18. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. В этом случае могут возникнуть *затухающие колебания***.**

Рассмотрим колебательную систему в которой помимо возвращающей силы имеются силы сопротивления. Запишем второй закон Ньютона для тела массой *m*.

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} = m\vec{a}$$

Возвращающая сила является квазиупругой

$$\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}$$

Сила сопротивления пропорциональна скорости (*b* – коэффициент сопротивления)

$$\vec{F}_{\text{ñîïð}} = -b\vec{\upsilon}$$

В проекциях уравнение принимает вид:

$$-kx - b\upsilon = ma$$

$$-kx - bx' = mx''$$

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

Коэффициент затухания $\beta = \dfrac{b}{2m}$

Квадрат собственной циклической частоты $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Получили дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

Для решения однородного ДУ 2-го порядка запишем характеристическое уравнение и найдем его корни (сведения из математики):

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

$$a^2 + \frac{b}{m}a + \frac{k}{m} = 0$$

$$D = \left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

$$a_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

$$a_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{(-1)\left(\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right)} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$a_{1,2} = -\beta \pm i\omega, \quad i = \sqrt{-1}$$

Решением ДУ является функция вида:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\left(\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) + \sin\left(\omega t + \varphi_0\right)\right)$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

где A_0 и ϕ_0 – начальные амплитуда и начальная фаза соответственно.

Следовательно, решением ДУ является функция, описывающая зависимость координаты тела при затухающих колебаниях:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

где A_0 и ϕ_0 – начальные амплитуда и начальная фаза соответственно.

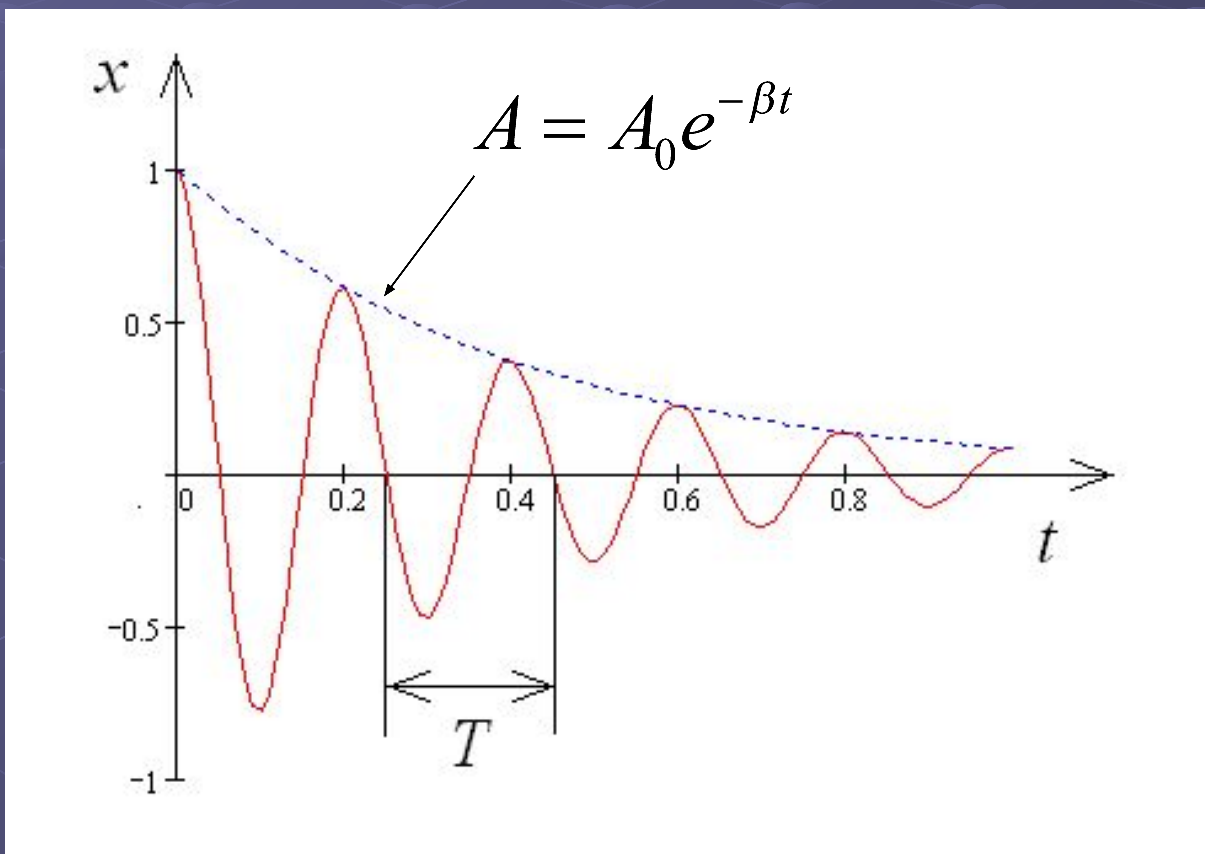
Функция удовлетворяет условию:

$$x(t)\Big|_{t\to\infty} = 0$$

Графически зависимость *x(t)* выглядит как гармоническое колебание с уменьшающейся амплитудой. Например:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$$

$$A_0 = 1, \qquad \beta = 2,5\ \tilde{n}^{-1}$$



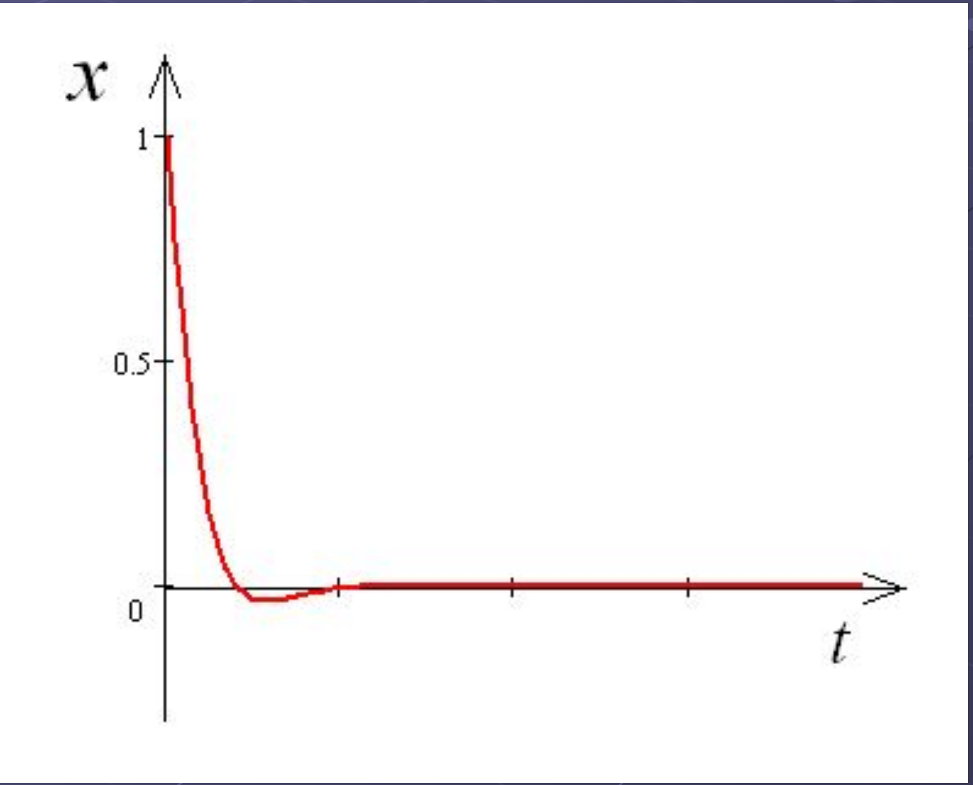
Циклическая частота затухающих колебаний уменьшается по сравнению с собственной частотой колебаний системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Период колебаний увеличивается по сравнению с собственным периодом T_0 :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0 \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

При увеличении коэффициента затухания *β* период затухающих колебаний возрастает и обращается в бесконечность при $\beta=\omega_0$. Такое движение системы не имеет колебательного характера и называется *апериодическим движением*.



Практическое применение апериодического движения:

1. Плавное закрытие дверей;
2. Амортизаторы автомобилей;
3. Успокоение колебаний стрелочных приборов (воздушные, электромагнитные демпферы).

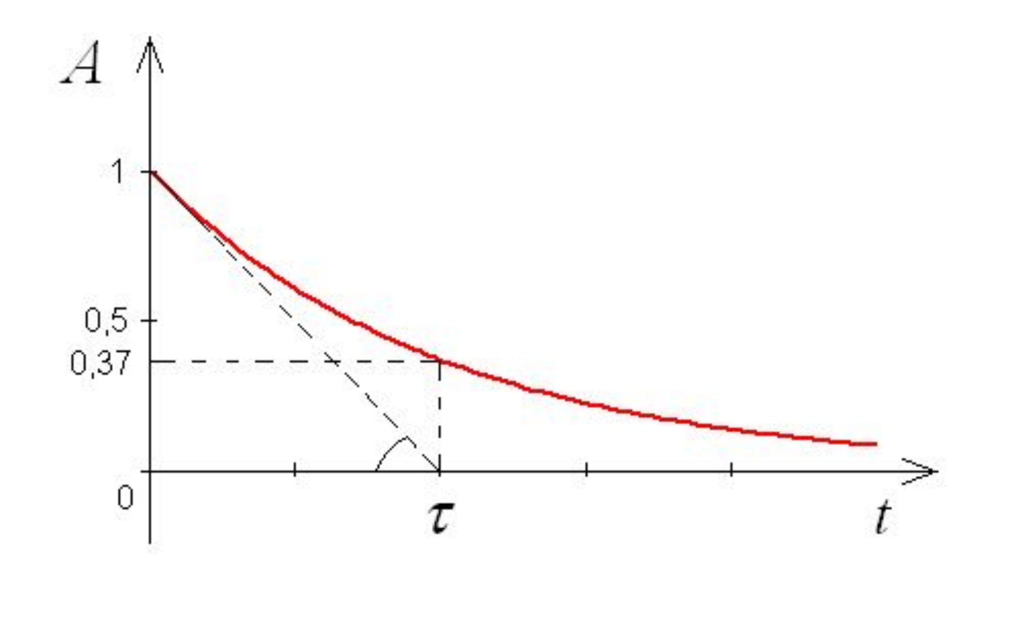
Амплитуда колебания со временем уменьшается по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

Промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз, называется временем релаксации:

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Однако время релаксации можно определить и другим способом. Найдем производную функции A(t) в начальный момент времени.



$$A' = \left(A_0 e^{-\beta t}\right)' = -\beta A_0 e^{-\beta t}$$

$$A'(0) = -\beta A_0 = -\frac{A_0}{\tau}$$

Время релаксации можно определить по касательной в в начальной точке. Пример: моделирование процессов релаксации (радиоактивный распад).

Для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний пользуются понятиями *декремента δ* (отношение амплитуд через период) и *логарифмического декремента λ* затухания:

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

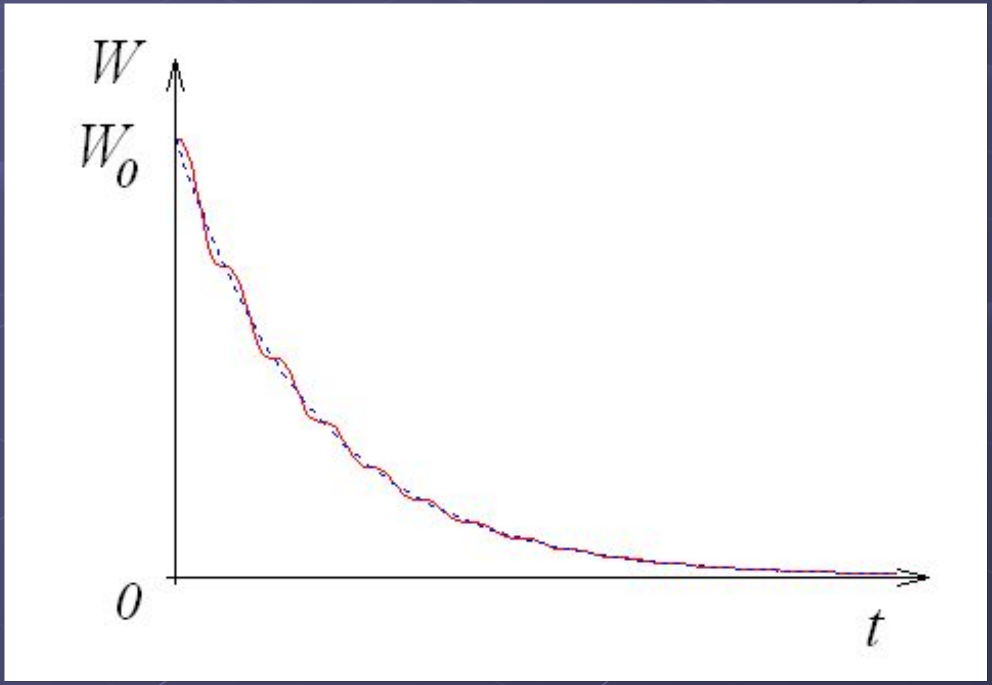
$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

N_e – число колебаний за время, равное времени релаксации.

Полную энергию можно найти, подставив выражение для смещения и скорости в формулу:

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Зависимость полной энергии от времени представлена на рисунке.



При малом затухании ($\beta \ll \omega$) выражение для полной энергия колебательной системы принимает вид:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}$$

Полная энергия колебательной системы уменьшается со временем по экспоненциальному закону.

Добротностью Q колебательной системы называется безразмерная величина, равная произведению 2π на отношение энергии системы в произвольный момент времени к убыли этой энергии за период:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} =$$

$$= 2\pi \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}$$

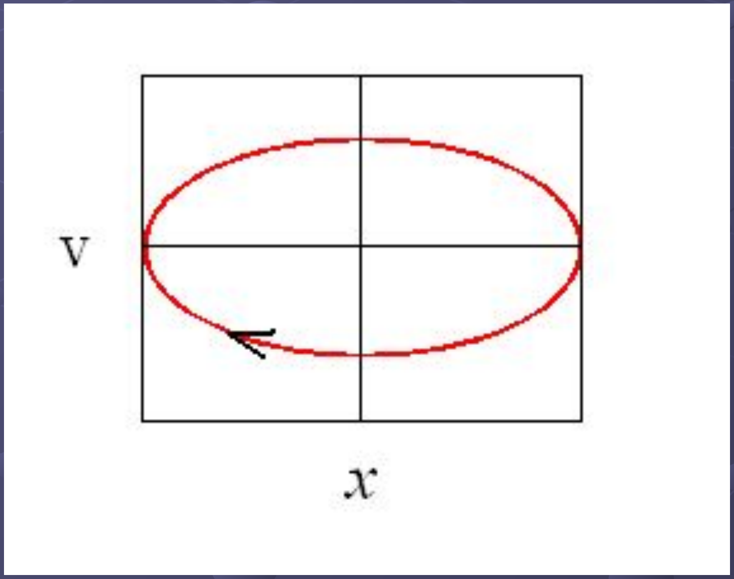
При малом затухании:

$$Q \approx \frac{2\pi}{1-\left(1-2\beta T\right)} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e$$

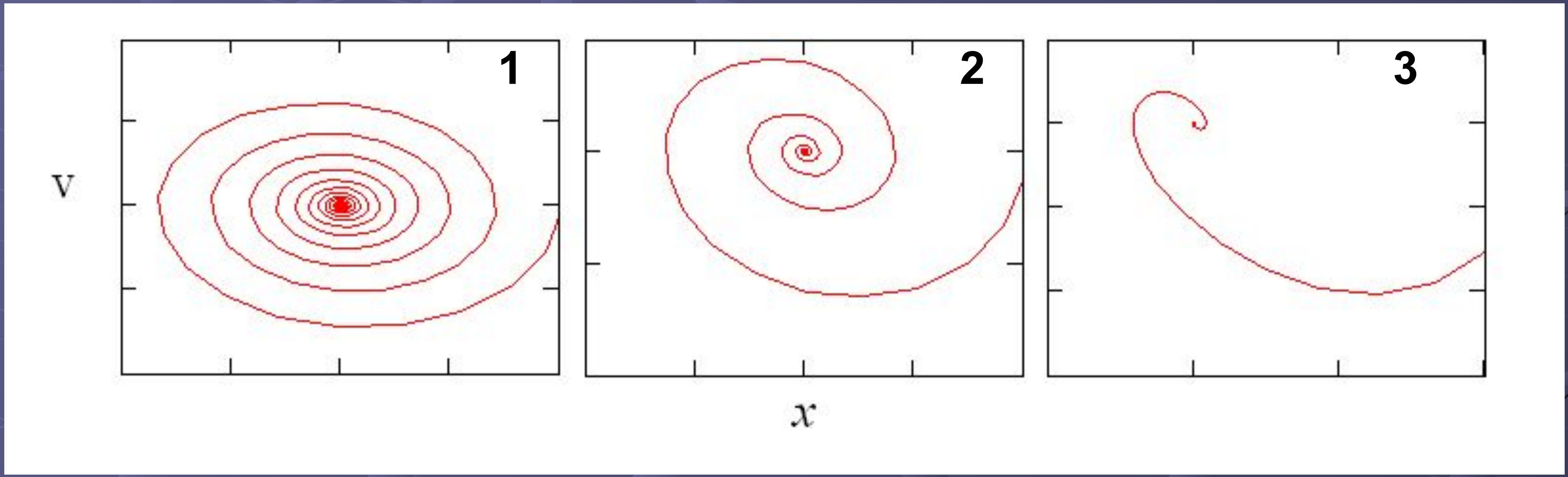
Добротность пропорциональная числу колебаний за время релаксации N_e.

В ряде случаев удобно изучать колебательные процессы в системе координат (x, v). Плоскость таких координат называют *фазовой плоскостью*, - а кривая – *фазовой траекторией*.

Например, *фазовым портретом* гармонического колебания является эллипс.



Фазовым портретом затухающего колебания является винтовая линия (спираль).



С увеличением номера рисунка растет коэффициент затухания.

19. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденными колебаниями называются незатухающие колебания системы, которые вызываются действием на нее внешних сил, периодически изменяющихся во времени.

Примеры вынужденных колебаний: колебания мембраны телефона, колебания силы тока в электрической сети, колебания гребных винтов, валов турбин под действием периодически изменяющихся внешних сил.

В качестве модели рассмотрим тело, совершающее колебания под действием возвращающей квазиупругой силы, силы сопротивления и внешней периодической силы. Второй закон Ньютона принимает вид:

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-kx - b\upsilon + F_o \cos\omega t = ma$$

Преобразуя, получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (1):

$$mx'' + bx' + kx = F_o \cos \omega t \qquad (1)$$

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

$$\beta = \frac{b}{2m}, \;\; \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

β и ω_0 – коэффициент затухания и циклическая частота свободных незатухающих колебаний.

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний равно сумме двух решений: общего и частного:

$$x(t) = x_{о}(t) + x\ (t)$$

Общее решение – уравнение затухающего колебания, частное – установившееся колебание, описываемое уравнением:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

где *A* – амплитуда вынужденных колебаний смещения,
ϕ – разность фаз между колебаниями смещения и силы.

Подставим решение (2) в уравнение (1) и определим амплитуду и фазу между силой и смещением:

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)-bA\omega\sin\left(\omega t+\varphi\right)+$$
$$+kA\cos(\omega t+\varphi)=F_0\cos\omega t$$

$$-m\omega^2 A\left(\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right)-$$
$$-bA\left(\sin\left(\omega t\right)\cos\left(\varphi\right)+\cos\left(\omega t\right)\sin\left(\varphi\right)\right)+$$
$$+kA\left(\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right)=F_0\cos\omega t$$

при косинусе

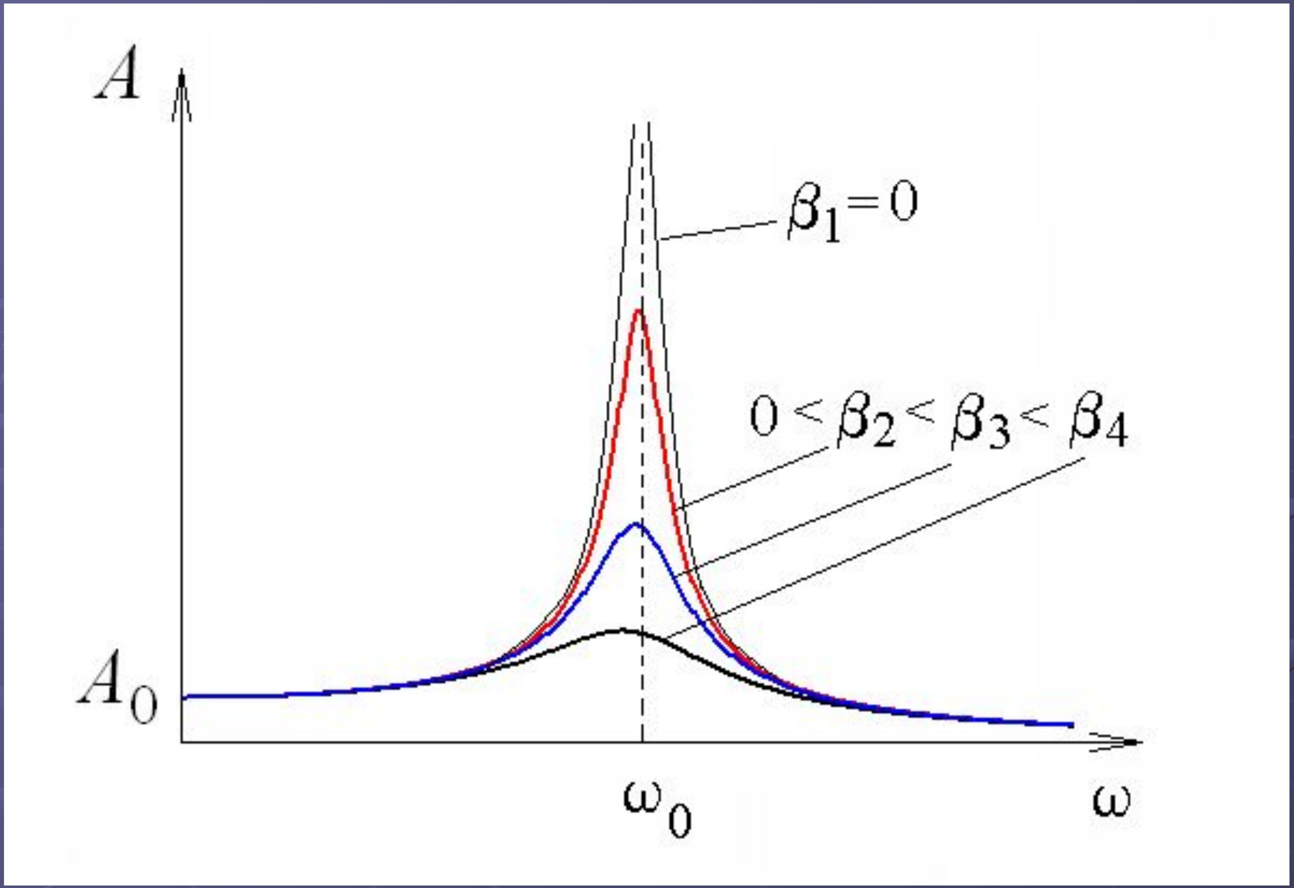
$$-m\omega^2 A\cos(\varphi) - bA\omega\sin(\varphi) + kA\cos(\varphi) = F_0 \quad (3)$$

при синусе

$$m\omega^2 A\sin(\varphi) - bA\omega\cos(\varphi) + kA\sin(\varphi) = 0 \quad (4)$$

Решая совместно (3) и (4), находим амплитуду *A* установившихся вынужденных колебаний и сдвиг фаз межу колебаниями силы и смещения:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

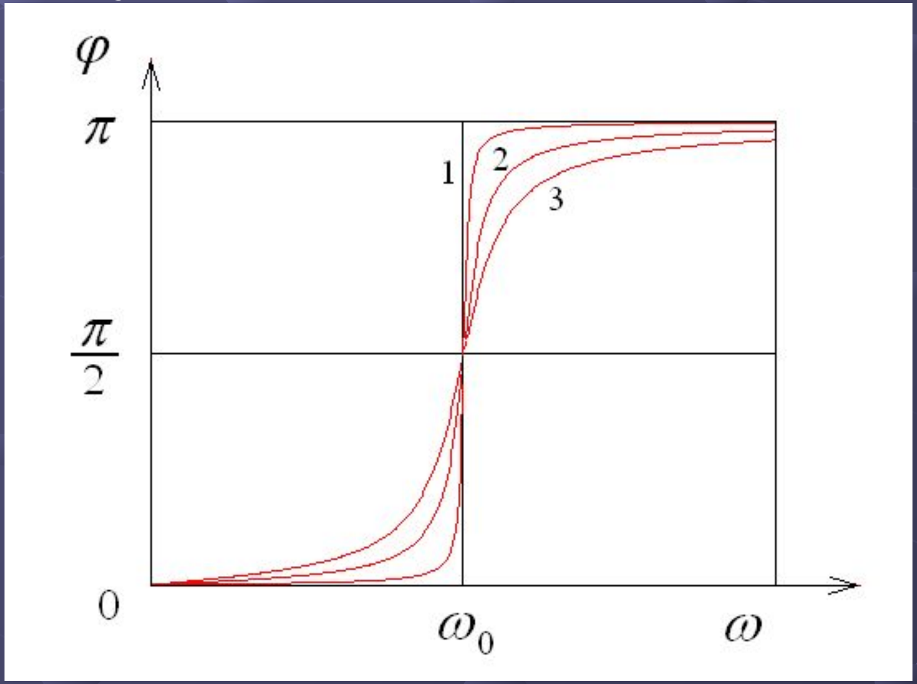


Амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает при приближении к некоторой частоте – *явление резонанса колебаний*. С увеличением коэффициента затухания амплитуда в колебаний при резонансе снижается.

Разность фаз между колебаниями силы и смещения определяется соотношением:

$$tg\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

График зависимости угла отставания колебаний смещения от силы представлен на рисунке. Увеличению номера соответствует увеличение коэффициента затухания.



В области малых частот амплитуда вынужденных колебаний почти постоянна, а сдвиг фаз равен нулю:

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \qquad \varphi = 0$$

$$x(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos(\omega t)$$

В области малых частот колебания системы практически без искажения следуют за силой. Это важно с точки зрения измерительной техники.

Для нахождения резонансной частоты для амплитуды колебаний необходимо найти максимум функции A(ω), т.е. приравнять к нулю производную по частоте:

$$\left(\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \right)' = 0$$

В результате, резонансная частота равна:

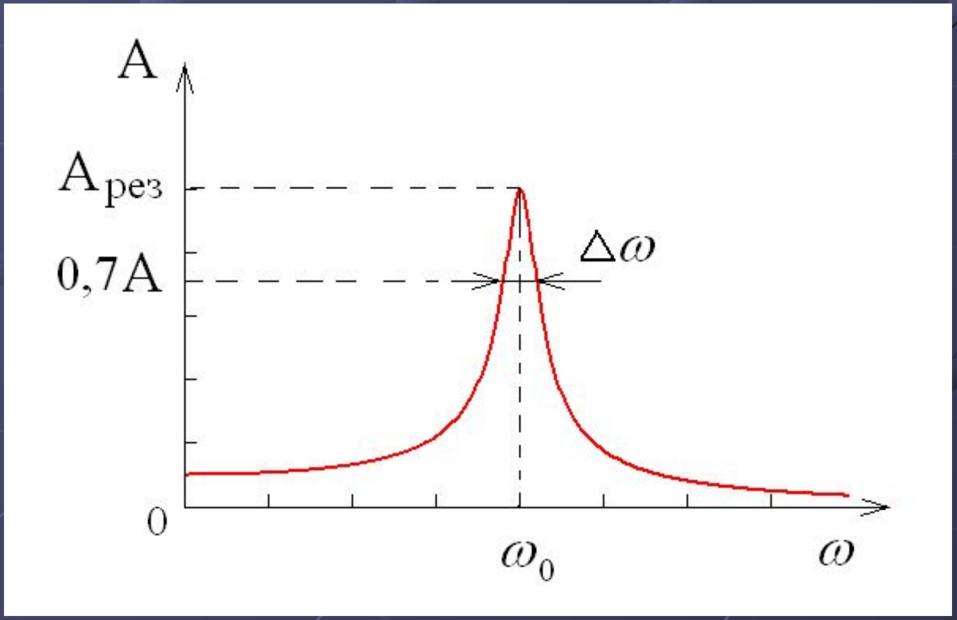
$$\omega_{ð} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Форма резонансной кривой определяется добротностью колебательной системы. Так отношение амплитуд на резонансной частоте и A_0 равно добротности:

$$\frac{A_{рез}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

Добротность равна отношению резонансной частоты к ширине резонансной кривой на уровне $0{,}7A_{рез}$.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$



Резонансная частота для амплитуды скорости находится аналогичным образом:

$$\upsilon_0(\omega) = \omega A(\omega)$$

$$\left(\frac{\omega F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \right)' = 0$$

$$\omega_p^{скор} = \omega_0$$

Для анализа частотной зависимости амплитуды ускорения необходимо исследовать функцию:

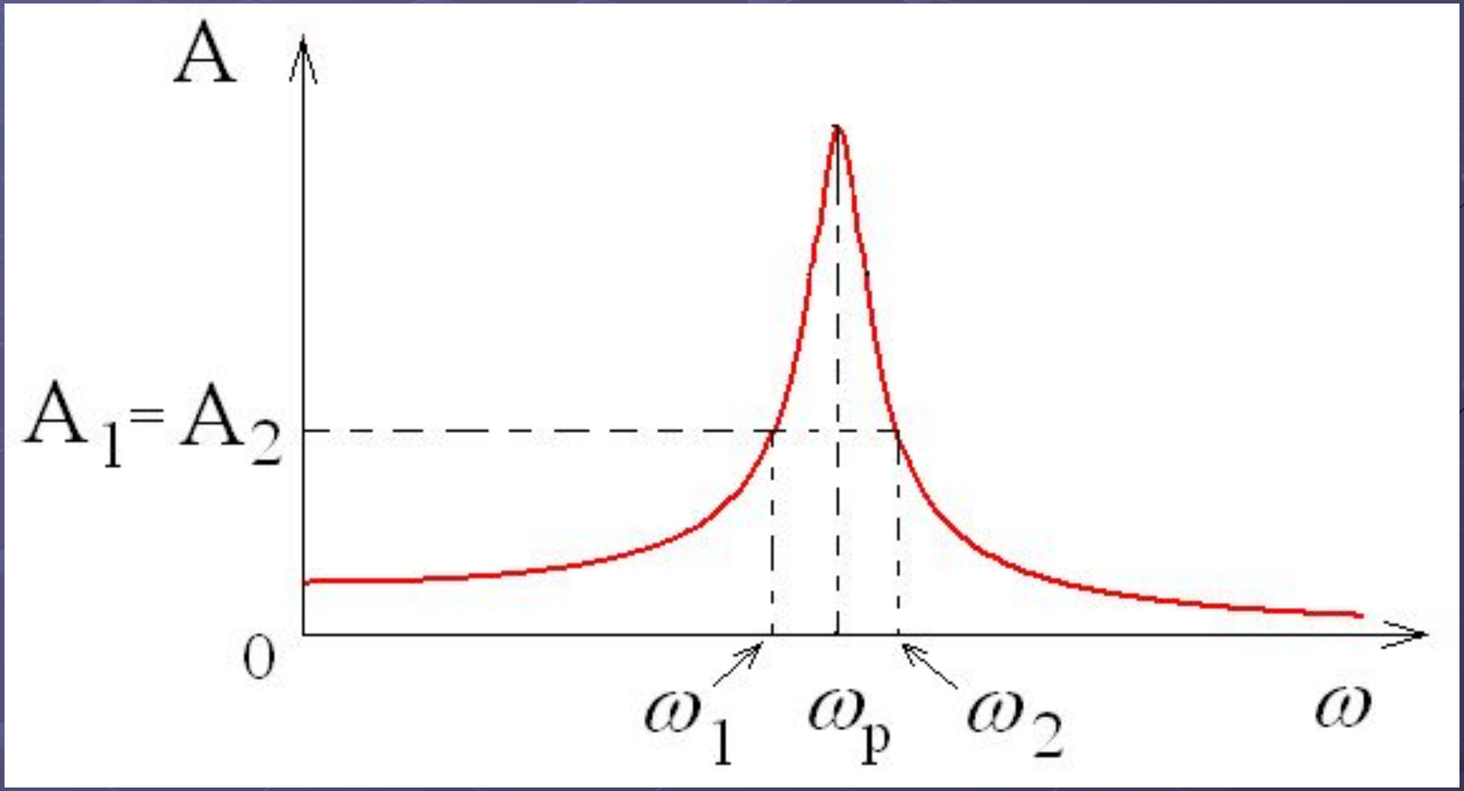
$$a_0(\omega) = \omega^2 A(\omega)$$

$$\left(\frac{\omega^2 F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \right)' = 0$$

Резонансная частота для амплитуды ускорения определяется соотношением

$$\omega_p^{уск} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

Приведем пример определения резонансной частоты для амплитуды смещения. Для этого находят частоты, на которых амплитуды одинаковы.



Вычисляют резонансную частоту.

$$A_1(\omega_1) = A_2(\omega_2)$$

$$\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}}$$

$$\omega_{\partial} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad \omega_{\partial} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + \omega_1^2}{2}}$$

Явление резонанса необходимо учитывать при конструировании машин и сооружений. Резонансная частота не должна быть близка к внешней частоте.

Явление резонанса используется в акустике, радиотехнике, в науке и технике.

Параметрические колебания

Возбудить незатухающие колебания можно и другим способом – периодическим изменением в такт с колебаниями системы одного из параметров системы. Например, с помощью периодического изменения длины маятника. Подобные колебания называются *параметрическими*.

В момент прохождения маятником равновесия, под действием силы уменьшается длина маятника. В результате угол отклонения увеличивается. Таким образом, под действием внешнего воздействия (изменения длины маятника) поддерживаются незатухающие колебания.

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} = mgl\left(1-\cos\alpha\right)$$

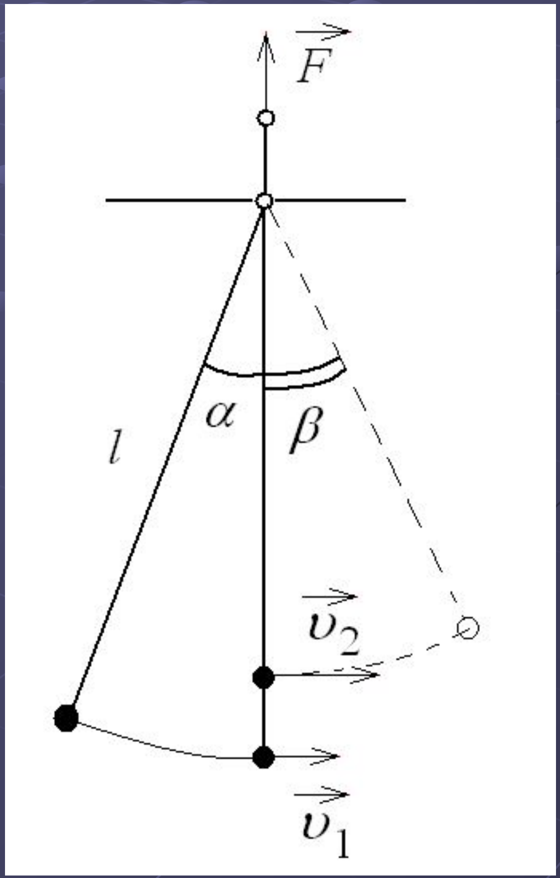
$$\upsilon_1 = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)}$$

$$m\upsilon_1 l = m\upsilon_2\left(l-\Delta l\right)$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_1\frac{l}{l-\Delta l}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g\left(l-\Delta l\right)\left(1-\cos\beta\right)}$$

$$\beta \approx \alpha\left(\frac{l}{l-\Delta l}\right)^{\frac{3}{2}}$$



Автоколебания

Восполнять убыль энергии можно за счет поступлений энергии из вне в определенные моменты времени (согласованно). Можно сделать так, чтобы колеблющая система сама управляла внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется *автоколебательной*, а совершаемые незатухающие колебания – *автоколебаниями*.

Примеры: колебания маятника в часах, ламповый генератор.