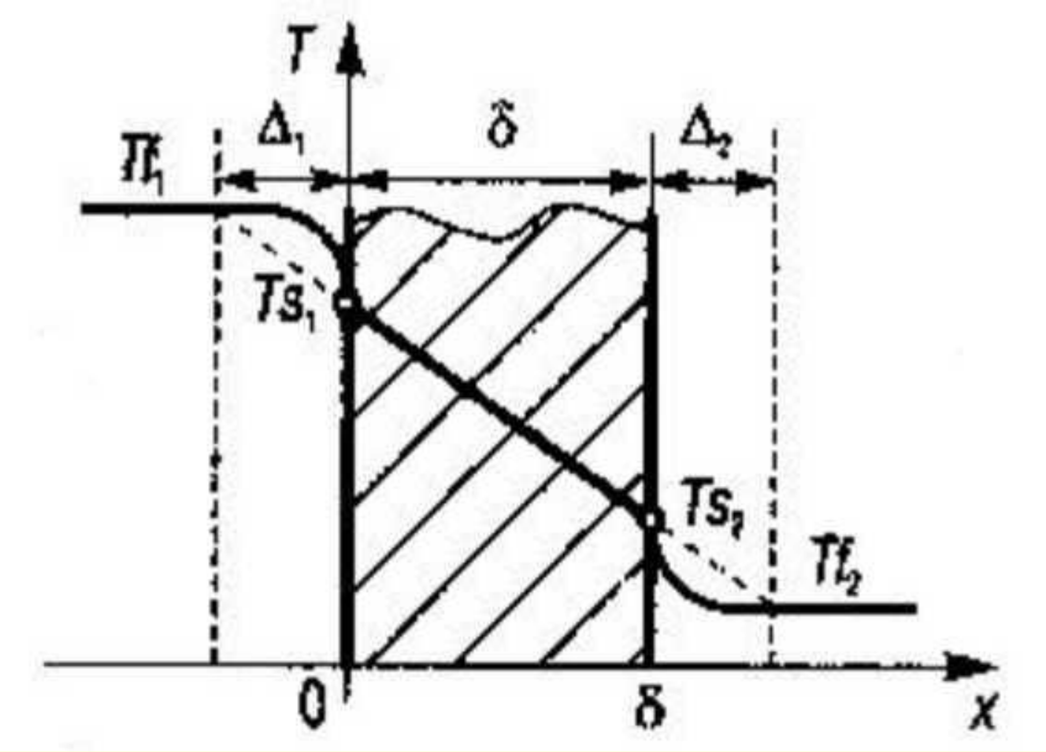
Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

Температура на поверхности пластины x = δ/2:

$$T_w = -\frac{Q_V \delta}{2\lambda} + T_f$$

также растет с ухудшением теплоотдачи.

Теплопередача между двумя жидкостями через разделяющую их стенку. Коэффициент теплопередачи



Определим тепловой поток q от жидкости с температурой T_{f1} к жидкости с температурой T_{f2} через твердую стенку. Установлено, что температура жидкости резко меняется в тонком слое у стенки. Этот слой называют пограничным.

В пограничном слое происходит интенсивный перенос теплоты. Для определения теплового потока q необходимо знать распределение температуры по толщине пограничного слоя

$$T = T(x)$$

Теплопередача между двумя жидкостями через разделяющую их стенку. Коэффициент теплопередачи

Обычно величину q определяют по формуле Ньютона:

$$q = \alpha(T_f - Ts)$$

α – коэффициент теплоотдачи. Данная формула удобнее чем:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} gradT$$

Т.к. коэффициент α проще определить экспериментально, чем зависимость T = T(x)

Таким образом, тепловой поток на левой стенке: $q = \alpha_1(T_{f1} - Ts_1)$

На правой стенке: $q = \alpha_2(T_{f2} - Ts_2)$

Через стенку: $q = \lambda/\delta\ (Ts_1 - Ts_2)$

Теплопередача между двумя жидкостями через разделяющую их стенку. Коэффициент теплопередачи

После преобразований получаем:

$$\frac{q}{\alpha_1} = T_{f1} - Ts_1 \qquad q\frac{\delta}{\lambda} = Ts_1 - Ts_2 \qquad \frac{q}{\alpha_2} = Ts_2 - T_{f2}$$

Складываем почленно левые и правые части:

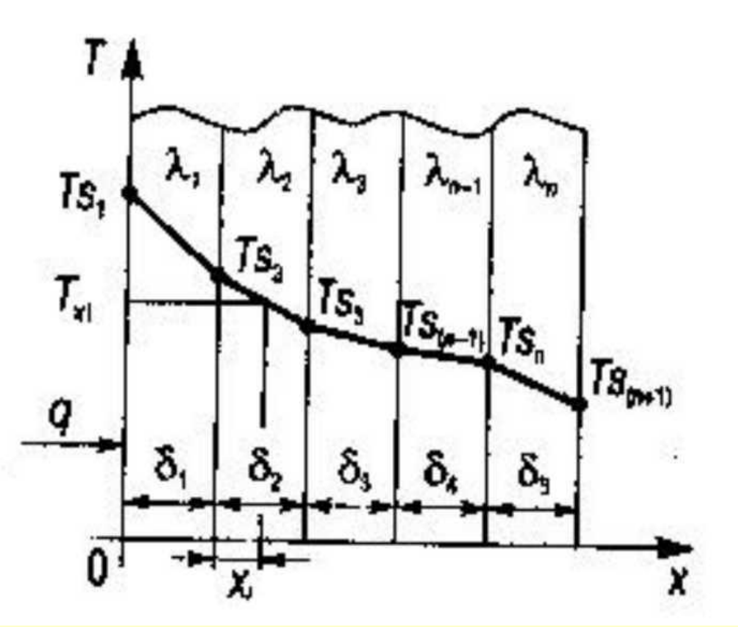
$$q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right) = T_{f1} - T_{f2} \qquad q = k(T_{f1} - T_{f2})$$

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}$$

k – коэффициент теплопередачи (Вт/м^{2}К), а обратная величина
R = 1/k – полное термическое сопротивление (м^{2}К/Вт)

Многослойная плоская стенка

Пусть многослойная стенка состоит из n плотно прилегающих слоев, коэффициенты теплопроводности которых равны $\lambda_1..\lambda_n$, а толщины $\delta_1..\delta_n$.



Поскольку задача стационарная – удельный тепловой поток, проходящий через каждый слой, для всех слоев будет одинаков.

$$q = \frac{\lambda_i}{\delta_i}(Ts_i - Ts_{i+1})$$

Многослойная плоская стенка

Перепишем эти выражения в виде:

$$q\frac{\delta_i}{\lambda_i} = Ts_i - Ts_{i+1}$$

Произведем почленное сложение: $q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right) = Ts_1 - Ts_{n+1}$

Отсюда: $q = \dfrac{Ts_1 - Ts_{n+1}}{\sum \dfrac{\delta_i}{\lambda_i}}$

Сумма в знаменателе – суммарное сопротивление теплопроводности многослойной стенки.

Многослойная плоская стенка

Иногда вводят в рассмотрение **эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{экв}$**, который равен коэффициенту теплопроводности фиктивной однослойной стенки, равной толщине многослойной и при условии, что разности температур на границах однослойной и многослойной стенок одинаковы, а количество тепла, проходящее через них в единицу времени, совпадает

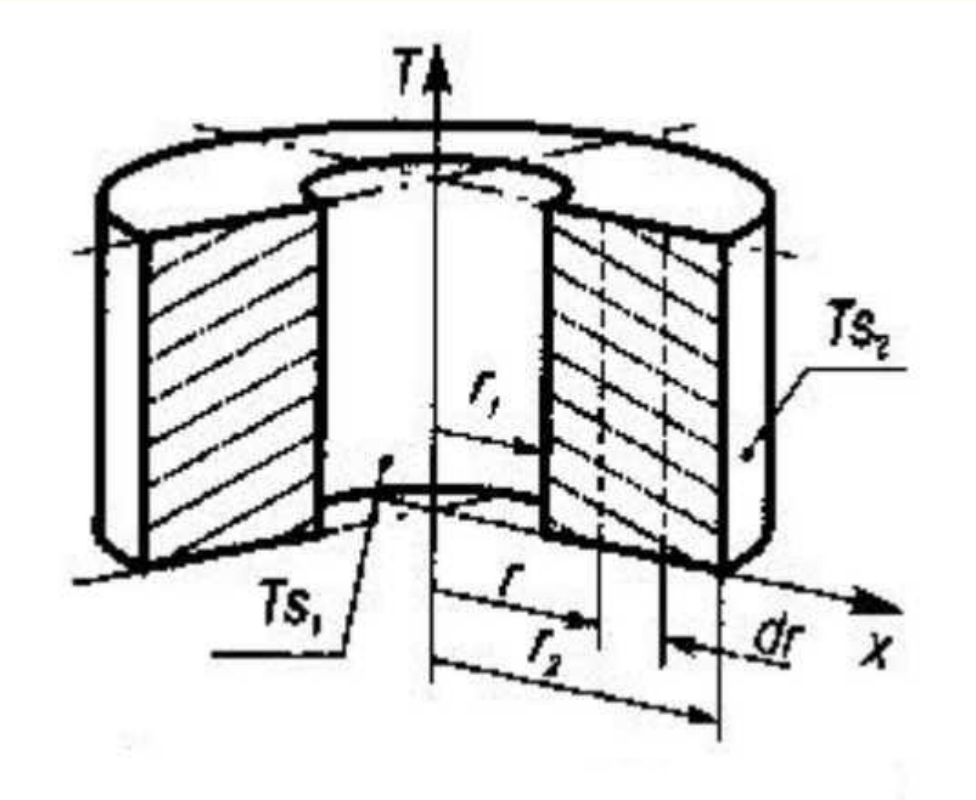
$$q = \frac{\lambda_{экв}}{\sum \delta_i}(Ts_1 - Ts_{n+1}) \qquad \lambda_{экв} = \frac{\sum \delta_i}{\sum \delta_i / \lambda_i}$$

Эквивалентный коэффициент теплопроводности позволяет сравнивать теплопроводящие свойства многослойной стенки, составленной из разнородных материалов, с однослойной стенкой, выполненной из однородного материала.

Внутри слоя распределение температуры описывается как:

$$T_{xi} = Ts_i - q\frac{x_i}{\lambda_i}$$

Цилиндрическая стенка



Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в бесконечной цилиндрической стенке.

Если граничные условия на внутренней ($r = r_1$) и внешней ($r = r_2$) поверхностях не зависят от угла θ и z, то в стационарном случае уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Цилиндрическая стенка

Пусть заданы граничные условия первого рода:

при $r = r_1$, $T = Ts_1$
при $r = r_2$, $T = Ts_2$

Определим распределение температуры по толщине стенки:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

После первого интегрирования: $r\frac{dT}{dr} = C_1$ $\qquad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$

После второго интегрирования: $T(r) = C_1 \ln r + C_2$

Цилиндрическая стенка

Находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{Ts_2 - Ts_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad C_2 = Ts_2 - \frac{Ts_2 - Ts_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r_2 = \frac{Ts_1 \ln r_2 - Ts_2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Общее решение:

$$T(r) = \frac{Ts_2 - Ts_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r + \frac{Ts_1 \ln r_2 - Ts_2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{Ts_2 \ln \frac{r}{r_1} + Ts_1 \ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Цилиндрическая стенка

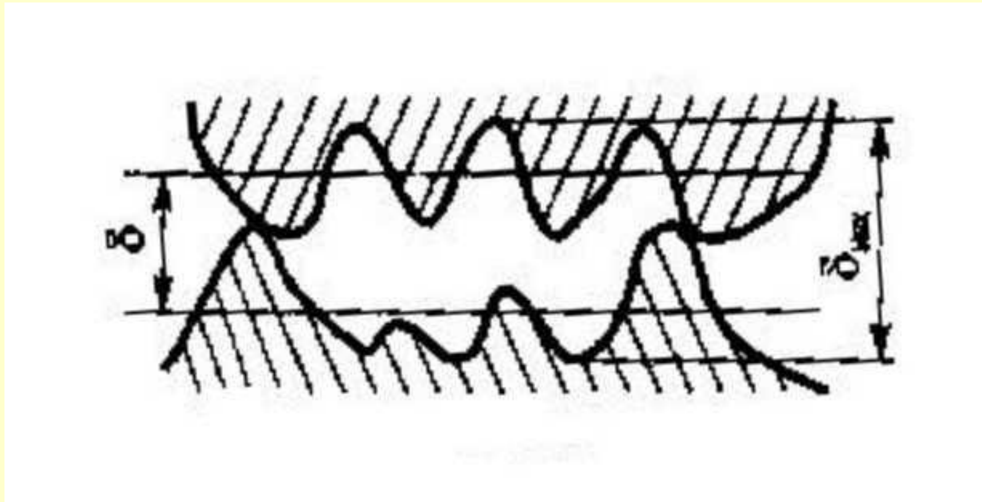
Анализ формулы показывает:

1) **Удельный тепловой поток в цилиндрической стенке q = -λdT/dr непостоянен по толщине и убывает к внешней поверхности трубы (dT/dr ~ 1/r). Это связано с тем, что в стационарных условиях должен быть постоянным полный тепловой поток, проходящий через участок цилиндрической трубы равный qS. Поскольку S увеличивается с радиусом, то тепловой поток должен убывать.**
2) **Температура по толщине цилиндрической стенки изменяется нелинейно – по логарифмическому закону**

Количество тепла, проходящее через участок цилиндрической трубы длиной L в единицу времени не зависит от r:

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r L = \lambda \frac{Ts_1 - Ts_2}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} 2\pi r L = \lambda \frac{Ts_1 - Ts_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} 2\pi L$$

Контактное термическое сопротивление



Идеально плотный контакт между отдельными слоями многослойной стенки получается, если один из слоев наносят на другой в жидком состоянии или в виде текучего раствора. Твердые тела касаются друг друга вершинами профилей шероховатостей. Площадь контакта вершин пренебрежимо мала, и весь тепловой поток идет через воздушный зазор. Это создает дополнительное (контактное) термическое сопротивление $R_к$ (кг*К/Дж). Его можно приближенно оценить, если принять, что толщина зазора между соприкасающимися телами б в среднем вдвое больше максимального расстояния $б_{макс}$ между впадинами.

Контактное термическое сопротивление

При контакте двух пластин с шероховатостью поверхности 5-го класса (после чистовой обточки, строгания, фрезерования) $\delta_{макс} \approx 0{,}03$ мм и в воздухе комнатной температуры

$$R_k = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1.5 \cdot 10^{-5}}{2.59 \cdot 10^{-2}} = 0.58 \cdot 10^{-3}$$

Это эквивалентно термическому сопротивлению стали толщиной около 30 мм.

Для уменьшения контактного сопротивления необходимо заполнять зазоры каким-либо материалом с более высокой, чем у воздуха, теплопроводностью, например спаять или склеить поверхности