

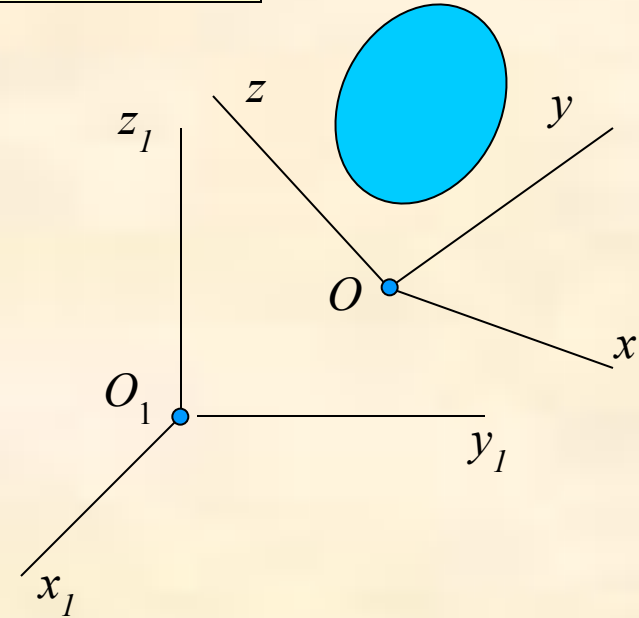
КИНЕМАТИКА

Сложное движение твердого тела



Сложение движение тела

Опр. Движение тела называется *сложным*, если оно движется относительно подвижных $Oxyz$, а эти оси совершают переносное движение по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$.



Сложение поступательных движений

Пусть относительное движение является поступательным со скоростью \vec{V}_1 , а переносное движение – тоже поступательное со скоростью \vec{V}_2

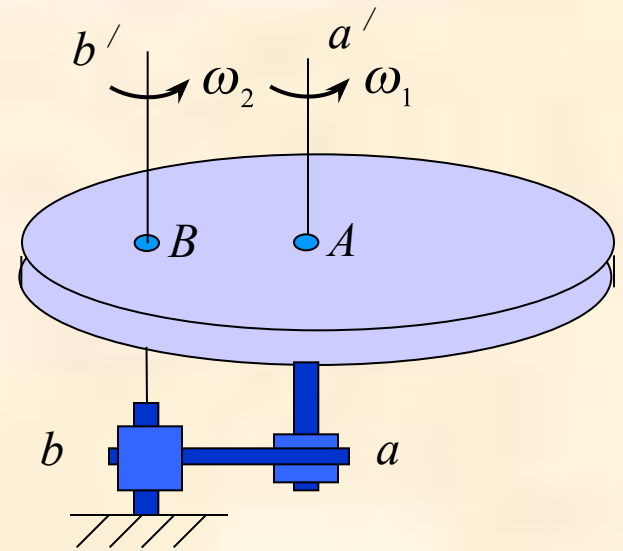
Тогда все точки тела в относительном движении будут иметь скорость \vec{V}_1 , а в переносном – скорость \vec{V}_2 .

По теореме о сложении скоростей все точки тела в абсолютном движении имеют одну и ту же скорость $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, т.е. абсолютное движение тела будет тоже поступательным.

Вывод. При сложении двух поступательных движений со скоростями $\vec{V} = \vec{V}_1$ и \vec{V}_2 результирующее движение также будет поступательным со скоростью $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси aa' , укрепленной на оси ba , а переносное – вращением кривошипа ba вокруг оси bb' , параллельной aa' , с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$.

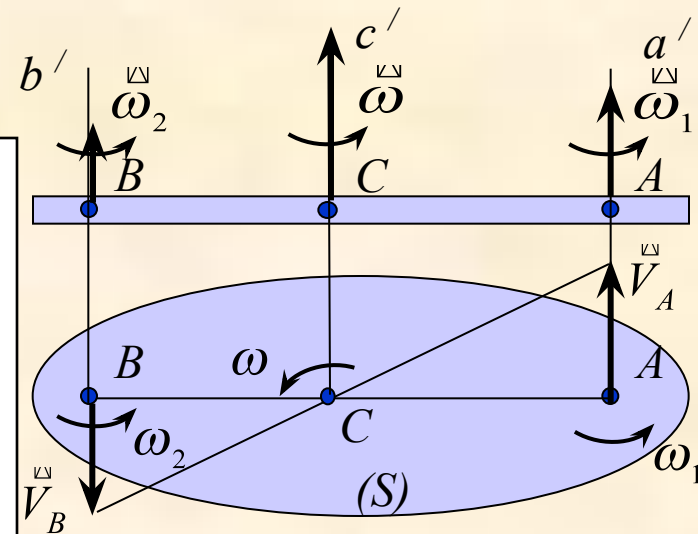


Случай 1. Вращения направлены в одну сторону

Рассмотрим сечение $(S) \perp$ осям вращения aa' и bb' . Точки A и B – следы от осей вращения. Точка A имеет скорость только за счет вращения вокруг оси Bb' , следовательно, $V_A = \omega_2 \cdot AB$. Точно так же $V_B = \omega_1 \cdot AB$. М.ц.с. для (S) в точке C . Угловая скорость (S) - $\omega = V_A/AC = V_B/BC$.

Откуда $\omega = (V_A + V_B)/AB = \omega_1 + \omega_2$.

Вывод. При сложении вращений, направленных в одну сторону, результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг мгновенной оси, параллельной данным осям.



Случай 2. Вращения направлены в разные стороны.

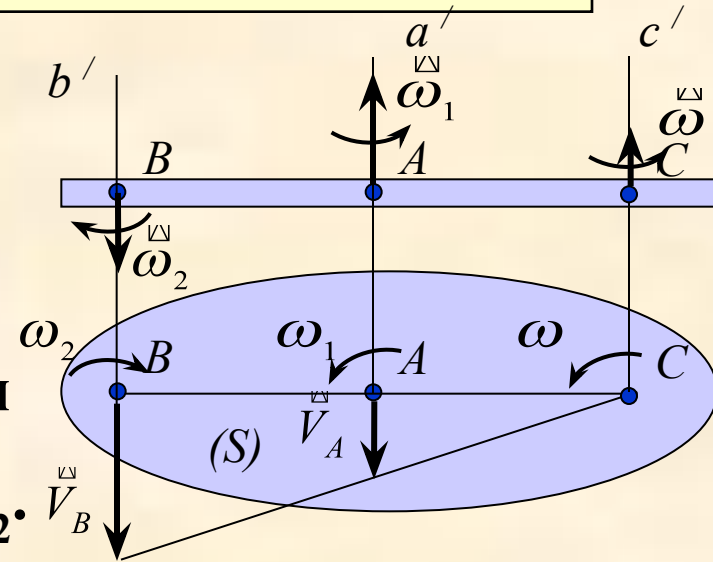
Предположим, что $\omega_1 > \omega_2$.

По аналогии с предыдущим случаем:

$$V_A = \omega_2 \cdot AB. \quad V_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Мгновенная ось Cc' вращения будет проходить через м.ц.с. – точку C , причем

$$\omega = V_B / BC = V_A / AC \text{ и } (V_B - V_A) / AB = \omega_1 - \omega_2.$$



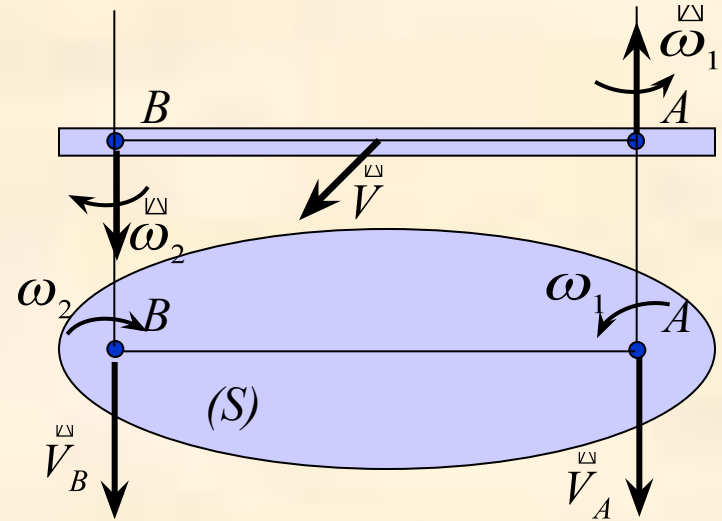
Подставляя в последнее выражение V_A и V_B , получим

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \text{ и} \\ \omega / AB = \omega_1 / BC = \omega_2 / AC. \quad (*)$$

Вывод. При сложении вращений, направленных в разные стороны, результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг мгновенной оси Cc' , параллельной данным осям, положение которой определяется пропорциями (*).

Случай 3. Пара вращений

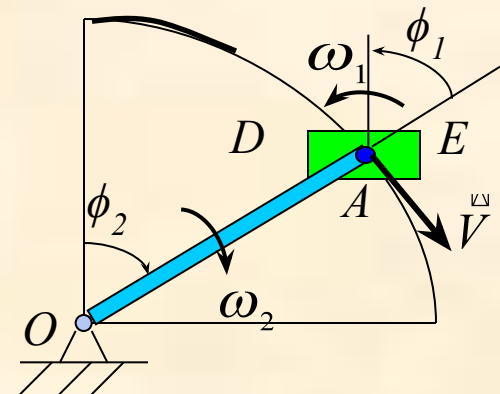
Рассмотрим случай, когда вращения направлены в разные стороны, но по модулю $\omega_1 = \omega_2$. Такая совокупность вращений называется *парой вращений*, а векторы ω_1 и ω_2 образуют *пару угловых скоростей*.



Для скоростей точек A и B : $V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$, т. е. $V_A = V_B$. Ц.с. находится в бесконечности, поэтому скорости всех его точек равны и численно определяются по формуле: $V = \omega_1 \cdot AB$.

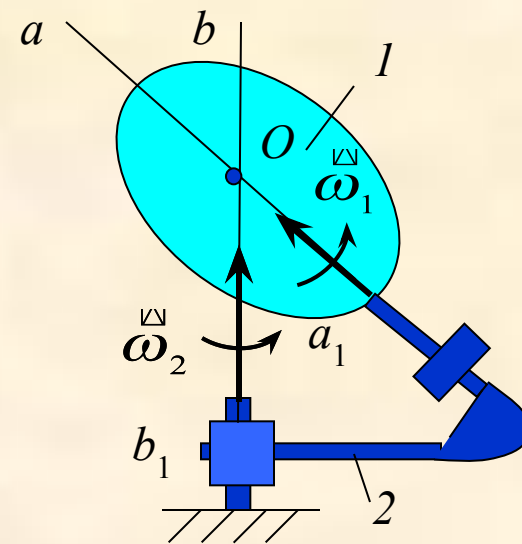
Вывод. В случае пары вращения движение тела будет поступательным со скоростью численно равной $\omega_1 \cdot AB$ и направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы ω_1 и ω_2 ; направление вектора V определяется также же, как в статике определяется направление момента пары m .

Пример. Велосипедная педаль.



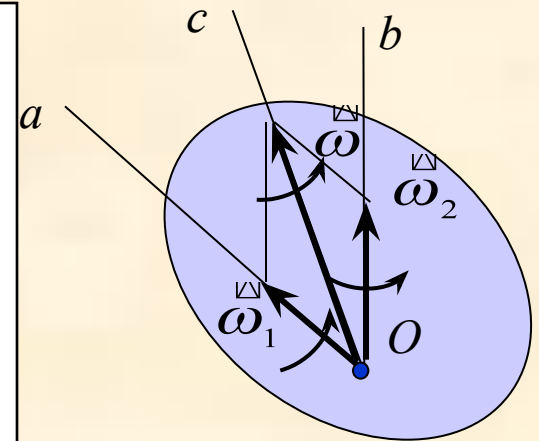
Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть относительное движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси a_1a , укрепленной на кривошипе 2, а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вокруг оси b_1b , которая с осью a_1a пересекается в точке O .



Скорость точки O равна нулю, т.е. тело 1 совершает сферическое движение. Угловая скорость тела $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Вывод. При сложении вокруг двух осей, пересекающихся в точке O , результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси Oc , проходящей через точку O , и угловая скорость этого вращения будет равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей.



Мгновенная ось Oc направлена вдоль вектора $\vec{\omega}$, т. е. по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$.

Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Переносное движение – движение платформы со скоростью \vec{V} .
 Относительное движение – вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Случай 1. $\vec{\omega} \perp \vec{V}$.

Пусть тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и движется поступательно со скоростью \vec{V} .

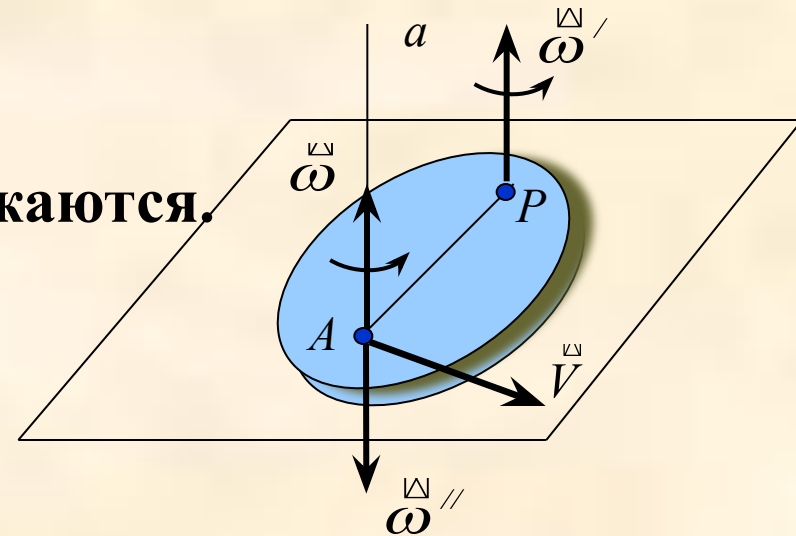
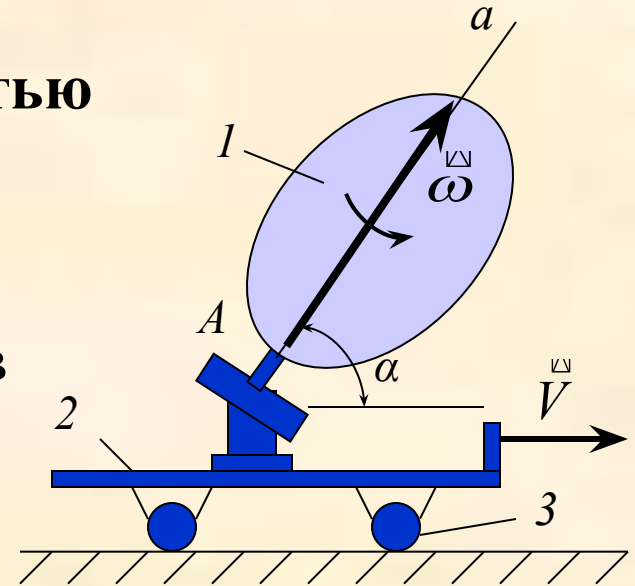
Представим поступательное движение в виде пары вращений $\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}''$. При этом $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, а $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$.

Расстояние определится в виде:

$$AP = V / \omega .$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ взаимно уничтожаются.

Точка P будет м.ц.с.



Случай 2. Винтовое движение ($\vec{V} \parallel \vec{\omega}$).

Если сложное движение тела складывается из вращательного вокруг оси Aa , с угловой скоростью ω и поступательного со скоростью V , направленного параллельно оси Aa , то движение называется *винтовым*.

Ось Aa называется осью винта.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, не лежащей на оси винта, называется шагом h винта. Можно показать, что $h = 2\pi V / \omega$.

