С Т А Т И К А

5. Произвольная плоская система сил

5.1. Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду

Опр. ***Произвольной плоской системой сил называется такая система, линии действия которых лежат в одной плоскости.***

Примечание. ***Частным случаем произвольной плоской системы сил является плоская система сходящихся сил.***

Теорема о приведении произвольной плоской системы сил к простейшему виду.

Любая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру О заменяется одной силой $\vec{R}$ ***равной главному вектору, и приложенной в центре приведения О, и одной парой с моментом*** M_O***, равным алгебраической сумме моментов всех сил относительно центра О, то есть:***

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k, \quad M_O = \sum m_O(\vec{F}_k).$$

Примечание. ***Главный момент*** M_O***, для плоской системы сил заменен на алгебраическую сумму моментов всех сил относительно центра приведения, так как все векторные моменты сил будут параллельны.***

5.2. Равновесие произвольной плоской системы сил

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил ранее были получены в виде формул (*):

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0.$$

Из этих выражений вытекают аналитические условия равновесия плоской системы сил. Их можно получить в трех различных формах.

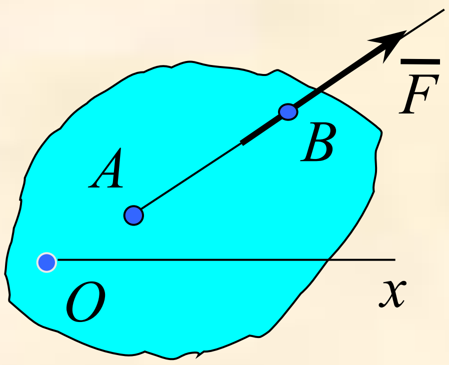
1. Основная форма условий равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\vec{F}_k) = 0. \qquad (1)$$

Вывод **Формулы (1)** ***выражают следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на две координатные оси и сумма моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.***

2. Вторая форма условий равновесия.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox, не перпендикулярную прямой AB, были равны нулю:



$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\overline{F}_k) = 0. \qquad (2)$$

3. Третья форма условий равновесия (уравнения 3-х моментов)

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A, B и C, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

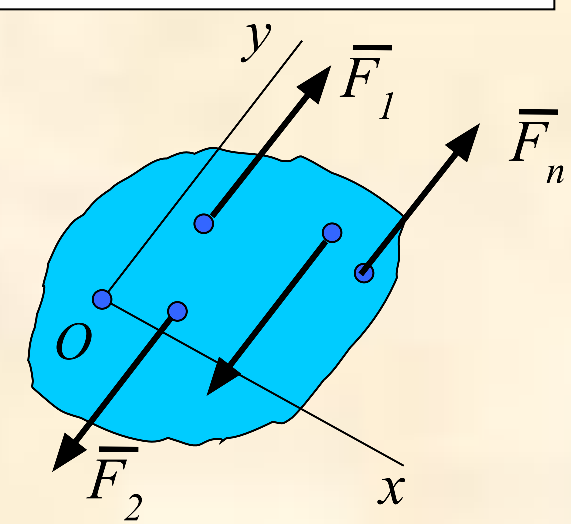
$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_C(\vec{F}_k) = 0. \qquad (3)$$

Равновесие плоской системы параллельных сил

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно направить ось Ox перпендикулярно силам, а ось Oy параллельно им.

Тогда первое уравнение в выражении (1) обратиться в тождество вида 0 ≡ 0. В результате для параллельных сил останется только два условия равновесия

$$\sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_A(\vec{F}_k) = 0,$$



Другая форма условий равновесия для параллельных сил, получающаяся из равенств (2) или (3), имеет вид

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0.$$

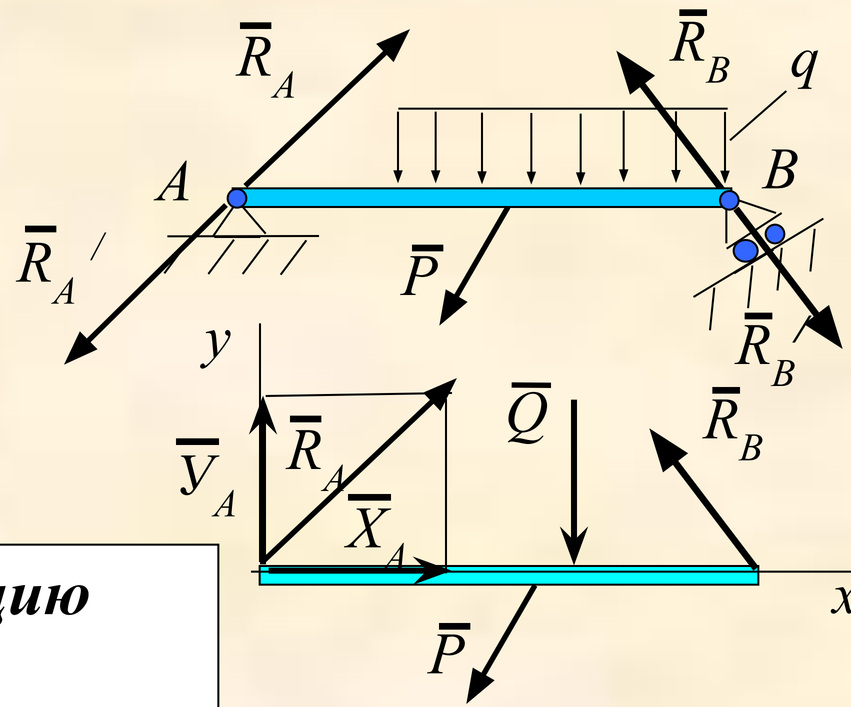
5.3. Решение задач на равновесие произвольной плоской системы сил.

Реакции неподвижной шарнирной опоры и жесткой заделки.

В технике часто встречаются задачи с тремя типами опорных закреплений: подвижная шарнирная опора, неподвижная шарнирная опора и жесткая заделка. Реакции этих опор были рассмотрены ранее.
Рассмотрим опорные реакции неподвижной шарнирной опоры и жесткой заделки подробнее.

1. Неподвижная шарнирная опора.

Реакция такой опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа.



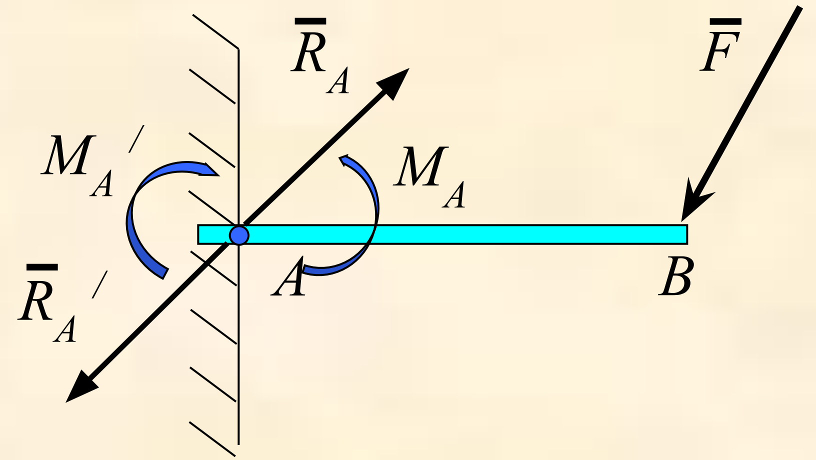
Освободимся от связей.

Неизвестную по направлению реакцию $\vec{R}_A$ ***можно разложить на две составляющие*** $\vec{X}_A$ *и* $\vec{Y}_A$ ***по координатным осям.***

__Вывод.__ Реакцию $\vec{R}_A$ ***неподвижной шарнирной опоры представляют в виде двух составляющих*** $\vec{X}_A$ *и* $\vec{Y}_A$, ***направленных по координатным осям.***

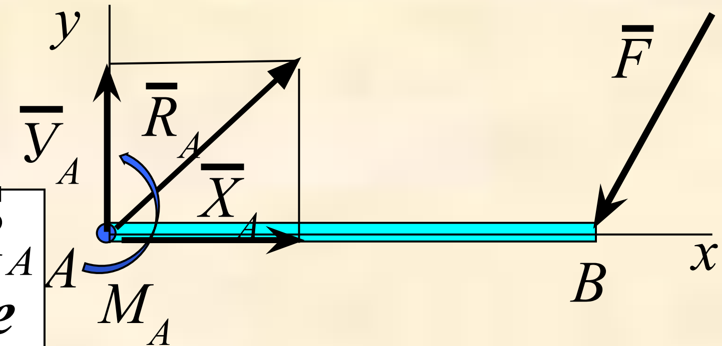
2. Жесткая заделка.

Ранее был сделан вывод о том, что действие жесткой заделки заменяется наперед неизвестной реакцией $\vec{R}_A$, которая может иметь любое направление в плоскости действия сил, и парой сил, с наперед неизвестным моментом M_A.



Освободимся от связи.

Неизвестную по направлению реакцию $\vec{R}_A$ можно разложить на две составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ по координатным осям.

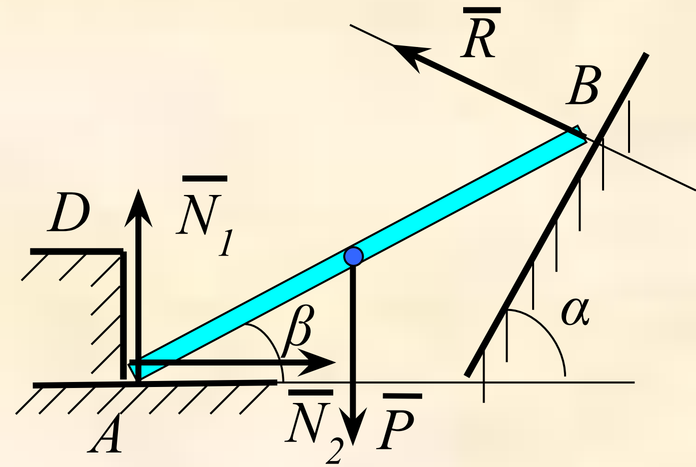


<u>Вывод.</u> Жесткую заделку заменяют двумя составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными по координатным осям, и парой сил, с наперед неизвестным моментом M_A.

Решение задач.

Применяют алгоритм действий, рассмотренный ранее.

<u>Пример 1</u>. ***Однородный брус АВ весом Р опирается концом А на гладкую горизонтальную плоскость и выступ D, а концом В – на наклонную плоскость, образующую с горизонтальной плоскостью угол α. Сам брус наклонен под углом β. Определить силы давления бруса на обе плоскости и выступ D.***



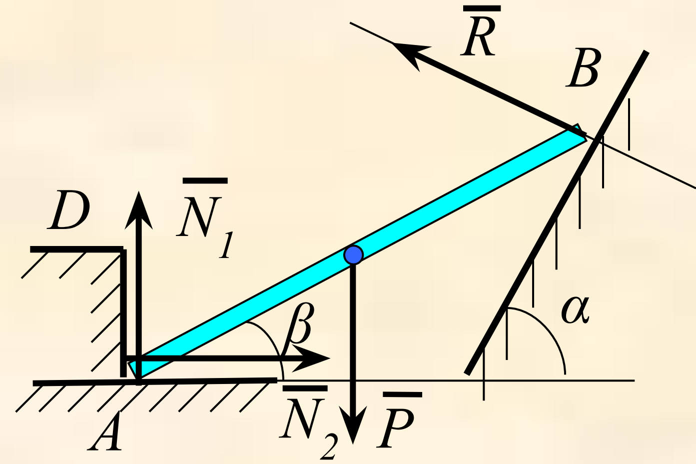
<u>1. Выберем объект равновесия.</u> Брус АВ.

<u>2. Приложим к объекту равновесия заданные силы.</u> Сила $\overline{P}$.

<u>3. Освободимся от связей.</u>

3. Освободимся от связей.

В точке В свободное опирание.



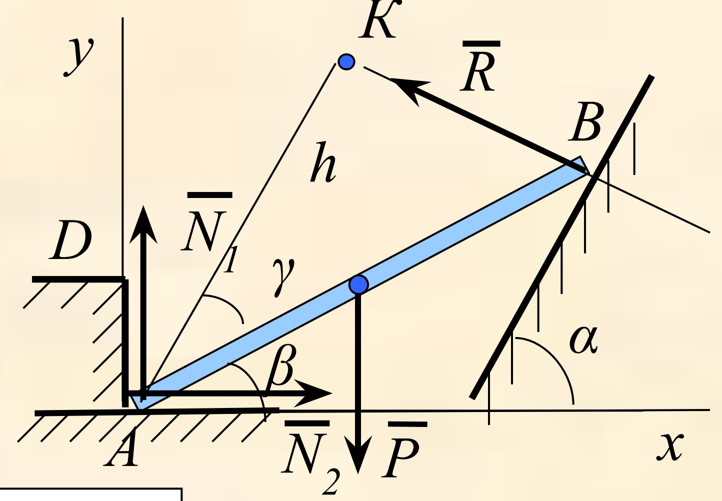
Реакция связи $\overline{R}$ **направлена по общей нормали в точке соприкосновения В.**

В других точках также свободное опирание.

Реакции связей $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ **будут направлены перпендикулярно соответствующим плоскостям.**

4. Выберем систему координат.

5. Выберем моментную точку.



Удобно взять точку A, так как в ней сходится большее число неизвестных сил (реакций связей).

6. Составим таблицу проекций и моментов.

$\overline{F}_k$	$\overline{N}_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{P}$	$\overline{R}$
F_{kx}	0	N_2	0	$-R\sin(\alpha)$
F_{ky}	N_1	0	$-P$	$R\cos(\alpha)$
$m_A(\overline{F}_k)$	0	0	$-P\,a\cos(\beta)$	$R\,2a\cos(\gamma)$

Обозначим AB = 2 a.

Найдем плечо силы $\overline{R}$ относительно точки A: h = AK.

Введем угол $\gamma = \alpha - \beta$. Тогда $h = 2\,a\cos(\gamma)$.

7. Составим условия (уравнения) равновесия.

$$x:\quad N_2 - R\sin(\alpha) = 0,$$
$$y:\quad N_1 - P + R\cos(\alpha) = 0,$$
$$M_A:\quad -P\,a\cos(\beta) + R\,2a\cos(\gamma) = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$R = (P\cos(\beta)) / 2\cos(\gamma)$$

или

$$R = (P\cos(\beta)) / 2\cos(\alpha - \beta).$$

Подставляя значение R во второе уравнение, получим

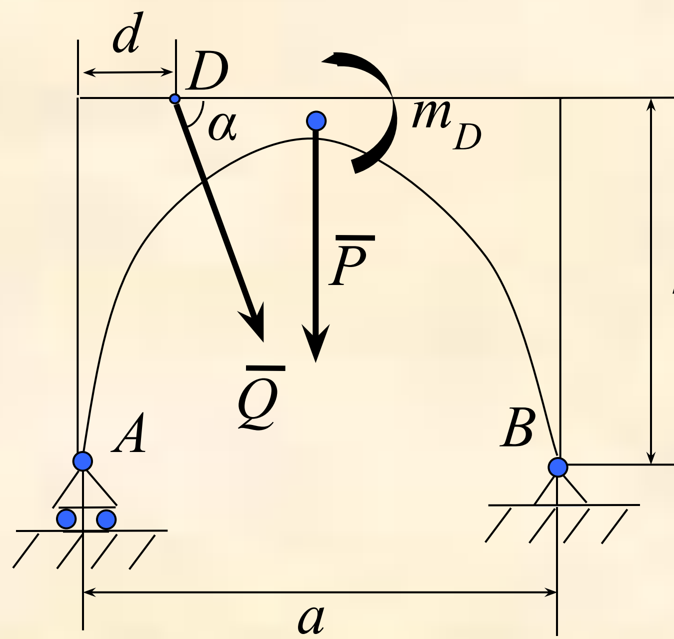
$$N_1 = P\left[1 - \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{2\cos(\alpha-\beta)}\right].$$

Решая первое уравнение, найдем

$$N_2 = P\,\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{2\cos(\alpha-\beta)}.$$

Пример 2.

Симметричная арка загружена системой сил, приводящейся к силе Q = 40 кН, приложенной в точке D, и паре сил с моментом m_D = 120 кН м. Вес арки P=80 кН. Дано: AB = a = 10 м, d = 2 м, h = 3 м, α = 60^0.



Решение **.**

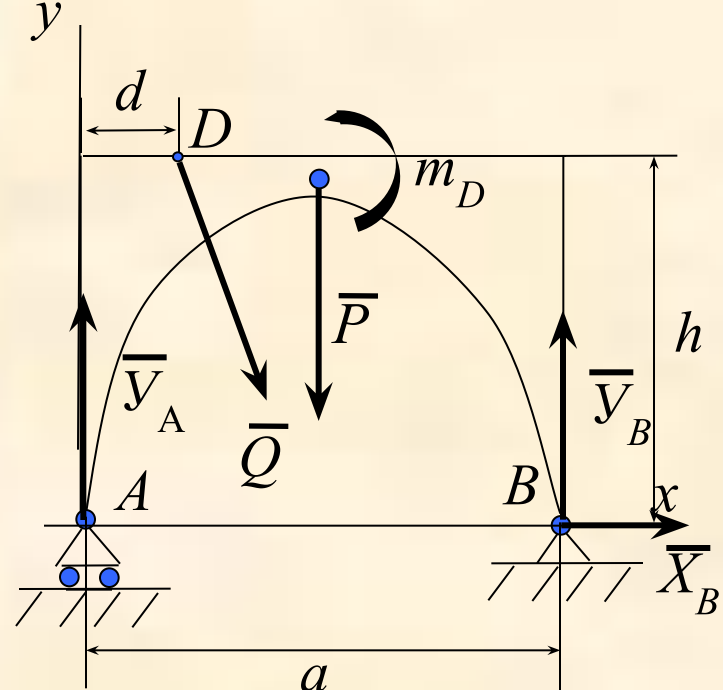
1. Выберем объект равновесия.

Арка.

2. Приложим к объекту равновесия заданные силы.

Силы $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ***и пара сил с моментом*** m_D.

3. Освободимся от связей.



В точке А подвижный шарнир, который заменяется одной реакцией $\overline{Y}_A$, перпендикулярной плоскости, по которой шарнир может перемещаться.

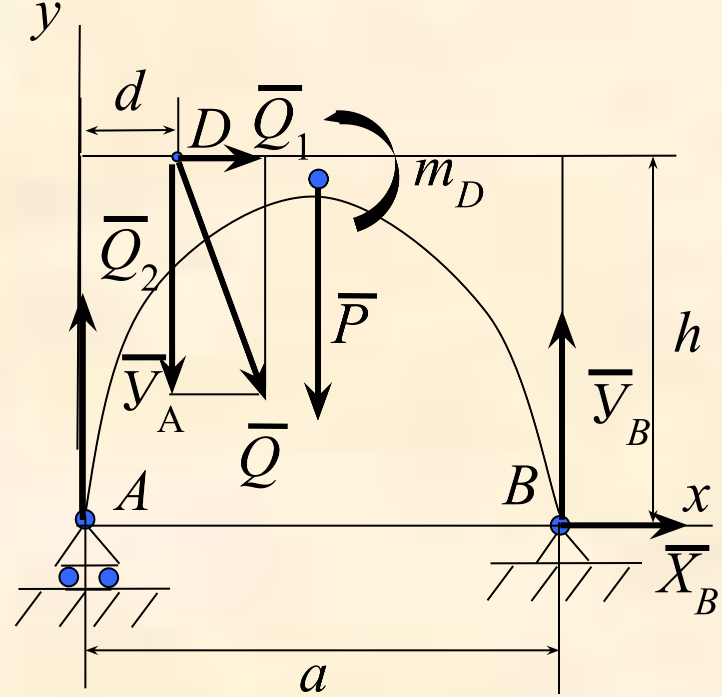
В точке В неподвижный шарнир, который заменяется двумя реакциями $\overline{X}_B$ *и* $\overline{Y}_B$.

4. Выберем систему координат.

5. Выберем две моментные точки для того, что бы составить вторую форму условий равновесия.

Удобно взять точки А и В, так как в них сходится большее число неизвестных сил (реакций связей).

Удобно взять точки А и В, так как в них сходится большее число неизвестных сил (реакций связей).



<u>6. Составим таблицу проекций и моментов</u>.

Предварительно разложим силу $\overline{Q}$ на две составляющие $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$.

Модули составляющих:
$Q_1 = Q\cos\alpha$, $Q_2 = Q\sin\alpha$.

$\overline{F}_k$	$\overline{Y}_A$	$\overline{X}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{P}$	$\overline{Q}_1$	$\overline{Q}_2$	m_D
F_{kx}	0	X_B	0	0	$Q\cos\alpha$	0	0
$m_A(\overline{F}_k)$	0	0	$Y_B a$	$-Pa/2$	$-Q\cos(\alpha)h$	$-Q\sin(\alpha)d$	m_D
$m_B(\overline{F}_k)$	$-Y_A a$	0	0	$Pa/2$	$-Q\cos(\alpha)h$	$Q\sin(\alpha)(a-d)$	m_D

При вычислении момента силы $\overline{Q}$ была использована теорема Вариньона о моменте равнодействующей: $m_A(\overline{Q}) = m_A(\overline{Q}_1) + m_A(\overline{Q}_2)$.

7. Составим уравнения равновесия.

$$\sum F_{kx} = X_{B} + Q\cos\alpha = 0,$$
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = У_B a - Pa/2 - h\,Q\cos\alpha - d\,Q\sin\alpha + m_D = 0,$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = -\,У_A a + Pa/2 - h\,Q\cos\alpha + (a-d)\,Q\sin\alpha + m_D = 0.$$

8. Решим уравнения

Из первого уравнения получим

$$X_{B} = -\,Q\cos\alpha = -\,20 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения найдем

$$У_B = P/2 + Q\,(d\sin\alpha + h\cos\alpha)/a - m_D/a \approx 40{,}9 \text{ кН}.$$

Из третьего уравнения вычислим

$$У_A = P/2 + Q\,[(a-d)\sin\alpha - h\cos\alpha]/a + m_D/a = 73{,}7 \text{ кН}.$$

Модуль полной реакции в опоре В найдется по формуле:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + У_B^2} \approx 45{,}5 \text{ кН}$$

9. Сделаем проверку

Составим уравнение проекций на ось Ау

$$\sum F_{ky} = У_A + У_B - Q \sin\alpha - P = 114{,}6 - 114{,}6 \equiv 0.$$