С Т А Т И К А

Тема 8. Трение.

Тема 9. Центр тяжести.

8. Трение

Несколько видов трения, в т. ч.:

а) трение скольжения;

б) трение качения.

8.1. Трение скольжения .

Опр. Силой трения скольжения называется сила сопротивления относительному скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел.

8.2 Законы трения скольжения при покое.

а) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого предельной силой трения.

Сила трения, приложенная к телу, направлена в сторону противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

б) Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию: $F_{пр} = f_0 \cdot N$.

Статический коэффициент трения f_0 ***– величина безразмерная; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей.***

в) Значение предельной силы трения $F_{пр}$ ***в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей. При равновесии сила трения*** $F \leq F_{пр}$.

Опр. ***Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $\vec{F}_{пр}$ называется предельным равновесием.***

8.3. Трение скольжения при движении

Опр. ***При движении сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление:***

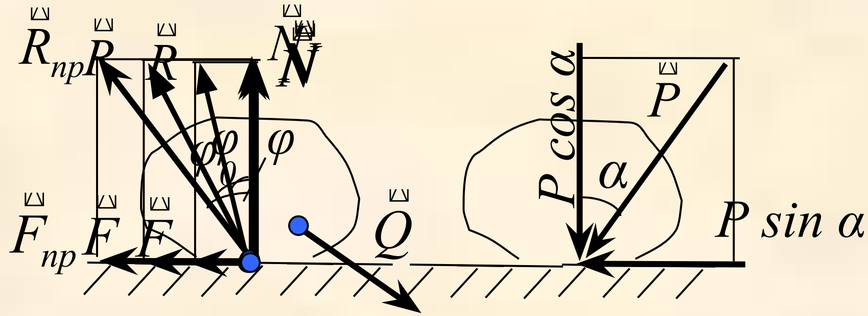
$$F = f \cdot N.$$

Динамический коэффициент трения скольжения - f безразмерная величина и определяется опытным путем.

8.4. Реакция шероховатой связи. Угол трения.

Реакция реальной связи слагается из двух составляющих: из нормальной реакции $\vec{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\vec{F}$.

При изменении силы трения от нуля до $\vec{F}_{пр}$ сила $\vec{R}$ изменяется от $\vec{N}$ до $\vec{R}_{пр}$, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения φ_0.



Вывод. ***Никакой силой, образующей с нормалью угол α, меньший угла трения ϕ_0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя.***

Опр. ***Наибольший угол ϕ_0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется углом трения:***

$$tg\,\phi_0 = F_{пр} / N = f_0.$$

8.5. Равновесие при наличии трения.

Различают два типа задач на равновесие с учетом трения скольжения:

1. Предельное равновесие, когда сила трения равна $F_{пр} = f_0 \cdot N$. Задачи этого типа решают обычно, добавляя к действующим силам силу $F_{пр}$;

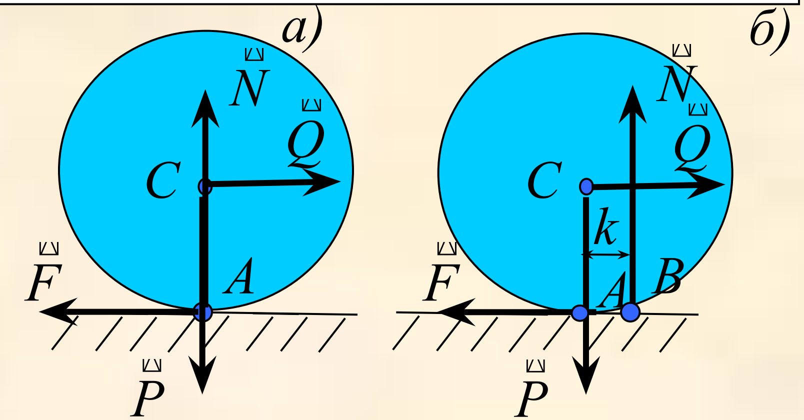
2. Определение силы трения F, когда равновесие не является предельным. В этом случае силу трения скольжения считают неизвестной и определяют ее из уравнений равновесия.

8.6. Трение качения.

Опр. Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

При отсутствии деформаций (Рис. а)), качение должно начаться при любой малой силе $\vec{Q}$.

При учете деформации касание тел происходит вдоль некоторой площадки АВ (Рис. б)).



Пара сил $\vec{Q}$, $\vec{F}$ способствует вращению цилиндра, а пара $\vec{N}$, $\vec{P}$ препятствует этому вращению.

При увеличения силы $\vec{Q}$ линия действия $\vec{N}$ будет смещаться в сторону B и расстояние k будет возрастать.

Так будет до тех пор, пока момент пары сил $\vec{Q}$, $\vec{F}$ не превысит момент пары $\vec{N}$, $\vec{P}$, т. е. пока Q не достигнет предела - $Q_{пр}$.

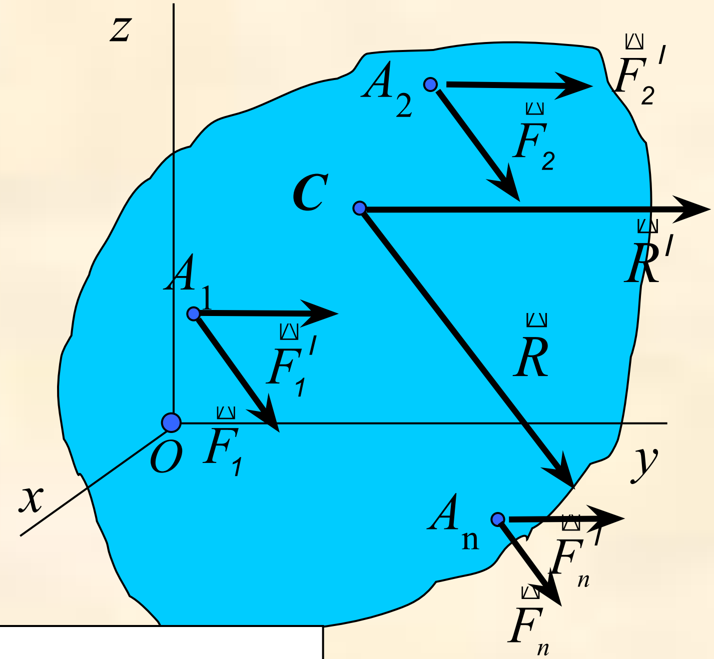
<u>Опр.</u> Величина k называется коэффициентом трения качения.

<u>Вывод.</u> Для учета трения качения необходимо добавить к действующим силам момент трения качения $M_k = N \cdot k$, направленный в сторону противоположную качению.

9. Центр тяжести

9.1. Центр параллельных сил

Рассмотрим пространственную систему параллельных и направленных в одну сторону сил, имеющую равнодействующую, приложенную к точке С - $\vec{R}$.



Если повернуть все силы на некоторый угол, то равнодействующая повернется на тот же угол.

<u>Вывод.</u> Линия действия равнодействующей при повороте системы сил на любой угол всегда проходит через одну и ту же точку С.

<u>Опр.</u> Точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется <u>центром параллельных сил.</u>

Определим координаты точки C.

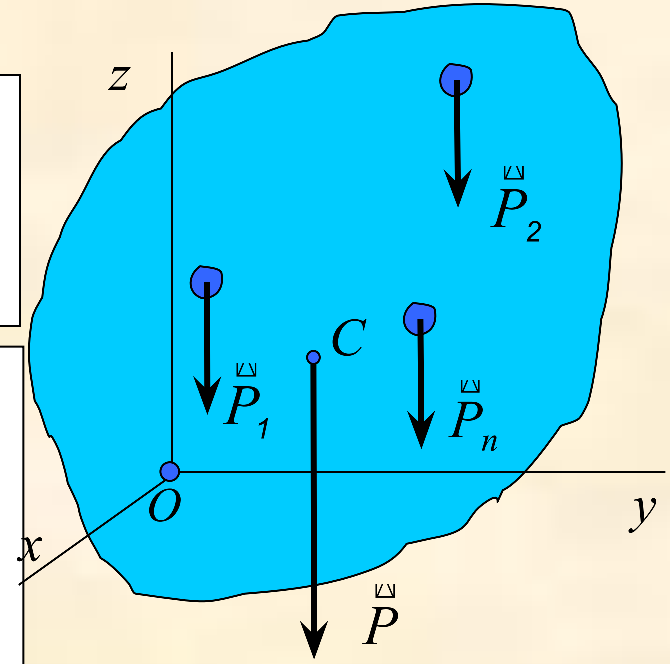
<u>Вывод.</u> Координаты центра параллельных сил определяются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot x_k; \quad y_C = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot y_k; \quad z_C = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot z_k, \qquad (1)$$

где

x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил F_k ($k = 1,2, \ldots, n$).

9.2. Центр тяжести твердого тела



Опр. ***Модуль равнодействующей сил тяжести*** $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ ***называется*** ***весом тела*** ***и определяется равенством*** $P = \sum P_k$.

Опр. ***Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела в пространстве.***

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются формулами (1); следовательно,

$$x_C = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot x_k; \qquad y_C = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot y_k; \qquad z_C = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot z_k, \qquad (2)$$

где x_k, y_k, z_k ***– координаты точек приложения сил*** P_k ***(k = 1, 2, …, n).***

9.3.Координаты центров тяжести однородных тел

Понятие однородного тела

Опр. ***Однородным называется тело, когда вес $p_к$ любой его части пропорционален объему $V_к$ этой части: $p_к = \gamma \cdot V_к$, а вес P всего тела пропорционален объему V, т.е. $P = \gamma \cdot V$, где γ − вес единицы объема.***

Центр тяжести однородного объема V

Подставляя выражения $p_к = \gamma \cdot V_к$ и $P = \gamma \cdot V$ в формулы (2), получим:

$$x_C = \sum V_к \cdot x_к / V, \quad y_C = \sum V_к \cdot y_к / V, \quad z_C = \sum V_к \cdot z_к / V, \qquad (3)$$

где $V_к$ − объемы частиц тела, V − объем тела, $x_к$, $y_к$, $z_к$ − координаты объемов частиц тела.

Центр тяжести однородной тонкой пластинки

Центр тяжести однородной тонкой пластинки определится аналогично:

$$x_C = \sum s_к \cdot x_к / S, \quad y_C = \sum s_к \cdot y_к / S, \qquad (4)$$

где S − площадь всей пластины; $s_к$ − площади ее частей.

Центр тяжести однородной линии

Центр тяжести однородной линии определится по формулам:

$$x_C = \sum l_к \cdot x_к / L, \quad y_C = \sum l_к \cdot y_к / L, \quad z_C = \sum l_к \cdot z_к / L, \qquad (5)$$

где L −длина всей линии, l_k − длины ее частей.

9.4.Способы определения координат центров тяжести тел

Способ симметрии

Теорема. ***Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.***

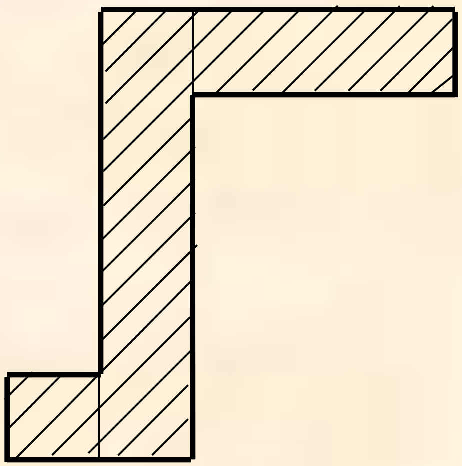
Способ разбиения

Суть метода разбиения заключается в том, что если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести можно вычислить по формулам (3) – (5).

При этом число слагаемых в каждой сумме будет равно числу частей, на которые разбито тело.

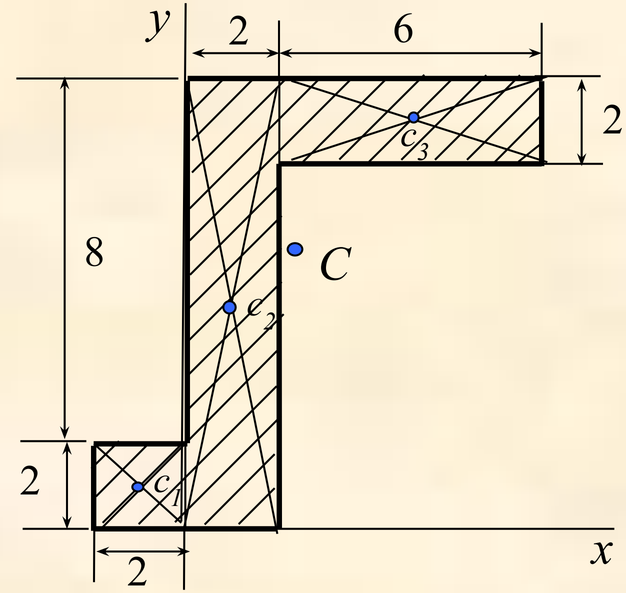
Пример применения способа разбиения

Определить координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рисунке. Размеры в сантиметрах.



Решение.

Выберем оси координат и разобьем пластинку на три прямоугольника.



Вычислим координаты центров тяжести каждого из прямоугольников и их площади.

№	1	2	3
x_k	- 1	1	5
y_k	1	5	9
S_k	4	20	12

Площадь всей пластины

$$S = s_1 + s_2 + s_3 = 4 + 20 + 12 = 36 \text{ см}^2.$$

Подставляя вычисленные величины в формулы (4) получим

$$x_C = (s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 + s_3 \cdot x_3) / S =$$
$$= (-4 + 20 + 60) / 36 = 2{,}1 \text{ см},$$

$$y_C = (s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3) / S = (4 + 100 + 108) / 36 = 5{,}9 \text{ см}.$$

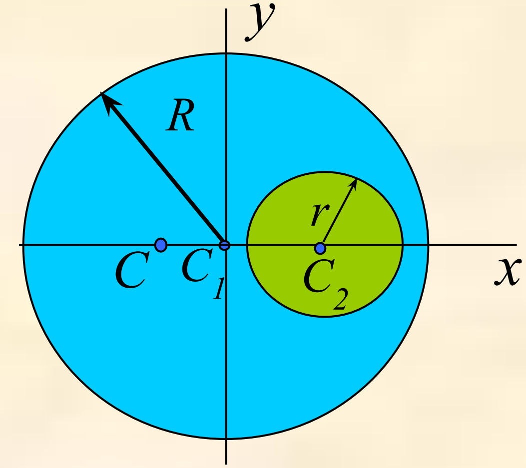
Центр тяжести пластины показан на рисунке.

Способ дополнения (способ отрицательных площадей)

Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тел без выреза и вырезанной части известны.

Пример применения способа разбиения

Определить положение центра тяжести круглой пластинки радиуса R с вырезом радиуса r. Расстояние $C_1 C_2 = a$.



Решение

Найдем площади и координаты центров тяжестей

$$s_1 = \pi R^2, \quad s_2 = -\pi r^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad S = s_1 + s_2 = \pi (R^2 - r^2).$$

Определим координаты центра тяжести по формулам (4)

$$x_C = (x_1 s_1 + x_2 s_2)/S = -a r^2 / (R^2 - r^2); \qquad y_C = 0.$$

Найденный центр тяжести C лежит левее точки C_1.

Способ интегрирования

Разобьем однородный объем V; однородную пластинку, площадью S; однородную линию, длиной L, на бесконечное количество малых частиц и переходя в формулах (3) – (5) к пределу, получим:

$$x_C = 1/V \int_{(V)} x \cdot dv, \quad y_C = 1/V \int_{(V)} y \cdot dv, \quad z_C = 1/V \int_{(V)} z \cdot dv, \qquad (3^/)$$

где dv − бесконечно малый объем частицы тела, V − объем тела, x, y, z − координаты бесконечно малых частиц тела.

$$x_C = 1/S \int_{(S)} x \cdot ds, \quad y_C = 1/S \int_{(S)} y \cdot ds, \qquad (4^/)$$

где ds − бесконечно малая площадь частицы пластины, S − площадь пластины, x, y − координаты бесконечно малых частиц пластины.

$$x_C = 1/L \int_{(L)} x \cdot dl, \quad y_C = 1/L \int_{(L)} y \cdot dl, \quad z_C = 1/L \int_{(L)} z \cdot dl, \qquad (5')$$

где dl − бесконечно малая длина частицы линии,
L − длина линии, x, y, z − координаты бесконечно малых частиц линии.

Определение координат центра тяжести по формулам (3′) - (5′) выражает метод интегрирования.

Экспериментальные способы

Различают два основных экспериментальных способа определения положения центра тяжести неоднородных тел произвольной формы.

а) метод подвешивания

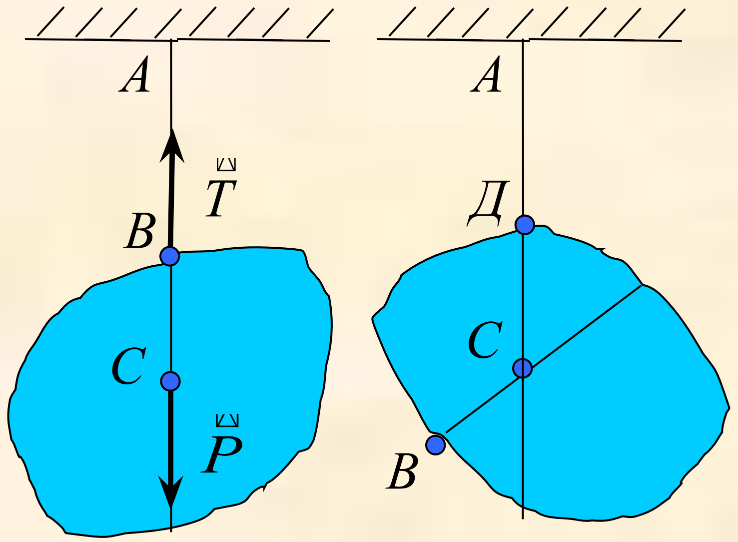
Заключается в том, что тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки.

Подвесим пластину произвольной формы на тросе (нити) АВ.

Пластина будет находится в равновесии под действием двух сил: силы тяжести тела $\vec{P}$***, приложенной к центру тяжести С, и силы натяжения нити -*** $\vec{T}$***.***

В соответствии с аксиомой о двух силах линии действия сил будут совпадать, т. е. центр тяжести С лежит на линии, которая продолжает нить.

Проведем эту линию мелом и подвесим пластину за другую точку Д.



Центр тяжести пластины будет находиться на линии, продолжающей нить. Проведем эту линию.

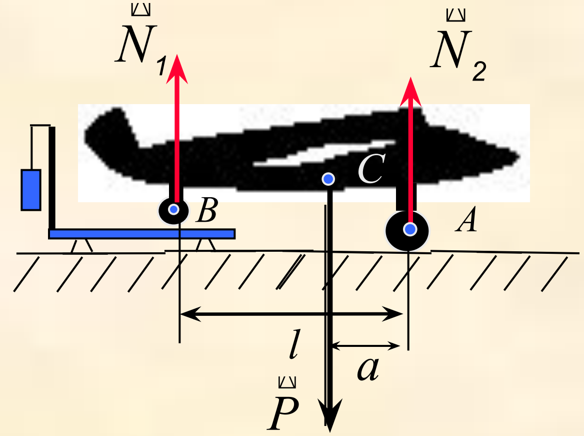
Центр тяжести С находится на пересечении линий.

б) метод взвешивания

Применяется для определения центра тяжести тяжелых неоднородных тел (самолет, паровоз и т.п.).

Рассмотрим самолет, расстояние между колесами которого AB = l.

Горизонтальную координату центра тяжести можно считать известной, если будет найдено расстояние a.



Для определения a поставим колесо B на весы и найдем реакцию $\vec{N}_1$.

Аналогично, поставив колесо A на весы, найдем реакцию $\vec{N}_2$.

Тогда вес самолета определится в виде суммы: $P = N_1 + N_2$.

Уравнение моментов относительно точки A:

$$-N_1 \cdot l + P \cdot a = 0.$$

Откуда находим: $a = l \cdot N_1 / (N_1 + N_2)$.

9.5. Центры тяжести некоторых однородных тел

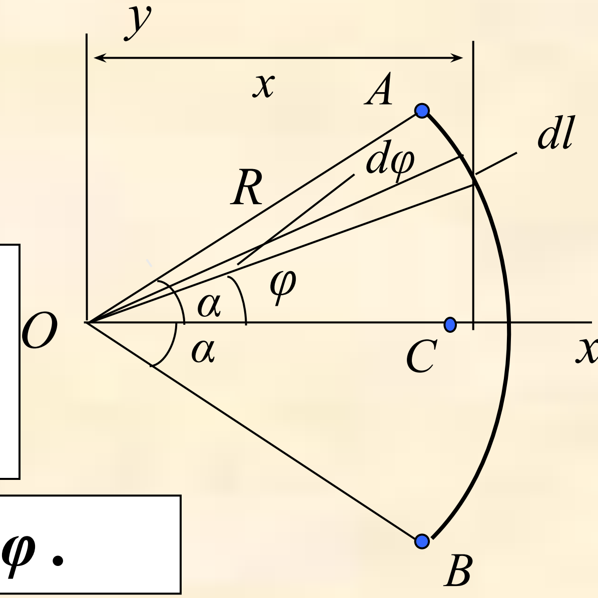
Центр тяжести дуги окружности

Рассмотрим дугу АВ радиуса R с центральным углом АОВ= 2α.

В силу симметрии ц. т. лежит на оси x.

Найдем x_C по методу интегрирования.

Элемент dl дуги длиной dl = R dφ, опирается на угол dφ и его положение определяется углом φ.



Найдем координату x элемента dl: x = R cos φ .

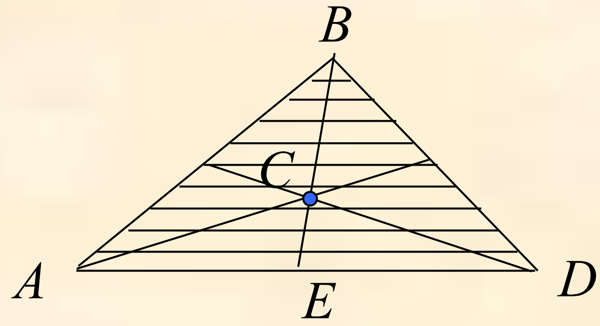
Подставляя выражения для dl и x в формулу (5′) , получим

$$x_C = 1/L\int_A^B x \cdot dl = R^2/L \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \, d\varphi = 2R^2/L \sin\alpha.$$

С учетом того, что L = R 2 α , находим, что <u>центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра О, равным</u> $x_C = (R \sin\alpha)/\alpha.$ (*)

Центр тяжести площади треугольника

Разобьем площадь треугольника ABD прямыми, параллельными стороне AD, на n узких полосок.



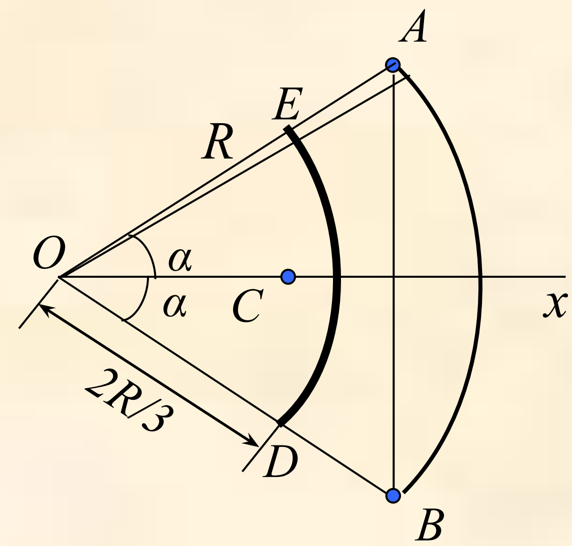
Центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане BE треугольника.

Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане.

Аналогичный результат получается для двух других медиан.

<u>Вывод.</u> Центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.
При этом CE = BE / 3.

<u>*Центр тяжести кругового сектора*</u>



Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом 2 α .

Разобьем площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O, на n секторов.

При большом числе n их можно считать треугольниками, центры тяжести которых лежат на дуге DE радиуса 2R/3.

Т. е. центр тяжести сектора OAB совпадает с центром тяжести дуги DE, положение которого определяется по формуле (*).

<u>Вывод.</u> Центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O, равном

$$x_C = 2\,R\,\sin\alpha\,/\,(3\alpha).$$