КИНЕМАТИКА

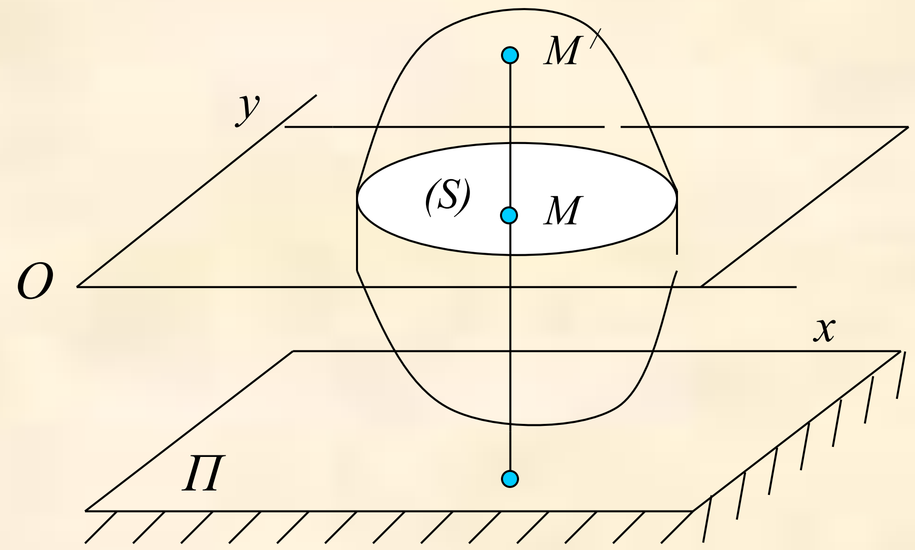
Тема 3. Кинематика твердого тела

Плоское движение

Определение плоского движения твердого тела

<u>Опр.</u> Плоскопараллельным (плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскости, параллельной некоторой фиксированной плоскости *П* .

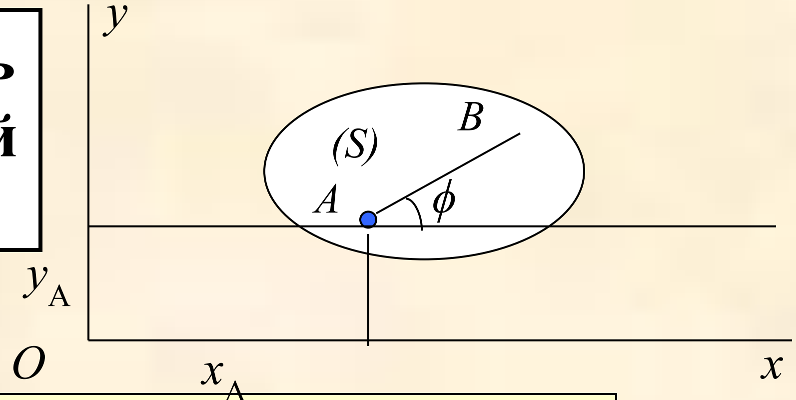
<u>Вывод.</u> Все точки тела, лежащие на прямой MM' движутся тождественно, то есть, нет необходимости изучать движение всего тела, а достаточно изучить движение сечение S этого тела в плоскости Oxy .



<u>Опр.</u> Плоской фигурой называется сечение *(S)* тела параллельное плоскости *П*, по отношению к которой движется тело.

Опр. Произвольная точка *A*, выбранная для определения положения плоской фигуры *(S)*, называется ***полюсом***.

В качестве полюса может быть выбрана любая точка плоской фигуры.



Уравнения плоского движения твердого тела

Так как тело абсолютно твердое, то положение плоской фигуры в любой момент времени определится любым отрезком *AB*, проведенным из полюса.
Положение отрезка AB можно определить, зная координаты полюса x_A, y_A и угол ϕ.

Вывод. Положение плоской фигуры в любой момент времени определяется зависимостями $x_A=f_1(t)$, $y_A=f_2(t)$, $\phi=f_3(t)$, которые называются ***уравнениями плоского движения твердого тела***.

Разложение плоского движения

<u>Вывод.</u> Плоское движение твердого тела можно рассматривать как *слагающееся из поступательного движения вместе с полюсом A и вращательного* вокруг оси, перпендикулярной плоскости *П* и проходящей через полюс *A*.

Кинематические характеристики плоского движения

<u>Вывод.</u> Кинематические характеристики плоского движения: скорость $\vec{V}_A$ и ускорение $\vec{a}_A$ полюса, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

Вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

Кинематические характеристики (скорость и ускорение) точки при плоском движении тела

<u>Скорости точек</u> тела при его плоском движении определяются тремя способами:

а) через геометрическую сумму (с помощью полюса);

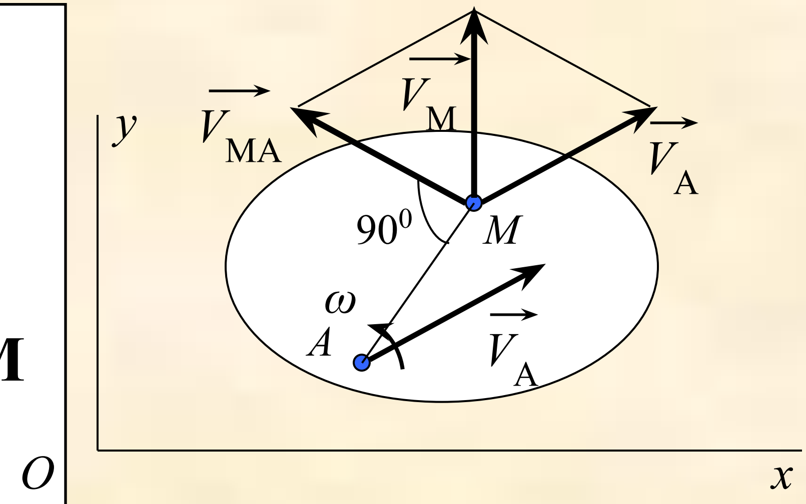
б) с применением теоремы о проекциях скоростей двух точек тела;

в) с помощью мгновенного центра скоростей (м. ц. с.).

<u>Ускорение точки плоской фигуры, как правило, определяют с помощью полюса.</u>

Определения скоростей точек плоской фигуры через геометрическую сумму (с помощью полюса)

Скорость любой точки плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки, принятой за полюс, и скорости, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг полюса, то есть:



$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}, \qquad (1)$$

где $V_{MA} = \omega \cdot MA$ **(**$V_{MA} \perp MA$ **и направлена в сторону вращения плоской фигуры).**

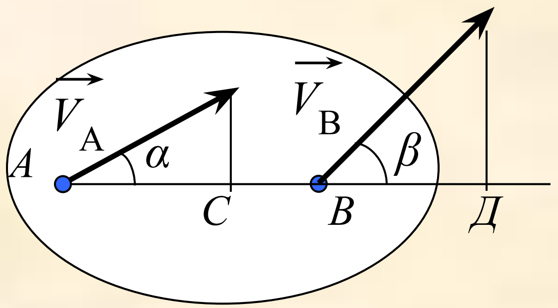
Проектируя векторную сумму (1) на оси координат (метод проекций), получим: $V_{Mx} = V_{Ax} + V_{MAx}$, $V_{My} = V_{Ay} + V_{MAy}$.

Модуль и направление вектора скорости точки М определяется по формулам: $|\vec{V}_M| = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}$, $\cos(\alpha) = V_{Mx} / |\vec{V}_M|$,
где α **- угол между вектором скорости точки и осью** Ox**.**

Определения скоростей точек с применением теоремы о проекциях скоростей 2 - х точек

Теорема. **Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу, то есть:**

$$np._{AB}(\vec{V}_A) = np._{AB}(\vec{V}_B).$$



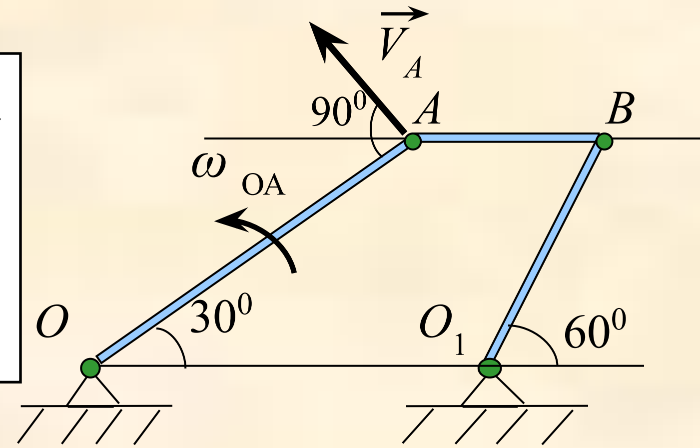
Если заданы углы α **и** β**, то:**

$$V_A \cos(\alpha) = V_B \cos(\beta).$$

Из последнего равенства при известной, например, скорости V_A **и заданных углах** α **и** β**, можно определить скорость точки** B**, то есть**

$$V_B = V_A \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}.$$

Пример применения теоремы о проекциях скоростей 2 - х точек



В плоском механизме, изображенном на рисунке, звено *OA* вращается с угловой скоростью $\omega_{OA} = 0{,}5$ с $^{-1}$. Звено *AB* || прямой OO_1.

Определить скорость точки *B*, если $OA = l = 2$ *м*.

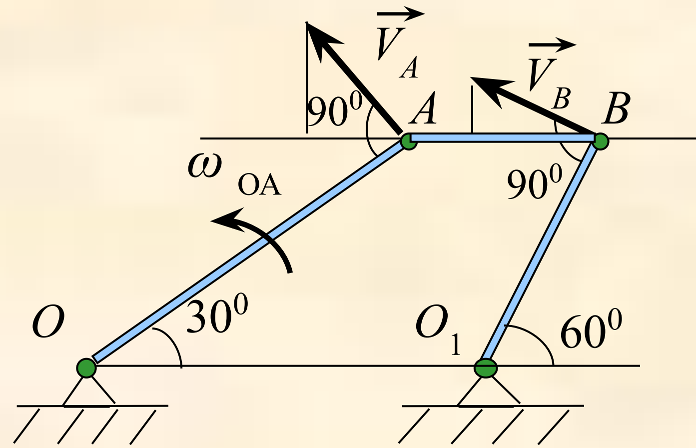
Решение

1. Определим скорость точки *A*.

Точка *A* принадлежит звену *OA*, находящемуся во вращательном движении, поэтому $V_A = \omega_{OA} \cdot l = 0{,}5 \cdot 2 = 1$ *м/с*. Вектор скорости точки *A* будет направлен перпендикулярно отрезку *OA* в сторону вращения звена *OA*.

2. Определим скорость точки *B*.

Точка *B* принадлежит звену O_1B, находящемуся также во вращательном движении, поэтому вектор скорости точки *B* будет направлен перпендикулярно отрезку O_1B в сторону вращения звена *OB*.



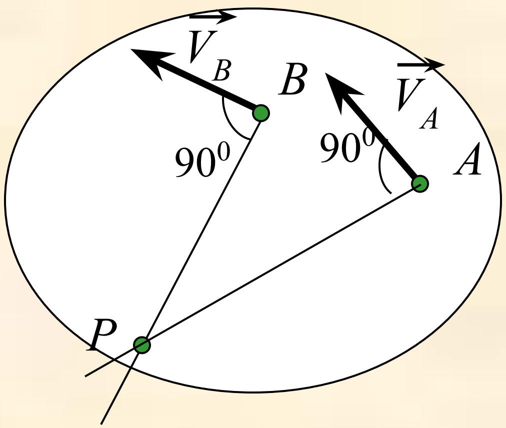
По теореме о проекциях скоростей, проектируя скорости точек *A* и *B* на ось *AB*, получим:

$$V_A \cos(60^0) = V_B \cos(30^0)$$

или $V_B = V_A \bullet \cos(60^0)/\cos(30^0) = \sqrt{3}/3 м/с.$

Понятие мгновенного центра скоростей (м.ц.с.)

<u>Определение.</u> Мгновенным центром скоростей (м.ц.с.) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.



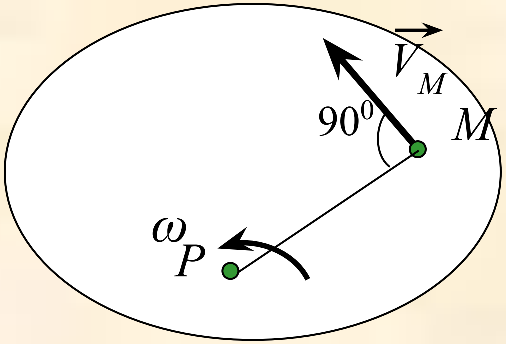
Пусть заданны скорости двух точек *A* и *B* плоской фигуры.

Восстановим из точек *A* и *B* перпендикуляры к их скоростям, которые будут пересекаться в точке *P*.

Можно доказать, что скорость точки P равна нулю, то есть точка P будут м.ц.с.

<u>Теорема.</u> Мгновенный центр скоростей всегда существует и это единственная точка.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью м.ц.с.



Пусть точка *P* - м.ц.с. Примем ее за полюс. Тогда скорость произвольной точки *M* определиться в виде:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP} = \vec{V}_{MP}\, так\ как\ \ \vec{V}_P = 0.$$

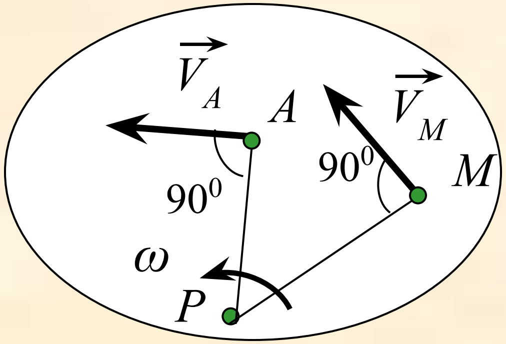
<u>Вывод 1).</u> Плоская фигура в данный момент времени совершает мгновенный поворот вокруг м.ц.с..

<u>Вывод 2).</u> Скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг м.ц.с.

Т.е. величина скорости произвольной точки *M* равна <u>$V_M = \omega \cdot MP$</u>, а вектор скорости точки *M* будет направлен в сторону вращения плоской фигуры перпендикулярно к отрезку, соединяющему эту точку с м.ц.с.

<u>Вывод 3).</u> **Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от м.ц.с., то есть**

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_M}{PM}.$$

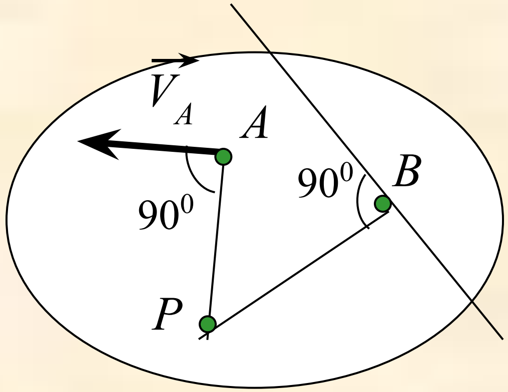


<u>Вывод 4).</u> **Угловая скорость плоской фигуры равна отношению скорости какой-нибудь точки плоской фигуры к расстоянию от этой точки до м.ц.с. то есть:** $\omega = \frac{V_A}{PA}.$

Случаи построения м.ц.с.

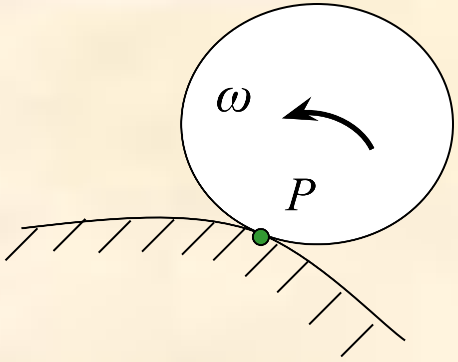
1). Общий случай.

Для определения м.ц.с. необходимо знать только направление скоростей двух точек *A* и *B* плоской фигуры (или траектории этих точек), так как <u>м.ц.с. находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек *A* и *B* к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям);</u>

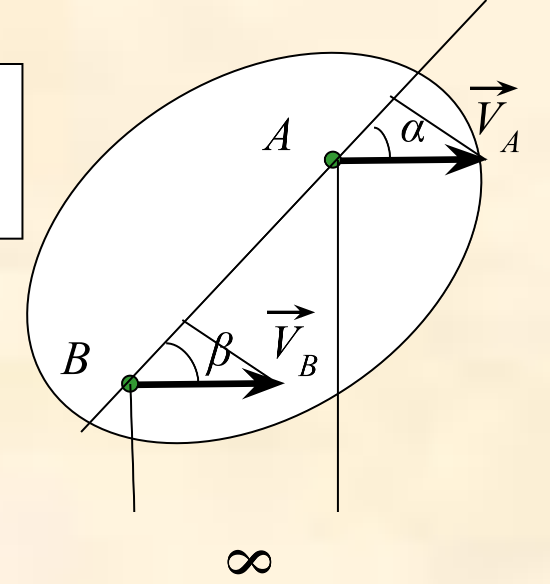


2). Частные случаи.

а) ***качение без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного тела;*** **<u>м.ц.с. в точке соприкосновения тел *P*,</u> так как** $V_P = 0$ **;**



б) *Случай мгновенно поступательного движения тела.*



В этом случае скорости точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны друг другу, и линия *AB*, соединяющая эти точки, не перпендикулярна V_A.

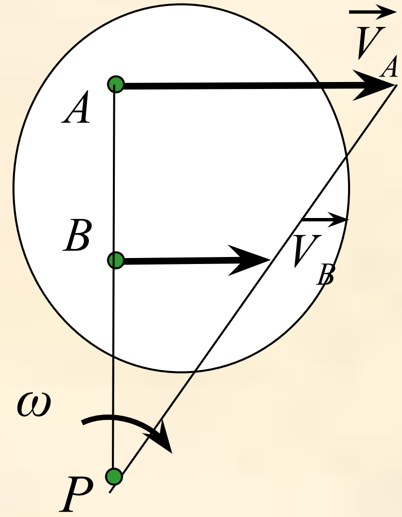
<u>М.ц.с. находится в бесконечности.</u>

Скорости всех точек плоской фигуры равны по величине и направлению, то есть $\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}$.

В этом можно убедиться применяя теорему о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры.

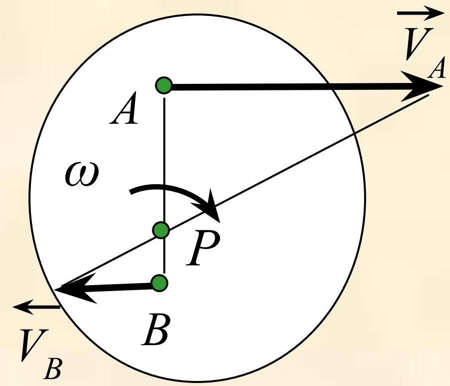
$$V_A \cos(\alpha) = V_B \cos(\beta) \text{ или } V_A = V_B, \text{ так как } \alpha = \beta.$$

в) *Случай, когда скорости точек плоской фигуры A и B параллельны друг другу, направлены в одну сторону и не равны по модулю, а прямая AB перпендикулярна к скоростям этих точек фигуры.*



<u>М.ц.с. определяется построением, показанном на рисунке.</u>

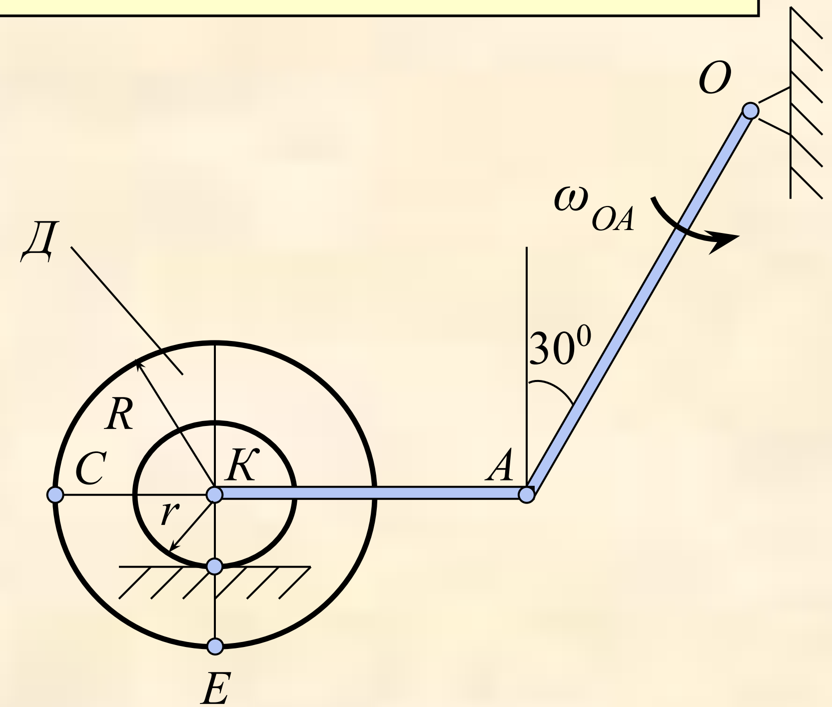
г) *Случай, когда скорости точек плоской фигуры A и B параллельны друг другу и направлены в противоположные стороны, при этом прямая AB перпендикулярна к скоростям этих точек.*



<u>М.ц.с. определяется построением, показанном на рисунке.</u>

Пример1 кинематического анализа плоского механизма

При заданных значениях: $OA = 4$ м, $AK = 2$ м, $R_Д = 2 \cdot r_Д = 1$ м, $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$ **определить модули и направлении скоростей** V_K, V_C, V_E, ω_{AK} **для плоского механизма, изображенного на рисунке. Ступенчатый диск Д, опираясь выступом малого радиуса** r, **катится без скольжения по горизонтальной поверхности.**



Решение.

1. Определим виды движения тел, входящих в механизм.

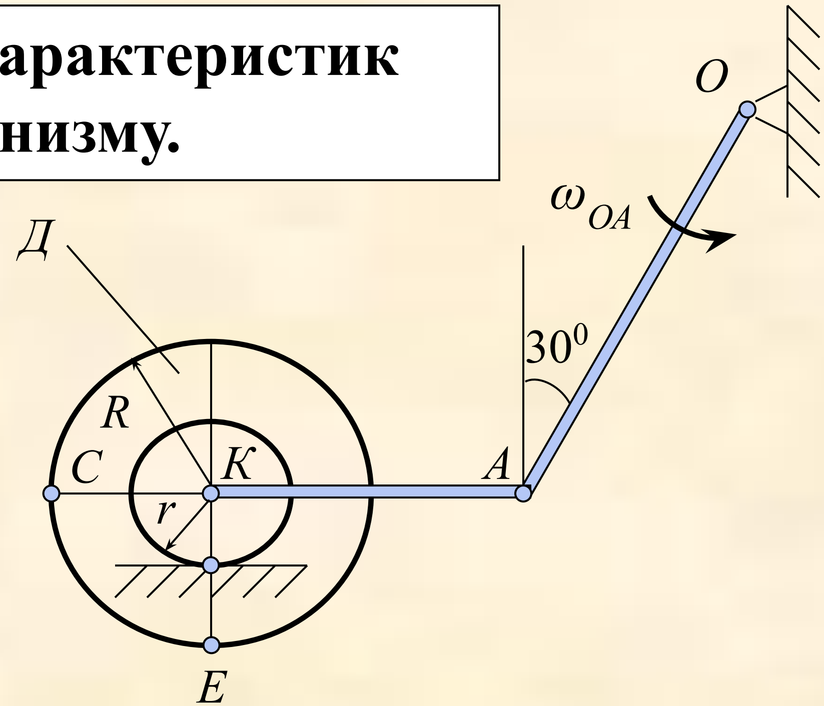
Звено OA **механизма находится во вращательном движении.**

Звено АК совершает плоское движение.

Ступенчатый диск Д также совершает плоское движение.

2. Определение кинематических характеристик точек и тел, принадлежащих механизму.

Определение необходимо начинать со звена механизма, для которого они частично заданы, а далее переходить к другим звеньям через общие для них точки.

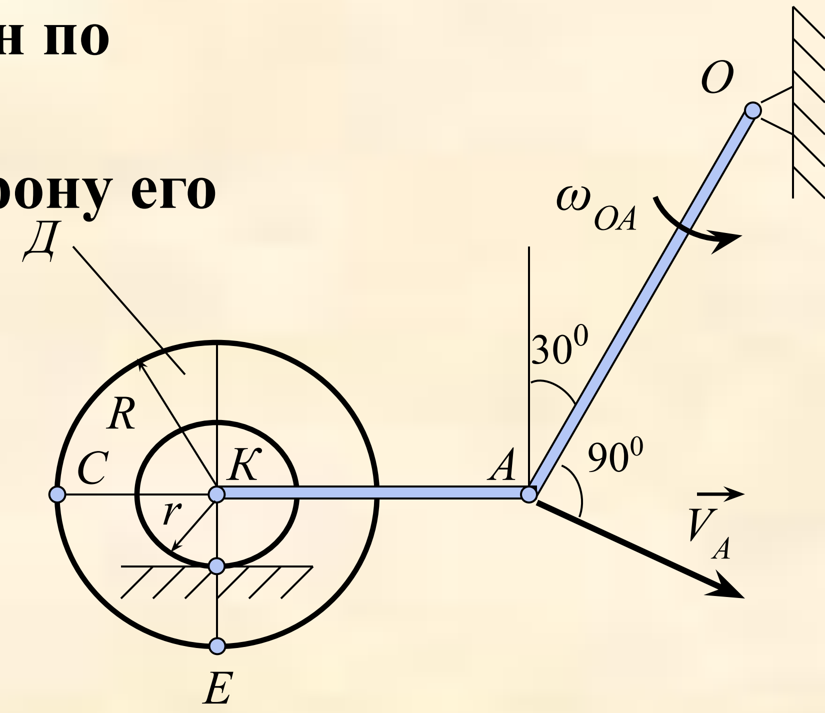


В данной задаче известна ω_{OA}, что позволяет определить скорость точки *A*, поэтому необходимо сначала рассмотреть звено *OA*.

а) *Рассмотрим звено OA.*

Точка *A* принадлежит звену *OA*, находящемуся во вращательном движении, поэтому модуль ее скорости найдется по формуле: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 4 = 8$ *м/с*.

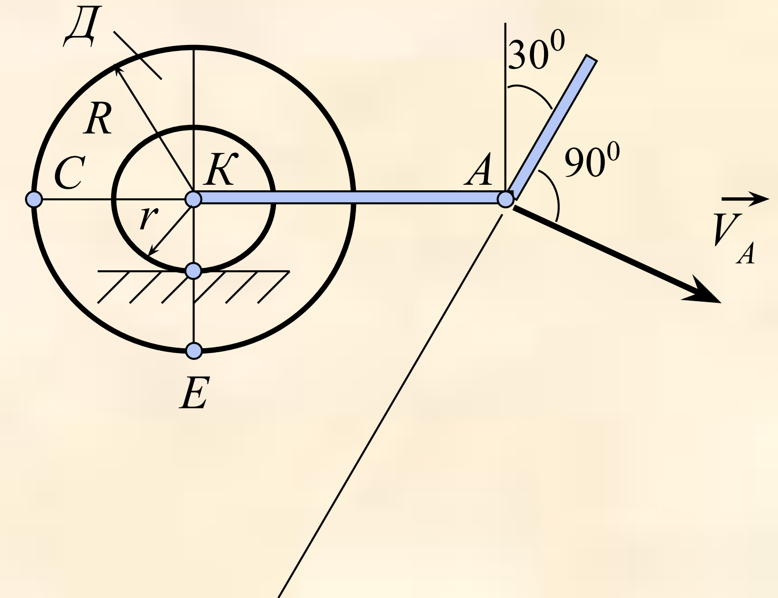
Вектор скорости точки А направлен по касательной к ее траектории, т.е. перпендикулярно к звену ОА в сторону его вращения .



б) ***Перейдем от звена ОА к звену АК через их общую точку А.***

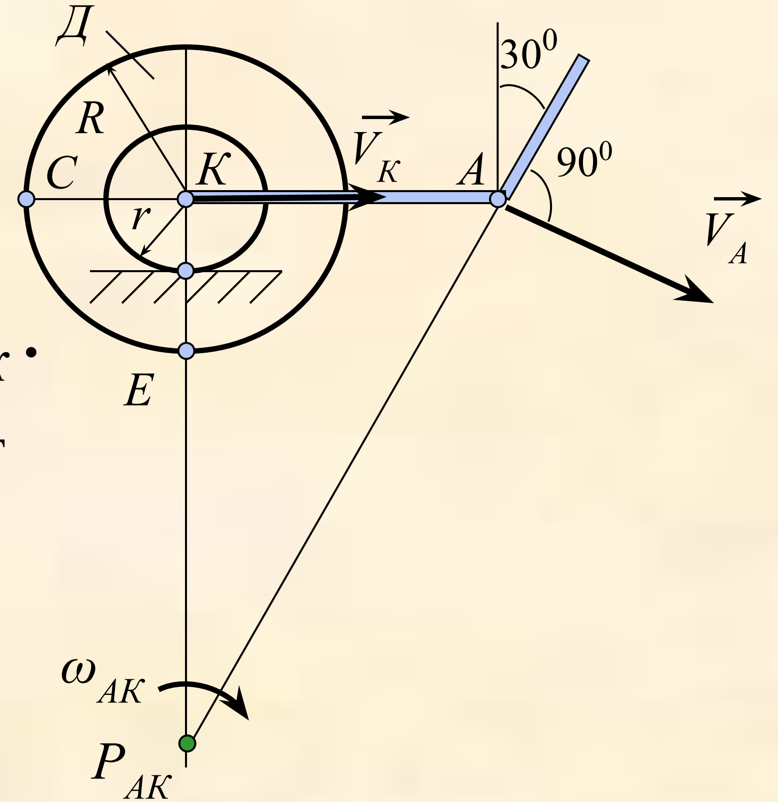
Для определения V_K и ω_{AK} рассмотрим звено *АК*, находящееся в плоском движении.

Построим м.ц.с. звена по направлениям скоростей двух его точек.



Направление скорости точки А известно. Восстановим из точки А перпендикуляр к ее скорости.

Скорость точки *К* направлена параллельно горизонтальной плоскости.



М.ц.с. звена *АК* находится в точке P_{AK}.

Плоская фигура *АК* в данный момент времени совершает мгновенный поворот, направление которого определим по направлению скорости точки *А*. Т.е. звено *АК* вокруг м.ц.с. поворачивается по ходу часовой стрелки.

Вектор скорости точки *К* будет направлен в сторону вращения звена *АК* вокруг м.ц.с., то есть вправо вдоль *АК*.

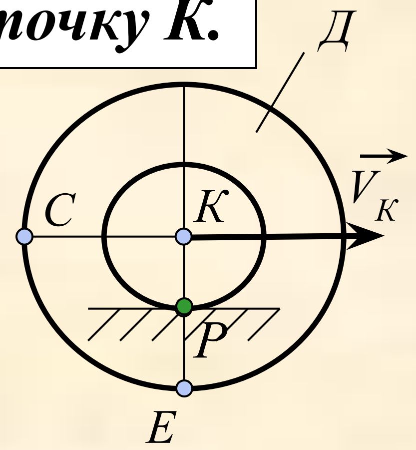
Величину V_K определим из пропорции $\dfrac{V_A}{P_{AK}A}=\dfrac{V_K}{P_{AK}K}$

или $$\frac{V_A}{P_{AK}A}=\frac{V_K}{P_{AK}A\cdot\cos(30^0)}.$$

Откуда найдем $V_K = V_A \cdot cos(30^0) = 8 \cdot 0{,}865 = 6{,}92$ *м/с*.

$$\omega_{AK} = \frac{V_A}{P_{AK}A} = \frac{8}{2 \cdot AK} = \frac{4}{2} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

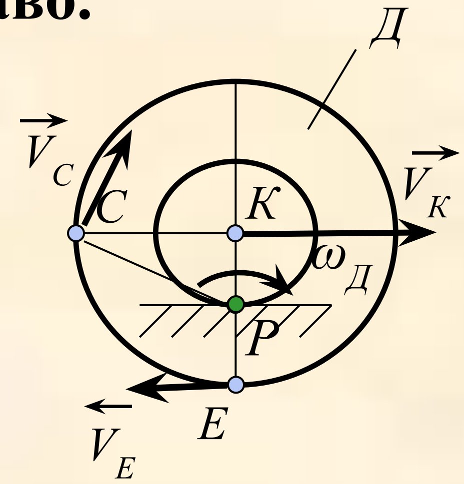
в) ***Перейдем от звена АК к диску Д через общую точку К.***



Для нахождения скоростей точек *C* и *E* необходимо знать м.ц.с. ступенчатого диска *Д*, который находится в плоском движении.

Точка *P* соприкосновения диска с неподвижной поверхностью является в данный момент времени неподвижной точкой, поэтому м.ц.с. ступенчатого диска *Д* находится в этой точке.

Угловая скорость диска Д $\omega_Д$ направлена по ходу часовой стрелки, так как скорость $V_К$ направлена вправо.



Скорости точек *C* и *E* перпендикулярны к отрезкам, соединяющим эти точки с м.ц.с., и направлены в сторону вращения плоской фигуры вокруг м.ц.с.

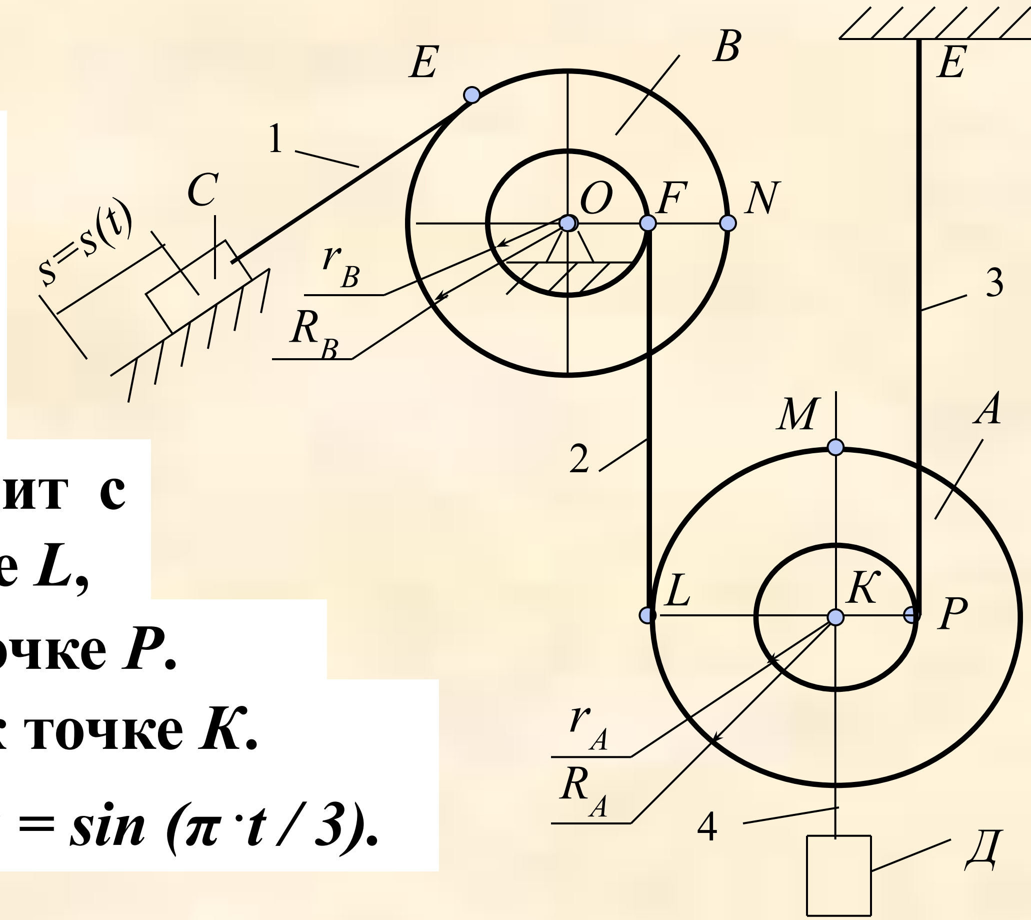
Величины скоростей точек V_C и V_E определим из пропорции, то есть:

$$\frac{V_К}{KP} = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_E}{EP} \quad \text{или} \quad \frac{V_K}{r} = \frac{V_C}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{V_E}{R - r}$$

Откуда получим: $V_C = V_K \cdot \sqrt{R^2 + r^2}/r = 6{,}92 \cdot \sqrt{1^2 + 0{,}5^2}\,/\,0{,}5 = 3{,}87$ *м/с*

$$V_E = V_K \cdot (R - r)/r = 6{,}92 \cdot 0{,}5/0{,}5 = 6{,}92 \text{ м/с}.$$

Пример2 кинематического анализа плоского механизма



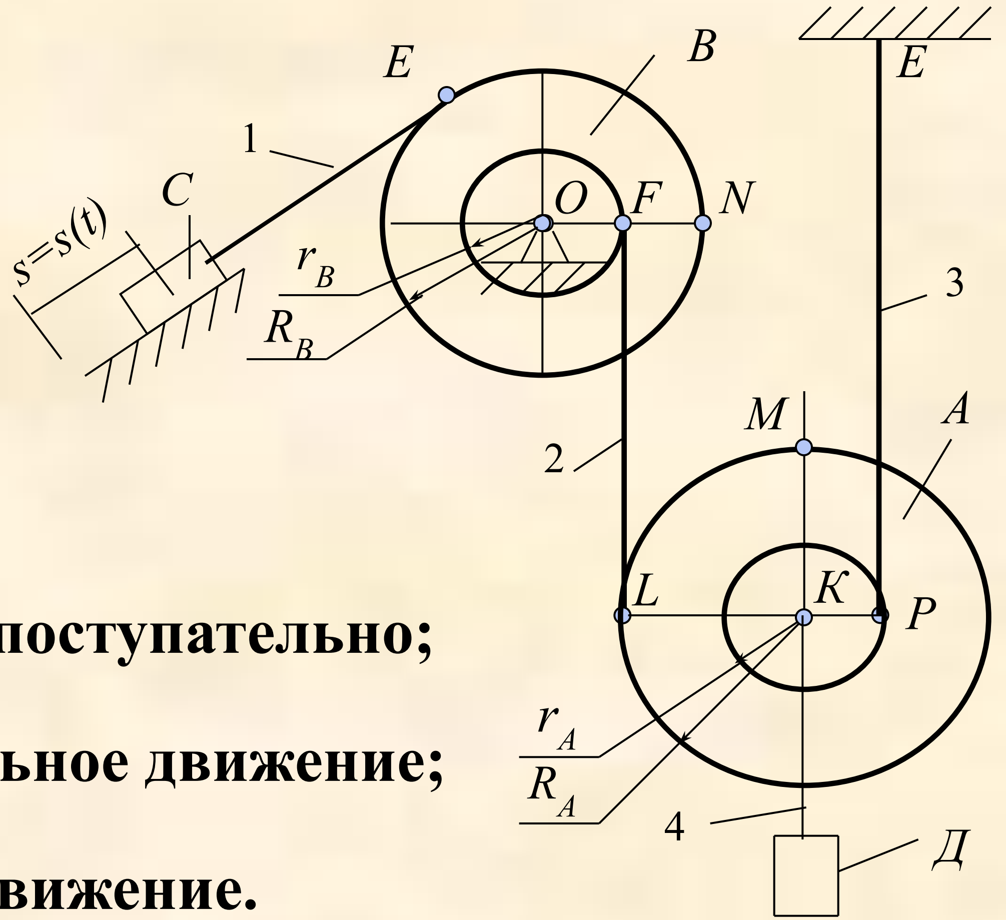
Нить 1 сходит со ступенчатого шкива *B* в точке *E*, а верхний конец нити 2 – в точке *F*. Нижний конец нити 2 сходит с подвижного шкива *A* в точке *L*, а нижний конец нити 3– в точке *P*. Груз *Д* подвешен на нити 4 к точке *К*. Тело А движется по закону $s = \sin(\pi \cdot t / 3)$.

Определить в момент времени $t = \tau = 1$ *с.* направления и величины: а) скорости груза Д; б) скорости точки *M* шкива *A*; угловой скорости шкива *A*.

В расчетах принять: $r_B = r_A = r$, $R_B = R_A = 2\,r$, $r = 0{,}25$ *м*.

Решение.

1. Определим вид движения каждого тела, входящего в механизм.



- нити – 1,2,4 движутся поступательно, а участок 3-ей нити *EP* – неподвижен;

- тела *C* и *Д* движутся также поступательно;

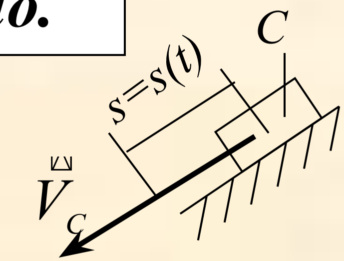
- диск *B* совершает вращательное движение;

- диск *A* совершает плоское движение.

2. Определим искомые кинематические характеристики точек и тел, принадлежащих механизму.

Начнем со звена механизма, для которого они частично заданы или могут быть найдены.

а) *Рассмотрим тело C, движущееся поступательно.*



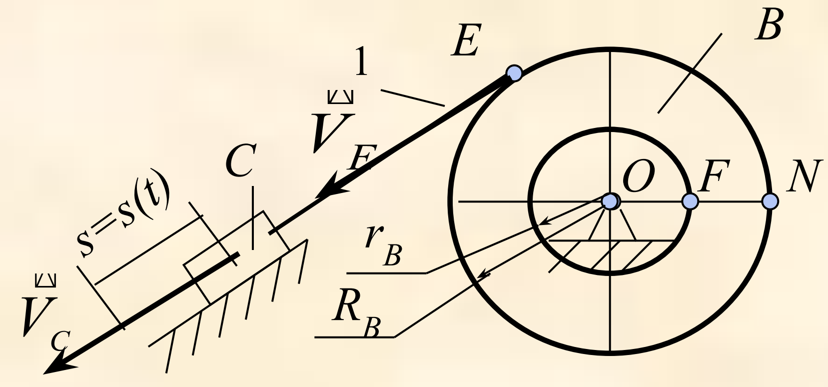
Определим скорость тела *C*, которое движется по заданному закону.
Алгебраическое значение скорости найдем по формуле $V = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}.$

$$V_C = \dot{s} = \pi/3 \cdot \cos(\pi \cdot t/3)\big|_{t=1} = \pi/3 \cdot \cos(60^0) = \pi/6 = 0{,}52\ м/с.$$

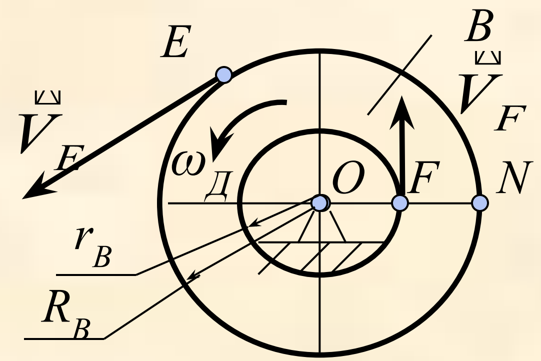
Скорость точки $V_C > 0$, поэтому она будет направлена в сторону возрастания координаты *s*, то есть вниз по наклонной плоскости.

б) *Рассмотрим нить 1.*

Так как нить 1 движется поступательно, то $\vec{V}_E = \vec{V}_C$,
то есть $V_E = V_C = 0{,}52\ м/с$.



в) *Рассмотрим ступенчатый блок B.*



Точка *E* является общей для нити 1 и блока *B*, поэтому ее скорость представим в виде:

$$V_E = \omega_B \cdot R_B = \omega_B \cdot 2 \cdot r. \qquad (1)$$

Из формулы (1) найдем: $\omega_B = V_E / (2 \cdot r) = 0{,}52 / 0{,}5 = 1{,}04\ c^{-1}$.

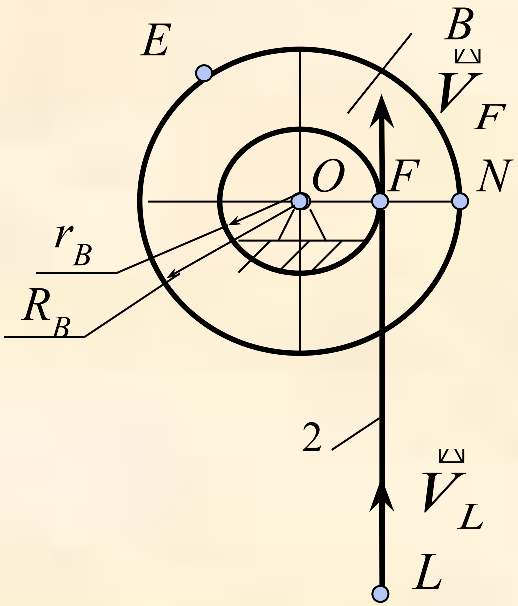
Скорость точки *F* определим по формуле, аналогичной формуле (1), т. е.

$$V_F = \omega_B \cdot r = 1{,}04 \cdot 0{,}25 = 0{,}26\ м/с.$$

Вектор скорости точки *F* будет направлен в сторону вращения шкива *B*, то есть вверх.

г) *Рассмотрим нить 2.*

Скорость точки *L* по модулю и по направлению будет совпадать со скоростью точки *F*, так как нить 2 находится в поступательном движении.



Точка *F* является общей для нити 2 и блока *B*, поэтому ее скорость представим в виде:

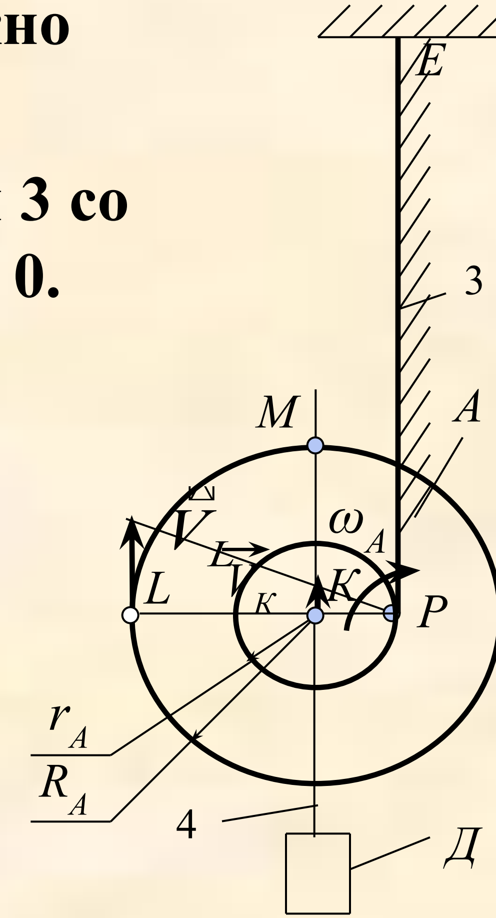
$$V_L = V_F = 0{,}26 \text{ м/с}.$$

д) *Рассмотрим ступенчатый шкив А.*

Точка *L* одновременно принадлежит нити 2 и шкиву *A*, который находится в плоском движении.

Знаая скорость V_L и м.ц.с. шкива *A*, можно определить скорости других его точек.

М.ц.с. шкива *A* совпадает с точкой схода *P* нити 3 со шкива, так как нить 3 неподвижна, то есть $V_P = 0$.



Скорости точек плоской фигуры *A* пропорциональны расстояниям до м.ц.с., то есть справедливо выражение:

$$\frac{V_L}{LP} = \frac{V_K}{KP}.$$

Откуда $\underline{V_K} = V_L \cdot \dfrac{KP}{LP} = V_L \dfrac{r_A}{R_A + r_A} = 0{,}26 \cdot \dfrac{r}{r + 2 \cdot r} =$

$$= 0{,}26 \cdot 0{,}33 = 0{,}087 \ \text{м/с}.$$

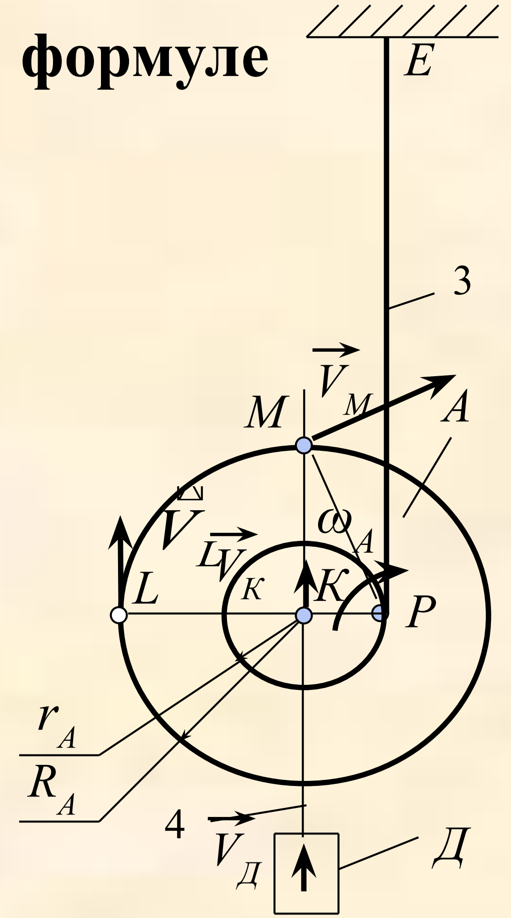
Угловая скорость шкива *A*: $\underline{\omega_A} = \dfrac{V_K}{KP} = \dfrac{V_K}{r} = \dfrac{0{,}087}{0{,}25} = 0{,}22 \ c^{-1}$.

Ее направление определяется направлением V_L.
Вектор скорости точки *K* направлен вверх, перпендикулярно к отрезку *KP*, соединяющему точку *K* и м.ц.с., в сторону вращения шкива *A* вокруг м.ц.с.

Величина скорости точки *M* определиться по формуле

$\underline{V_M} = \omega_A \cdot PM = 0{,}22 \cdot \sqrt{r^2 + (2r)^2} = 0{,}22 \cdot r \cdot \sqrt{5} =$

$= 0{,}22 \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}24 = 0{,}12$ *м/с*.



Вектор скорости точки *M* направлен перпендикулярно к отрезку *MP*, соединяющему точку *M* и м.ц.с., в сторону вращения шкива *A* вокруг м.ц.с.

е) ***Рассмотрим нить 4.***

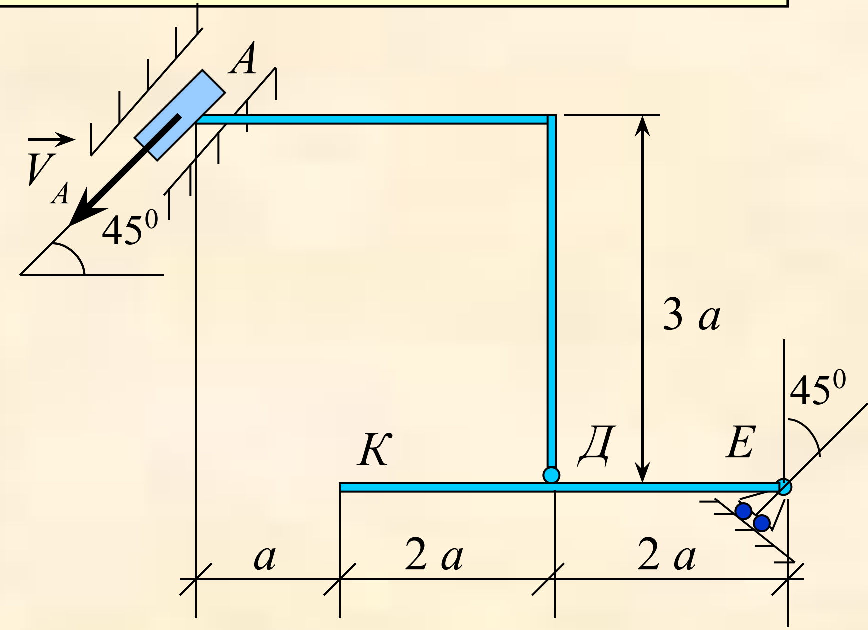
Нить находится в поступательном движении, поэтому

$$\vec{V}_Д = \vec{V}_К,$$

то есть величина $\underline{V_Д = 0{,}087 \text{ м/с}}$, а вектор скорости тела *Д* направлен вертикально вверх.

Пример 3 кинематического анализа плоского механизма

На плоский двухзвенный механизм (конструкция) *АКДЕ*, звенья которого *АД* и *КЕ* соединены между собой в точке *Д* с помощью приставного шарнира, наложены две связи: в точке *А* – скользящая заделка и в точке *Е* – подвижный шарнир.

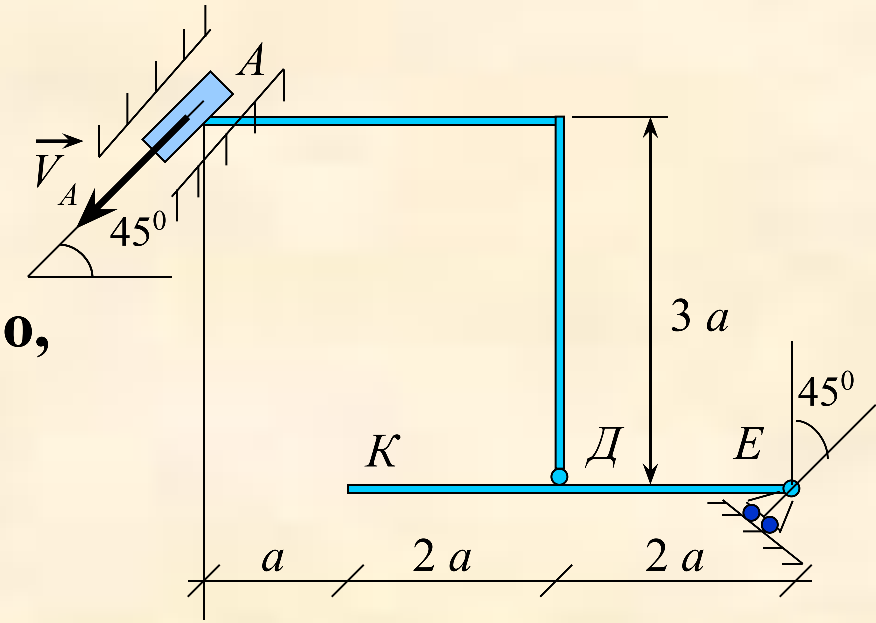


Дано: Скорость ползунка A **-** $V_A = 2$ *м/с*, **размер** $a = 1$ *м*.

Определить модули и направления: угловой скорости звена KE **-** ω_{KE} **и линейные скорости точек** E **и** K.

Решение.

1. Определим виды движения тел, входящих в механизм.



- звено *АД* движется поступательно, так как скользящая заделка не допускает поворота;

- звено КЕ совершает плоское движение.

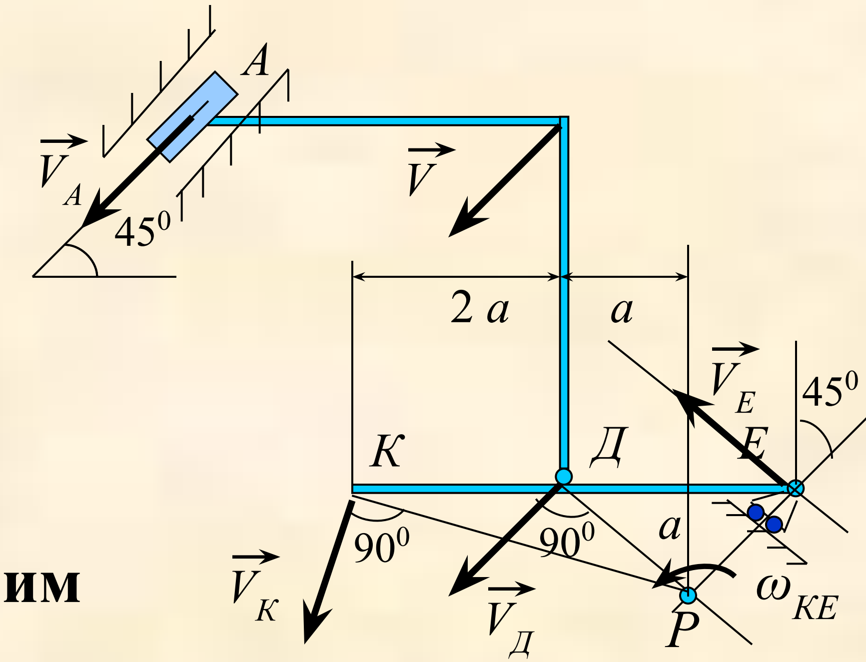
2. Определим кинематические характеристики тел и точек механизма.

а) Рассмотрим звено *АД*

Так как звено *АД* находится в поступательном движении, то скорости всех его точек равны по величине и по направлению, т. е. $V_A = V_Д = 2$ *м/с.* и $\vec{V}_A = \vec{V}_Д = \vec{V}$.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_Д = \vec{V}.$$

б) Рассмотрим звено *КЕ*



Посмотрим для него м.ц.с. Для этого восстановим перпендикуляр из точки *Д* к вектору ее скорости.

Второй перпендикуляр восстановим из точки *E* к ее прямолинейной траектории, вдоль которой направлен вектор скорости $\vec{V}_E$.

М.ц.с. для звена *КЕ* будет находиться в точке *P*.

Угловая скорость $\omega_{KE} = \frac{V_Д}{ДP} = \frac{V_A}{2a\cos(45^0)} = \frac{2}{\sqrt{2}} =$ **1,41 c^{-1}.**

Скорость $\vec{V}_E$ направлена вверх по наклонной плоскости и $V_E = V_Д = 2$ *м/с*. Скорость $\vec{V}_K$ направлена $\perp$ отрезку *PK* в сторону вращения звена и $V_K = \omega_{KE} \cdot PK = 1{,}41 \cdot \sqrt{(3a)^2 + (a)^2} =$

$= 1{,}41 \cdot 3{,}16 =$ 4,46 *м/с*.