КИНЕМАТИКА

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел без учета действия сил, вызывающих это движение.

Цель кинематики - определение траекторий, скоростей, ускорений и других кинематических характеристик движения.

Движением называется изменение положения одних тел по отношению к другим телам.

Тело, по отношению к которому рассматривается движение, называется **телом отсчета**.

Тело отсчета и жестко связанная с ним система координат называются **системой отсчета.**

По виду движущихся объектов кинематика подразделяется на кинематику точки и кинематику твердого тела.

Точкой считается тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

План

- Способы задания движения точки
- Определение скорости и ускорения при векторном способе задания движения
- Определение скорости и ускорения при координатном способе
- Определение скорости и ускорения при естественном способе задания движения

Задачей кинематики точки является определение кинематических характеристик движения точки – траекторий, скоростей и ускорений.

Для этого движение точки должно быть задано.

2.1.1 Способы задания движения точки

Рассмотрим три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

- При векторном способе должна быть известна зависимость радиус-вектора точки от времени (рис.2.1,а)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (2.1)$$

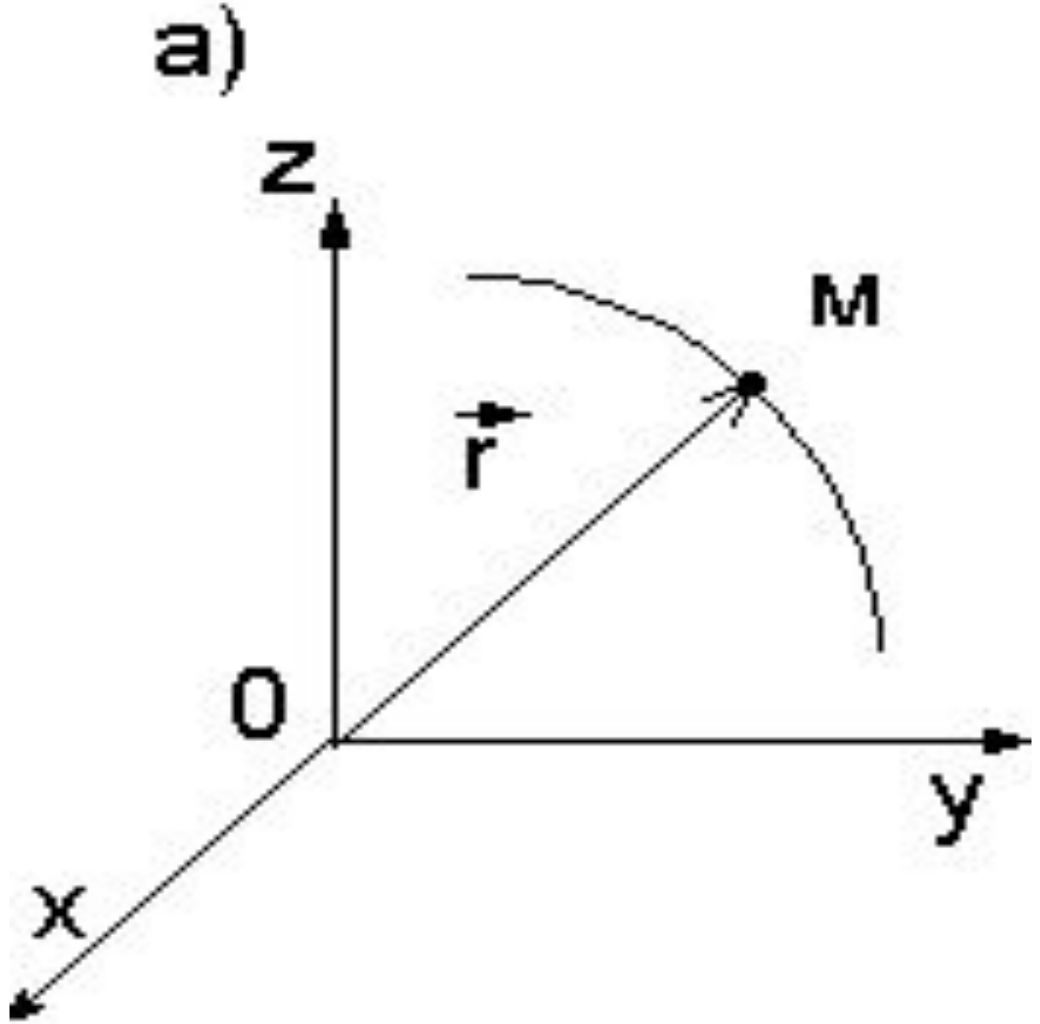

Рис.2.1.а – Векторный способ задания движения точки

- При координатном способе задаются зависимости координат точки (рис.2.1,б) от времени:

$$x = f_1(t),$$
$$y = f_2(t), \qquad (2.2)$$
$$z = f_3(t).$$

Данные уравнения позволяют в любой момент времени найти положение точки.
Если точка движется в плоскости, то для задания ее движения достаточно двух уравнений, а если по прямой - то одного.

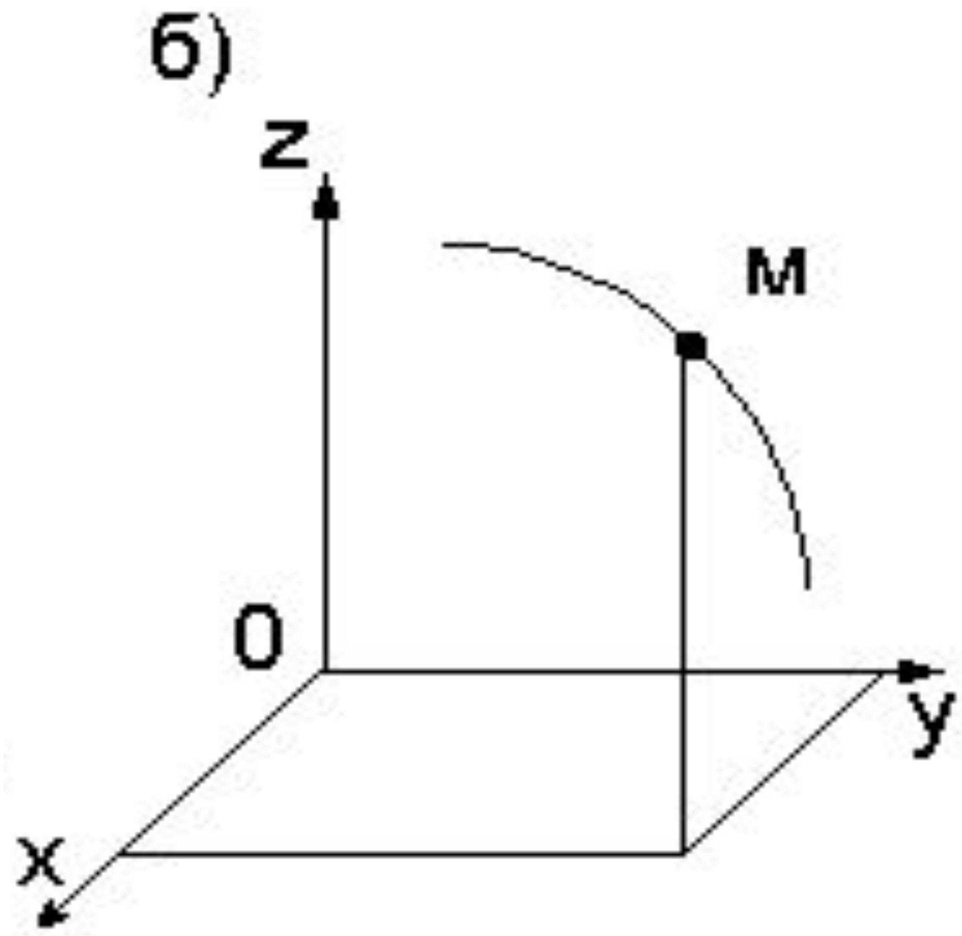

Рис.2.1.б – Координатный способ задания движения точки

Уравнения (2.2) являются уравнениями траектории точки в параметрической форме.

Для получения уравнения траектории в координатной форме надо из этих уравнений исключить время.

Пример 1.

Движение точки задано уравнениями: $x=2t$, $y=t^2$. Найти уравнение траектории.

Решение.

Из первого уравнения:

$$t = x/2,$$

подставляя во второе, получим:

$$y = x^2/4;$$

поскольку x и y положительны, то траекторией будет правая ветвь параболы.

При **естественном способе** задания движения (рис.2.1,в)

задается траектория, начало отсчета и направление, а также закон движения по траектории:

$$S = f(t) \qquad (2.3)$$

Величина *S* отсчитывается от начала отсчета и в общем случае не равна пройденному пути.

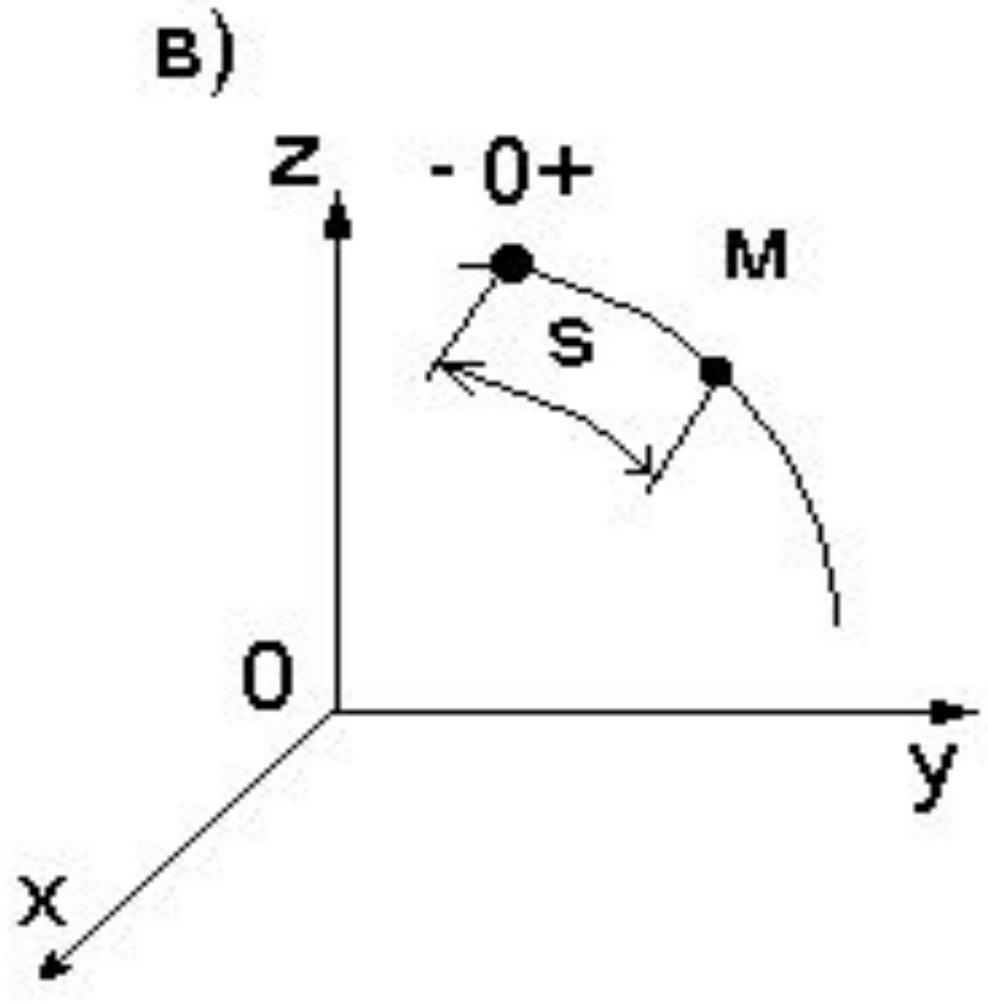

Рис.2.1.в – Естественный способ задания движения точки

Векторный способ

Вектор скорости

Одной из важнейших кинематических характеристик движения является скорость, она характеризует быстроту перемещения точки.

Пусть точка *M* в момент времени t_0 занимала положение M_0, задаваемое вектором $\vec{r}_0$, а в момент t_1 займет положение M_1 , задаваемое радиус-вектором - $\vec{r}_1$, (рис.2.2,а).

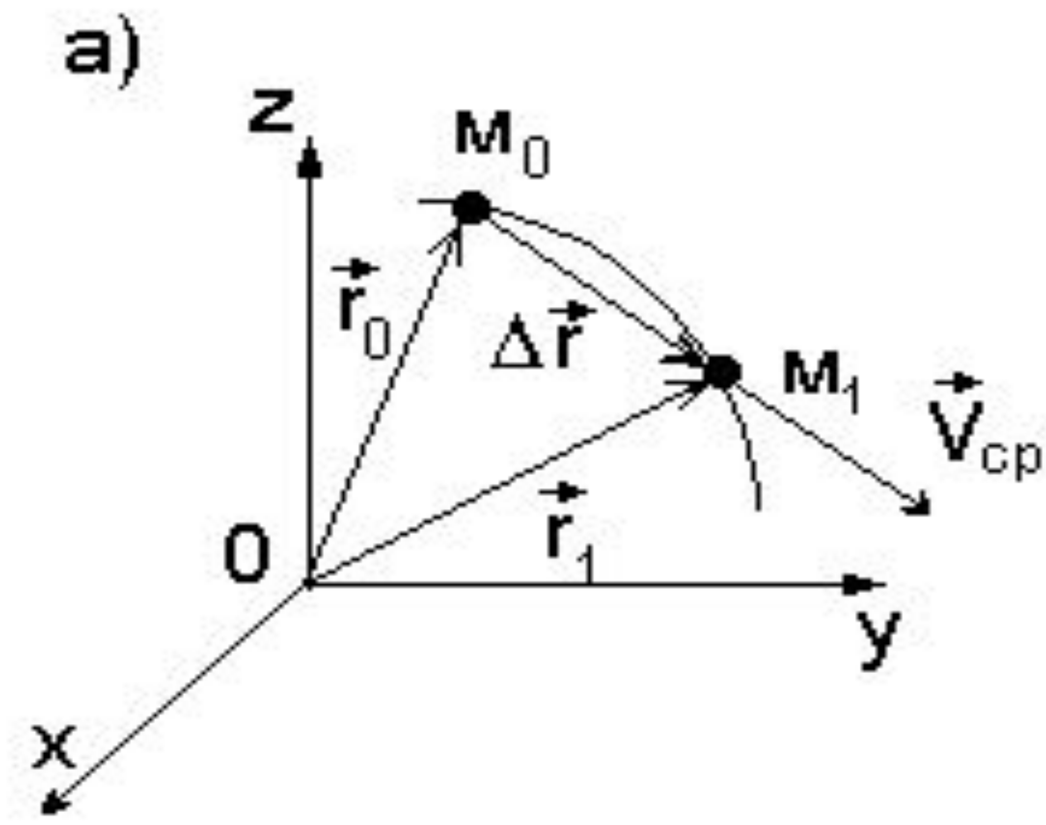

Рис. 2.2. Вектор скорости

За время $t_1 - t_0$ радиус-вектор изменится на величину $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$. Вектор $\Delta\vec{r}$ называется вектором перемещения.

Средней скоростью точки называется отношение вектора перемещения к промежутку времени

$$\vec{V}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

Средняя скорость направлена в ту же сторону, что и вектор перемещения.

Мгновенной скоростью называется предел,к которому стремится средняя скорость, если промежуток времени стремится к нулю

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2.5)$$

то есть <u>мгновенная скорость равна производной по времени от радиус-вектора точки</u>.

Поскольку в пределе при уменьшении Δt вектор $\Delta \vec{r}$ стремится к касательной, то и <u>мгновенная скорость направлена по касательной к траектории в данной точке.</u>

Единица измерения скорости в системе СИ - м/с, 1 м/с=3,6 км/час.

Вектор ускорения

Ускорение характеризует изменение скорости.

Пусть в момент времени t_0 точка имеет скорость $\vec{V}_0$, а в момент t_1 - скорость $\vec{V}_1$ (рис.2.2,б). За время t_1-t_0 вектор скорости получил приращение

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_0 \, .$$

Вектором среднего ускорения называется отношение приращения скорости к промежутку времени

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad (2.6)$$

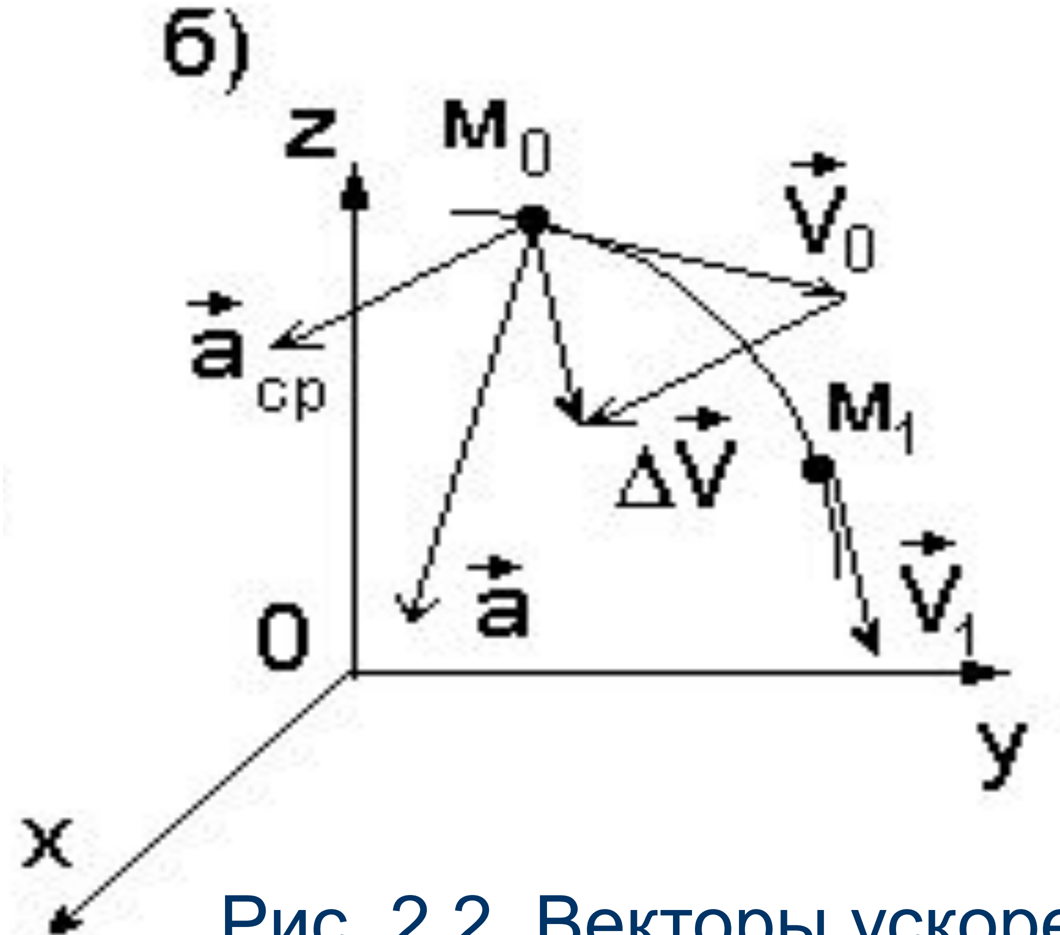

Рис. 2.2. Векторы ускорения

Вектор среднего ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор приращения скорости.

Мгновенным ускорением называется предел, к которому стремится среднее ускорение, если промежуток времени стремится к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \qquad (2.7)$$

то есть вектор мгновенного ускорения равен производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиус-вектора точки.

Вектор ускорения направлен в сторону вогнутости траектории.

Единица измерения ускорения – м/с^2.

Определение скорости и ускорения при координатном способе задания движения

Введем единичные орты осей координат - $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис.2.3), разложим радиус-вектор точки и вектор ее скорости по осям координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \text{(а)}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \qquad \text{(б)}$$

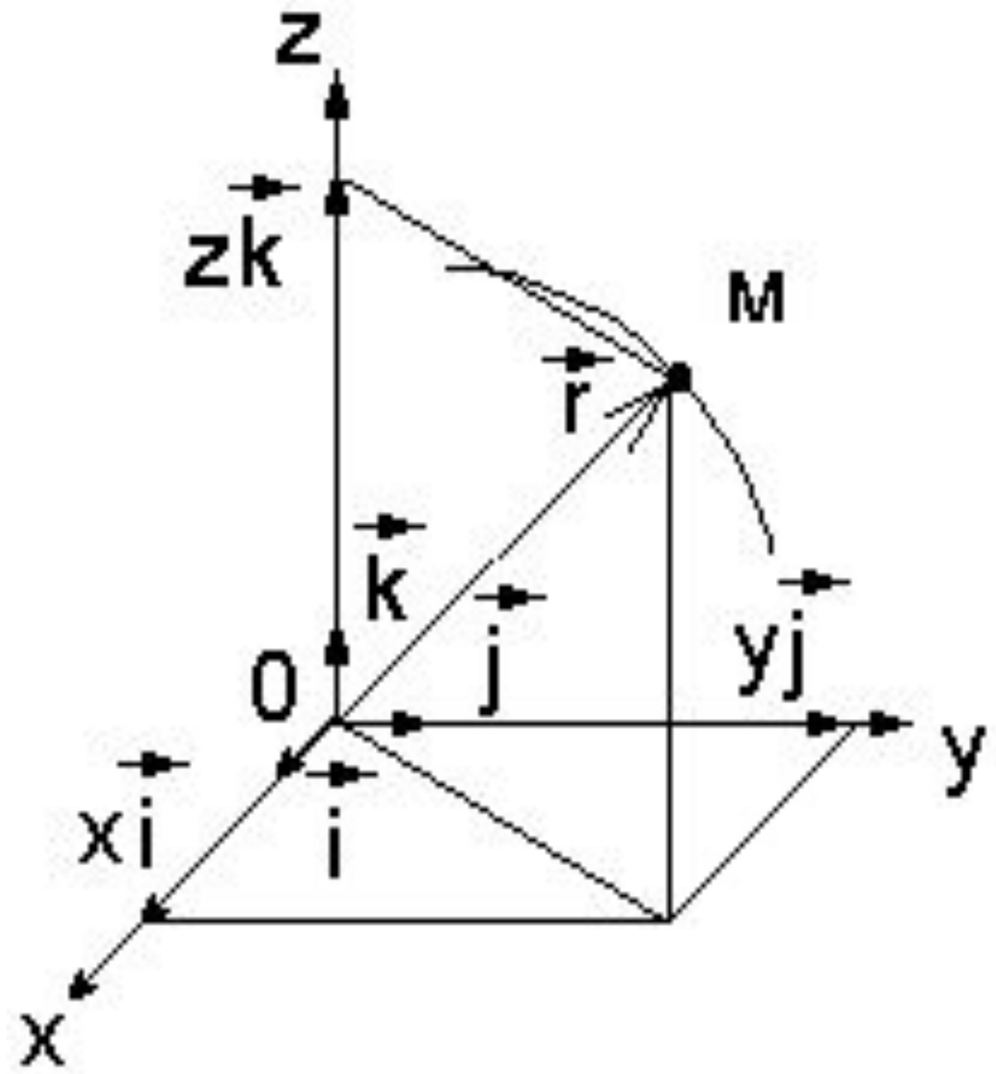

Рис. 2.3. Разложение вектора перемещения по осям координат

Продифференцировав (а) по времени и учитывая, что производные от векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ равны нулю, получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad \text{(в)}$$

Левые части выражений (б) и (в) равны, поэтому, получим выражения для проекций скорости на оси координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \qquad V_y = \frac{dy}{dt} \qquad V_z = \frac{dz}{dt} \qquad (2.8)$$

Модуль скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \qquad (2.9)$$

Аналогично можно получить формулы для определения проекций на оси координат и модуля ускорения:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \qquad (2.10)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.11)$$

Пример 2 .

По уравнениям, приведенным в примере 1 (Движение точки задано уравнениями: $x=2t$, $y=t^2$) найти скорость и ускорения в момент времени 1 *с*.

Решение.

Вначале построим траекторию и найдем положение точки в данный момент (рис.2.4).

При t =1 *с* координаты точки *М* равны:

$$x=2 , y=1 .$$

Вычислим проекции скорости:

$$V_x=2, V_y=2t$$

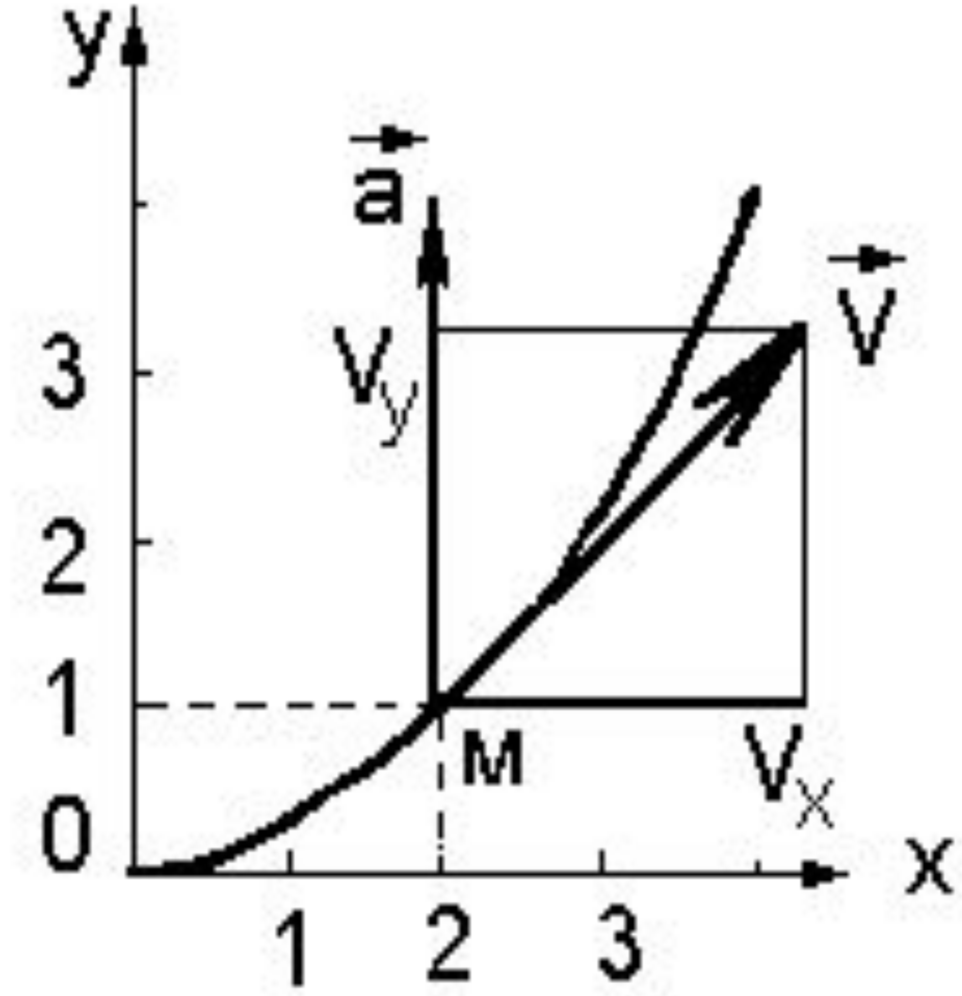

Рис. 2.4. Рисунок к примеру

Модуль скорости:

$$V=\sqrt{2^2+(2t)^2}=2\sqrt{2}\approx 2{,}8\,м/с$$

Откладывая из точки *М* в масштабе по осям X и У значения V_x=2, V_y=2t=2, строим прямоугольник, в котором вектор скорости будет диагональю (рис.2.4).

Продифференцировав уравнения движения второй раз, найдем значения проекций вектора ускорения на оси координат:

$$a_x=0,\ a_y=2.$$

Следовательно модуль ускорения:

$$a=2м/с^2,$$

а вектор ускорения направлен параллельно оси *ОУ*.

Определение скорости и ускорения при естественном способе задания движения

При данном способе скорость и ускорение находятся через проекции на так называемые естественные оси координат (оси Эйлера), которые имеют начало в данной точке на траектории и направлены:

ось - τ касательная - по касательной в положительном направлении,

ось *n* - нормаль - по главной нормали,

ось *b* - бинормаль - перпендикулярна осям и *n* и образует с ними правую тройку (рис.2.5).

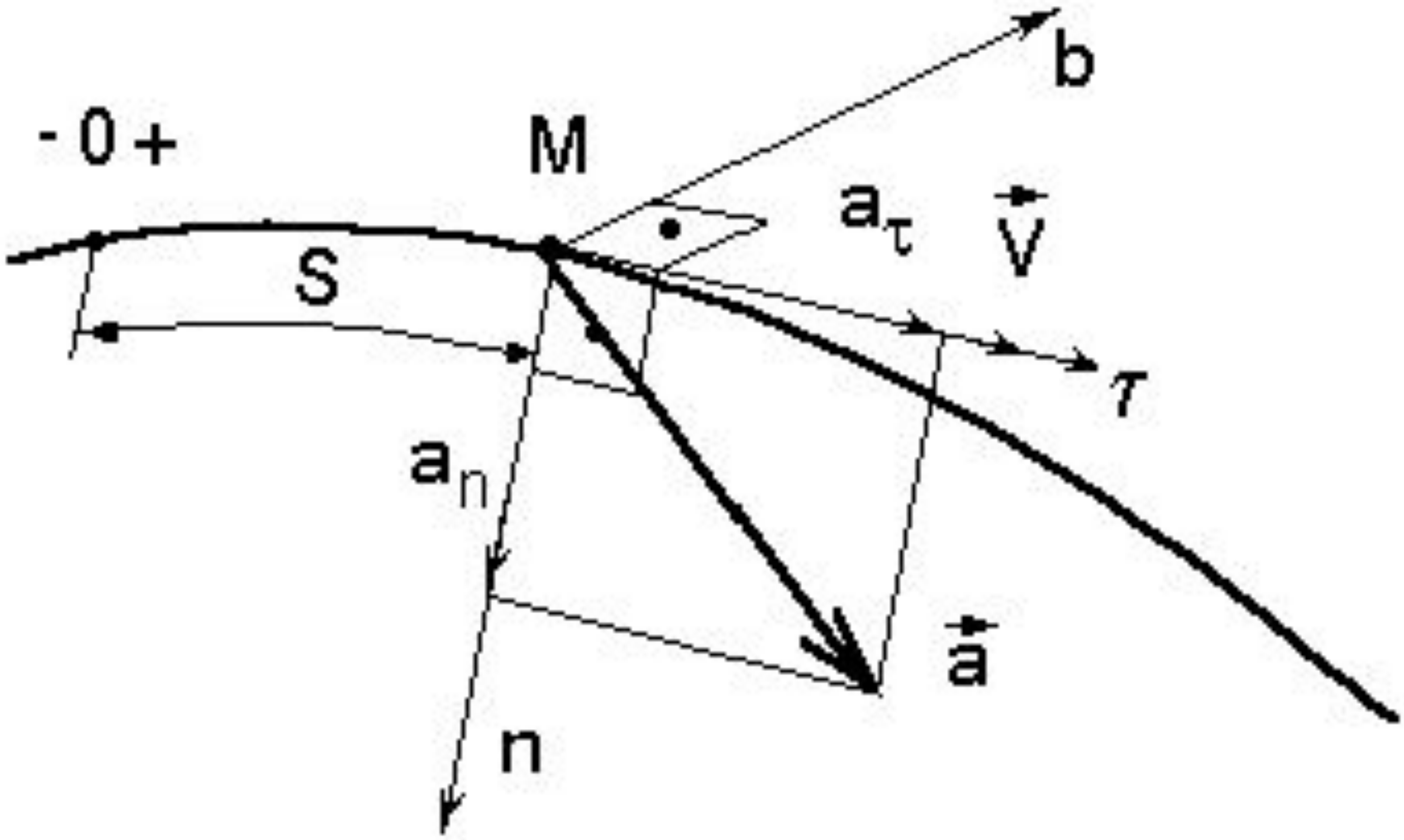

Рис. 2.5. Естественные оси координат

Проекция скорости на ось τ:

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} \qquad (2.12)$$

то есть равна производной по времени от закона движения точки по траектории.

Модуль скорости равен модулю ее проекции на касательную ось $\left|\vec{V}\right| = \left|V_\tau\right|$

Направление вектора скорости совпадает с касательной, если величина V_τ положительна, и противоположно касательной – если отрицательна.

Проекция ускорения на ось τ называется **касательным ускорением** и определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (2.13)$$

Проекция ускорения на нормаль называется **нормальным ускорением** и определяется из выражения

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \qquad (2.14)$$

где, ρ - радиус кривизны траектории в данной точке.

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (2.15)$$

Пример 3.
По условию предыдущего примера (Движение точки задано уравнениями: x=2*t*, y=*t*2) найти касательное и нормальное ускорение точки, а также радиус кривизны траектории.

Решение.
Поскольку $a_\tau = dV/dt$

, а $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$,

то, взяв производную от корня, получим выражение

$$a_\tau = d(\sqrt{V_x^2 + V_y^2})/dt = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

Подставляя значения, получим:

$a_\tau = 1{,}41$ м/с^2.

Затем из формулы (2.15) находим:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4-2} = 1{,}41$$

а из формулы (2.14) $\rho = V^2/a_n = 5{,}6$ м.