

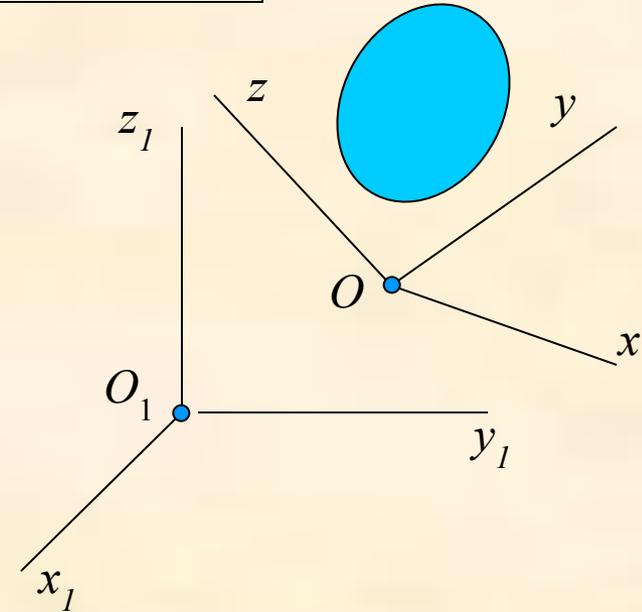
# КИНЕМАТИКА

Сложное движение твердого тела



## Сложение движение тела

**Опр.** Движение тела называется *сложным*, если оно движется относительно подвижных  $Oxyz$ , а эти оси совершают переносное движение по отношению к неподвижным осям  $O_1x_1y_1z_1$ .



## Сложение поступательных движений

Пусть относительное движение является поступательным со скоростью  $\vec{V}_1$ , а переносное движение – тоже поступательное со скоростью  $\vec{V}_2$

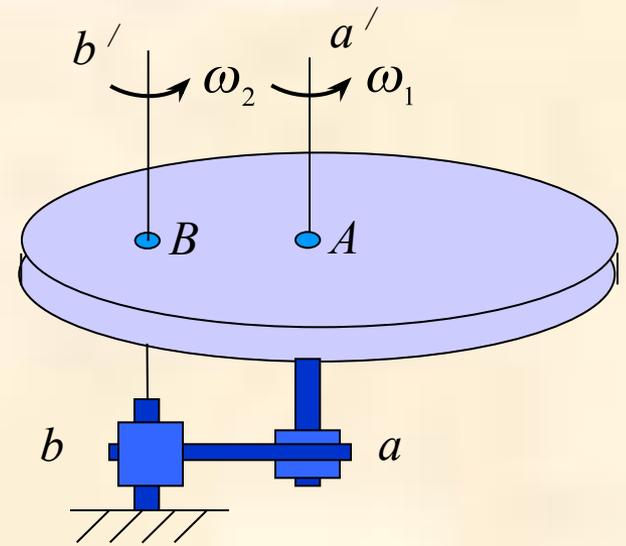
Тогда все точки тела в относительном движении будут иметь скорость  $\vec{V}_1$ , а в переносном – скорость  $\vec{V}_2$ .

По теореме о сложении скоростей все точки тела в абсолютном движении имеют одну и ту же скорость  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ , т.е. абсолютное движение тела будет тоже поступательным.

**Вывод.** При сложении двух поступательных движений со скоростями  $\vec{V} = \vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  результирующее движение также будет поступательным со скоростью  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ .

### Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси  $aa'$ , укрепленной на оси  $ba$ , а переносное – вращением кривошипа  $ba$  вокруг оси  $bb'$ , параллельной  $aa'$ , с угловой скоростью  $\omega_2$ .

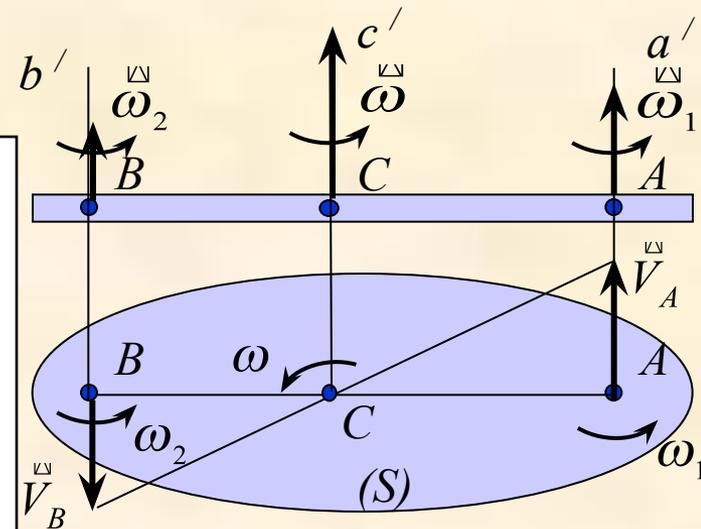


## Случай 1. Вращения направлены в одну сторону

Рассмотрим сечение  $(S) \perp$  осям вращения  $aa'$  и  $bb'$ . Точки  $A$  и  $B$  – следы от осей вращения. Точка  $A$  имеет скорость только за счет вращения вокруг оси  $Bb'$ , следовательно,  $V_A = \omega_2 \cdot AB$ . Точно так же  $V_B = \omega_1 \cdot AB$ . М.ц.с. для  $(S)$  в точке  $C$ . Угловая скорость  $(S)$  -  $\omega = V_A/AC = V_B/BC$ .

Откуда  $\omega = (V_A + V_B)/AB = \omega_1 + \omega_2$ .

**Вывод.** При сложении вращений, направленных в одну сторону, результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  вокруг мгновенной оси, параллельной данным осям.



## Случай 2. Вращения направлены в разные стороны.

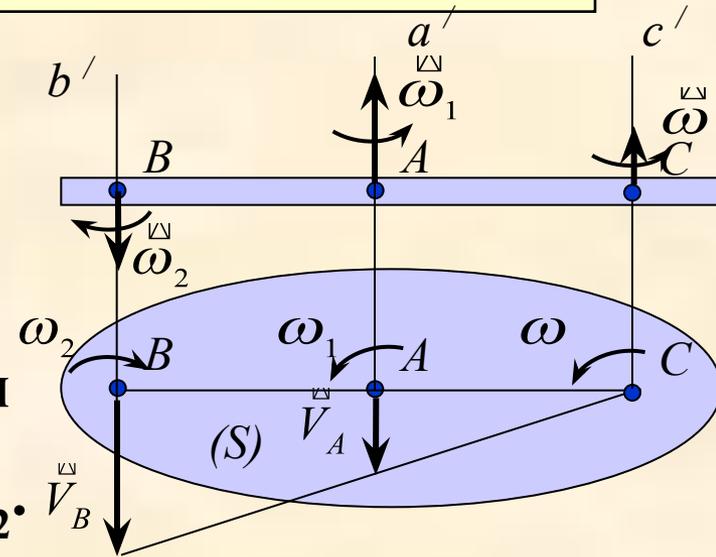
Предположим, что  $\omega_1 > \omega_2$ .

По аналогии с предыдущим случаем:

$$V_A = \omega_2 \cdot AB. \quad V_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Мгновенная ось  $Cc'$  вращения будет проходить через м.ц.с. – точку  $C$ , причем

$$\omega = V_B / BC = V_A / AC \text{ и } (V_B - V_A) / AB = \omega_1 - \omega_2.$$



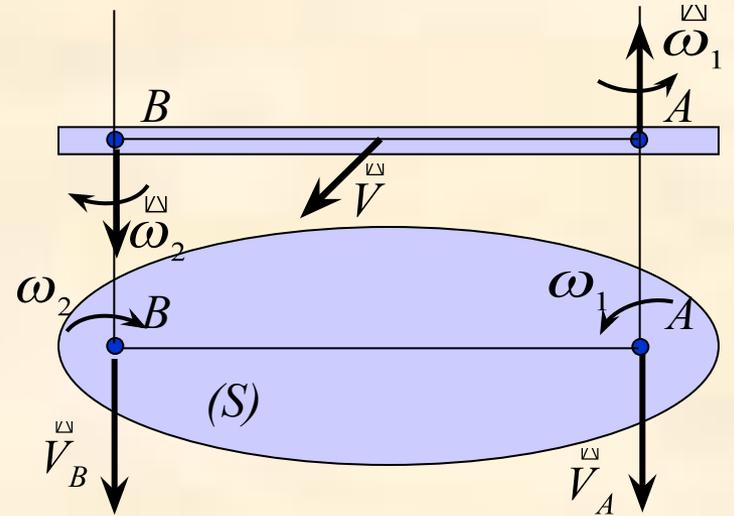
Подставляя в последнее выражение  $V_A$  и  $V_B$ , получим

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \text{ и} \\ \omega / AB = \omega_1 / BC = \omega_2 / AC. \quad (*)$$

**Вывод.** При сложении вращений, направленных в разные стороны, результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью  $\omega = \omega_1 - \omega_2$  вокруг мгновенной оси  $Cc'$ , параллельной данным осям, положение которой определяется пропорциями (\*).

### Случай 3. Пара вращений

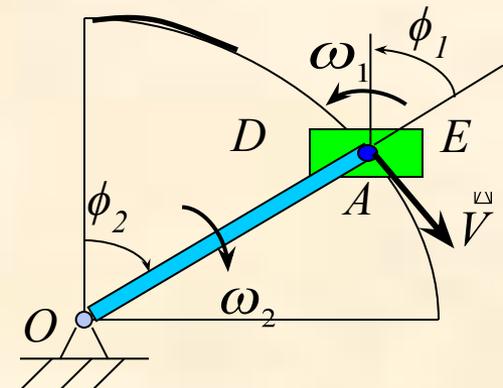
Рассмотрим случай, когда вращения направлены в разные стороны, но по модулю  $\omega_1 = \omega_2$ . Такая совокупность вращений называется *парой вращений*, а векторы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  образуют *пару угловых скоростей*.



Для скоростей точек  $A$  и  $B$ :  $V_A = \omega_2 \cdot AB$ ,  $V_B = \omega_1 \cdot AB$ , т. е.  $V_A = V_B$ . Ц.с. находится в бесконечности, поэтому скорости всех его точек равны и численно определяются по формуле:  $V = \omega_1 \cdot AB$ .

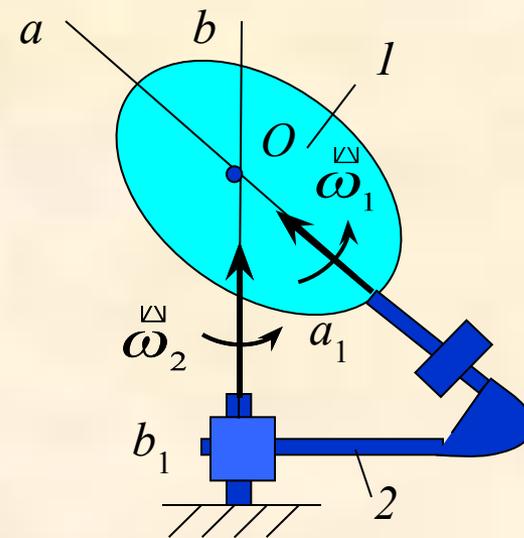
**Вывод.** В случае пары вращения движение тела будет поступательным со скоростью численно равной  $\omega_1 \cdot AB$  и направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ; направление вектора  $V$  определяется также же, как в статике определяется направление момента пары  $m$ .

## Пример. Велосипедная педаль.



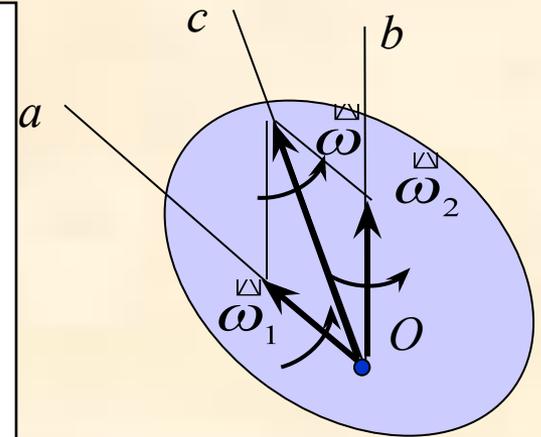
## Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть относительное движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью  $\vec{\omega}_1$  вокруг оси  $a_1a$ , укрепленной на кривошипе 2, а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью  $\vec{\omega}_2$  вокруг оси  $b_1b$ , которая с осью  $a_1a$  пересекается в точке  $O$ .



Скорость точки  $O$  равна нулю, т.е. тело 1 совершает сферическое движение. Угловая скорость тела  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ .

**Вывод.** При сложении вокруг двух осей, пересекающихся в точке  $O$ , результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси  $Oc$ , проходящей через точку  $O$ , и угловая скорость этого вращения будет равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей.



Мгновенная ось  $Oc$  направлена вдоль вектора  $\vec{\omega}$ , т. е. по диагонали параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$ .

### Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Переносное движение – движение платформы со скоростью  $\vec{V}$ .  
 Относительное движение – вращение с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

**Случай 1.  $\vec{\omega} \perp \vec{V}$ .**

Пусть тело вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  и движется поступательно со скоростью  $\vec{V}$ .

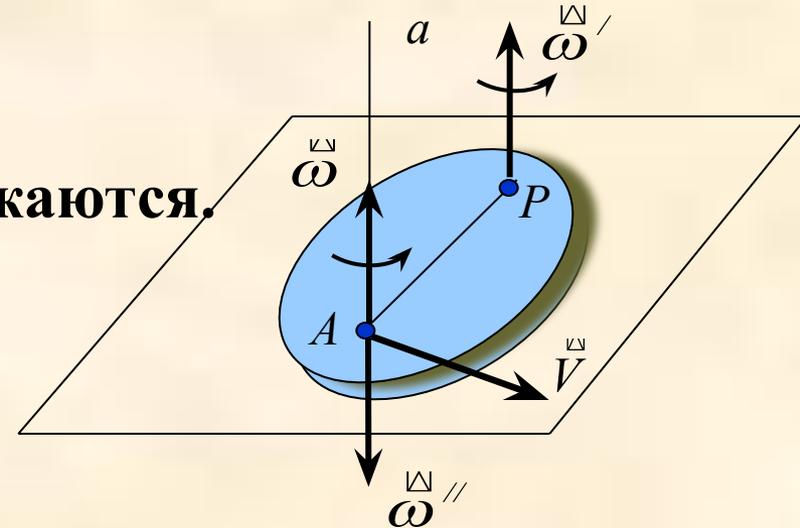
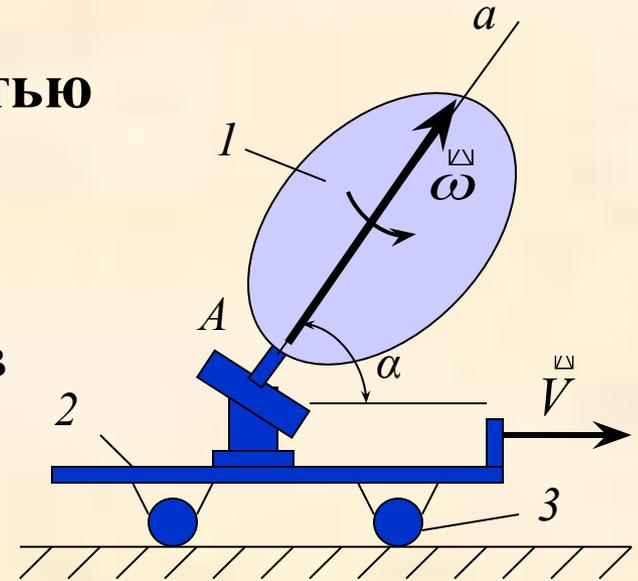
Представим поступательное движение в виде пары вращений  $\vec{\omega}'$ ,  $\vec{\omega}''$ . При этом  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ , а  $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ .

Расстояние определится в виде:

$$AP = V / \omega .$$

Векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\omega}''$  взаимно уничтожаются.

Точка  $P$  будет м.ц.с.



**Случай 2. Винтовое движение ( $\vec{V} \parallel \vec{\omega}$ ).**

Если сложное движение тела складывается из вращательного вокруг оси  $Aa$ , с угловой скоростью  $\omega$  и поступательного со скоростью  $V$ , направленного параллельно оси  $Aa$ , то движение называется *винтовым*.

Ось  $Aa$  называется осью винта.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, не лежащей на оси винта, называется шагом  $h$  винта. Можно показать, что  $h = 2\pi V / \omega$ .

