

ВВЕДЕНИЕ

- **Механика** - наука о движении материальных тел и взаимодействии между ними.

Принципы и законы механики использовались с самого начала истории человечества. Развитие механики можно разделить на два этапа: существование механики как ремесла и как науки.

Механика как ремесло подразумевала устную передачу полученных в результате практической деятельности знаний от учителя к ученикам.

Механика как наука появилась с возникновением первых научных трудов, а основоположниками механики считаются Архимед, Пифагор, Галилей, Ньютон и другие.

- **Теоретическая (классическая механика)** - это наука, в которой изучаются общие свойства движения и равновесия материальных тел.
- Общие – значит, те свойства, которые присущи любому телу - жидкому, газообразному, твердому, механизму и т.д. и отражаются одними и теми же законами. На основе общих законов движения и равновесия тел развиваются науки, в которых изучаются закономерности движения конкретных тел. Например, движение газов изучается в аэродинамике, движение жидкостей - в гидродинамике.
- Рабочим инструментом теоретической механики является высшая математика. Для изучения механики особенно необходимо знание таких ее разделов, как векторная алгебра, дифференцирование и интегрирование.
- Основные разделы теоретической механики - статика, кинематика и динамика. В **статике** (от слова "статус"-покой) изучаются силы и законы равновесия материальных тел. **Кинематика** ("кинема" - движение) изучает движение тел без учета действия сил, а **динамика** ("динамо"- сила в движении)- движение тел под действием сил.

- Таким образом, с одной стороны статика и кинематика нужны для изучения динамики, а с другой - на основе этих разделов изучаются такие науки, как сопротивление материалов и теория машин и механизмов.
- В сопротивлении материалов излагаются инженерные методы расчета элементов сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость. Теория механизмов представляет собой науку, в которой изучают структуру, кинематику и динамику механизмов независимо от их конкретного применения. Детали машин рассматривают основы расчета и конструирования деталей и узлов общего назначения, встречающихся в различных механизмах и машинах.
- Все разделы прикладной механики тесно связаны между собой и с курсом теоретической механики: так курс сопротивления материалов основан на статике, кинематический расчет механизмов возможен после изучения кинематики, прочностной расчет деталей - на сопротивлении материалов и т.д. Теоретическая механика является базовой дисциплиной для изучения тех объектов, с которыми придется иметь дело современным специалистам в различных областях техники.

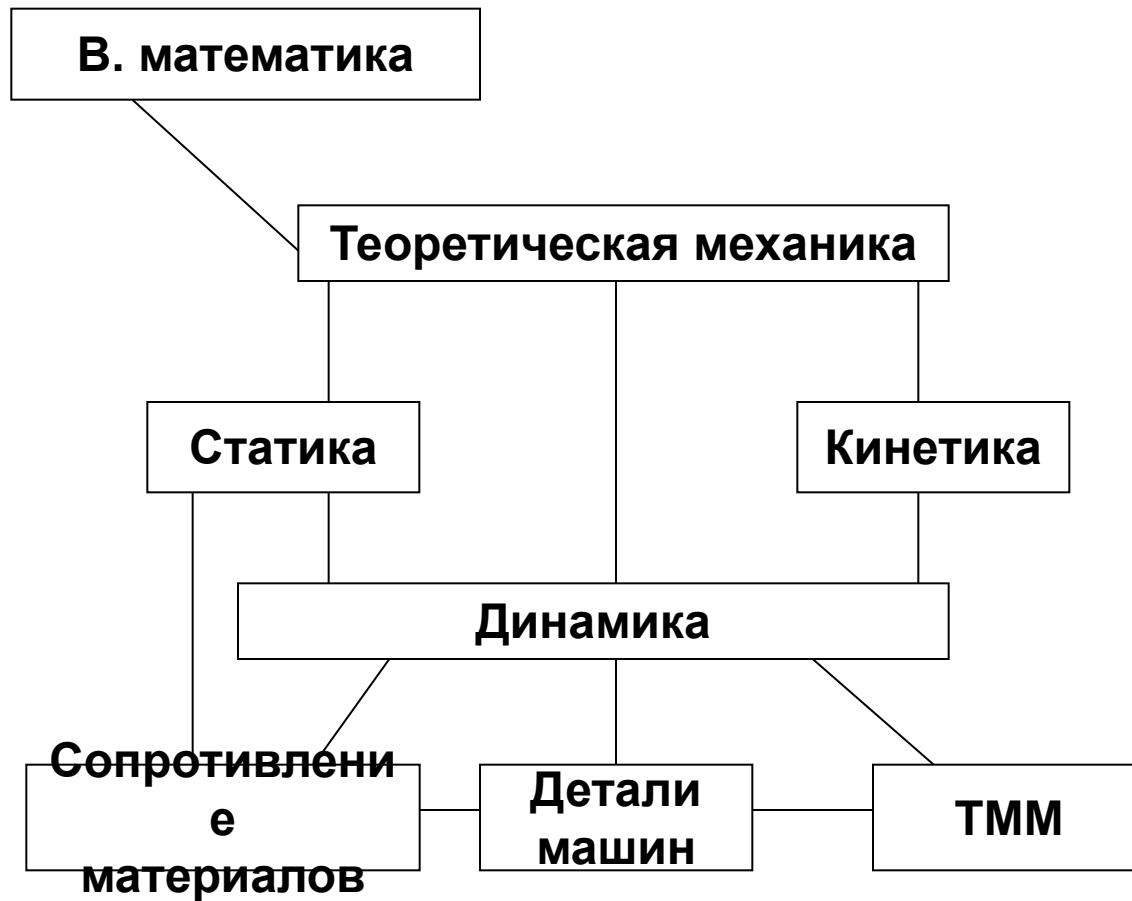


Рис.1.1. Структура курса теоретической механики и связь ее с другими дисциплинами

СТАТИКА

1. Основные понятия и определения

- Основным объектом исследования статики является сила.

Сила - это количественная мера взаимодействия материальных тел.

Действие силы определяется тремя факторами: величиной (модулем), направлением и точкой приложения, то есть сила является векторной величиной и изображается в виде отрезка, на конце которого ставится стрелка (рис.1.2).



Рис.1.2. Изображение вектора силы

Величина силы в масштабе равна длине отрезка. В тексте вектор силы обозначается буквой со стрелкой наверху, а модуль силы - теми же буквами, но без стрелки, либо обозначением вектора силы, заключенным в скобки, обозначающие абсолютную величину вектора - F

Модуль силы в общепринятой в настоящее время системе единиц СИ измеряется в ньютонах (Н), применяются и более крупные единицы - килоньютон ($1\text{ кН} = 10^3\text{ Н}$), меганьютон ($1\text{ МН} = 10^6\text{ Н}$).

- Прямая, совпадающая с вектором силы, называется **линией действия силы**.
- **Система сил** - это любая совокупность сил. Как правило, система сил характеризуется каким-либо признаком.
- Различают **сходящуюся систему сил** (линии действия которых пересекаются в одной точке), **плоскую** (лежат в одной плоскости), **пространственную**, **систему параллельных сил** и т.д.

Основными задачами статики являются:

1. Приведение данной системы сил к простейшему виду (упрощение).
2. Исследование условий равновесия данной системы сил.

Равновесие (покой) является частным случаем движения, то есть изменения положения одних тел по отношению к другим телам.

Эквивалентными системами сил называются такие системы, которые оказывают на тело одно и то же действие.

- **Уравновешенной** называется система сил, действие которой эквивалентно нулю.
- **Равнодействующая** - это сила, действие которой эквивалентно действию данной системы сил.

В статике рассматриваются, как правило, **абсолютно твердые тела**, расстояние между двумя любыми точками которых остается постоянным. На самом деле это является абстракцией, так как любое твердое тело под действием нагрузки деформируется, однако во многих случаях величиной деформаций можно пренебречь.

2. Аксиомы статики

Все уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений - аксиом, то есть математически недоказуемых положений. Они представляют собой результаты обобщений практической деятельности.

1. Если на свободное твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии, если эти силы равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (рис.1.3).

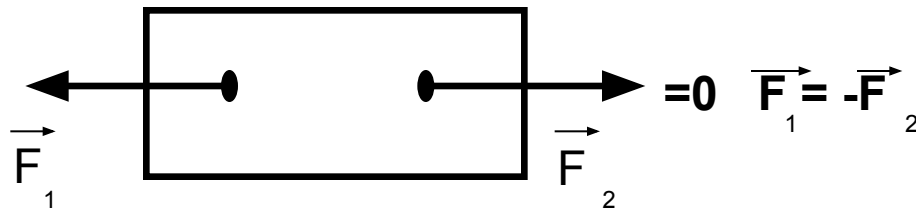


Рис.1.3. Первая аксиома статики

2. Действие данной системы сил не изменится, если к ней добавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие: не изменяя действие силы, ее можно переносить вдоль линии действия. Доказательство приведено на рис.1.4.

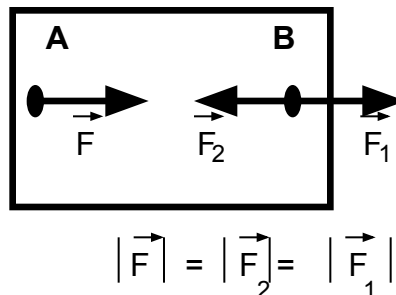


Рис.1.4. Следствие второй аксиомы статики

Итак, имеем силу , приложенную в точке А. Приложим в произвольной точке В, лежащей на линии действия силы , уравновешенную систему сил, модули которых равны модулю силы .

Затем уберем уравновешенную систему сил и таким образом, на тело останется действовать одна сила , равная по модулю силе , но приложенная в точке В, то есть, не изменяя действия силы , ее перенесли из точки А в точку В.

3. Аксиома параллелограмма.

Две силы, приложенные в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке, по величине и направлению равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рис.1.5).

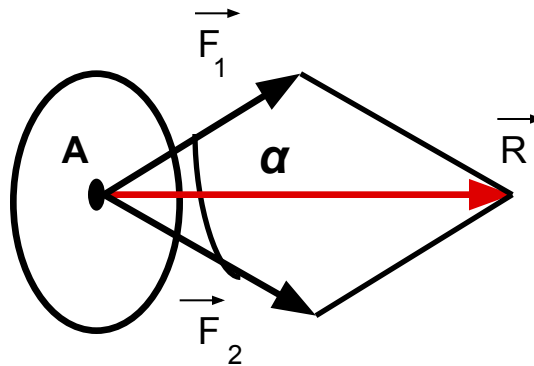


Рис.1.5. Аксиома параллелограмма

- Вектор R называется **геометрической суммой** этих сил.

Модуль его можно найти, применяя теорему косинусов

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\alpha)}.$$

На основании данной аксиомы одну силу можно заменить двумя силами, что часто применяют в статике.

Аксиома 4

Два тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению (рис.1.6.).

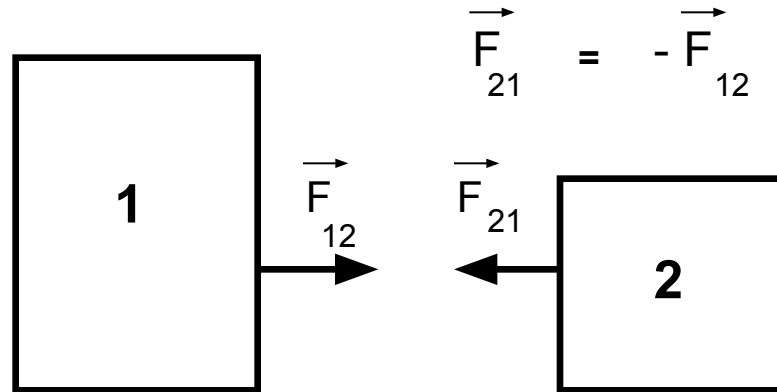


Рис.1.6. Аксиома равенства действия и противодействия

Это не зависит от того, касаются ли тела друг друга непосредственно или взаимодействуют на расстоянии.

3. Связи и их реакции

Рассматриваемые в механике тела могут быть свободными и несвободными.

- **Свободным** называется тело, которое не связано с другими телами и может совершить из данного положения любое перемещение в пространстве.
- Тело, перемещение которого хотя бы в одном направлении ограничивается в пространстве другими телами, называется **несвободным**.
- Тела, которые препятствуют перемещению данного тела, называются **связями**, а силы, с которыми связи действуют на это тело, - **реакциями связей**.
Реакция связи всегда направлена противоположно тому направлению, по которому связь препятствует перемещению тела.

Простейшие виды связей.

1. Гибкая связь (нить, трос, цепь и т.д.).

Поскольку нить ограничивает перемещение подвешенного к ней тела только в одном направлении (вдоль нити от точки подвеса), то реакция нити также направлена вдоль нити, но к точке подвеса (рис.1.7). Нить может только растягиваться.

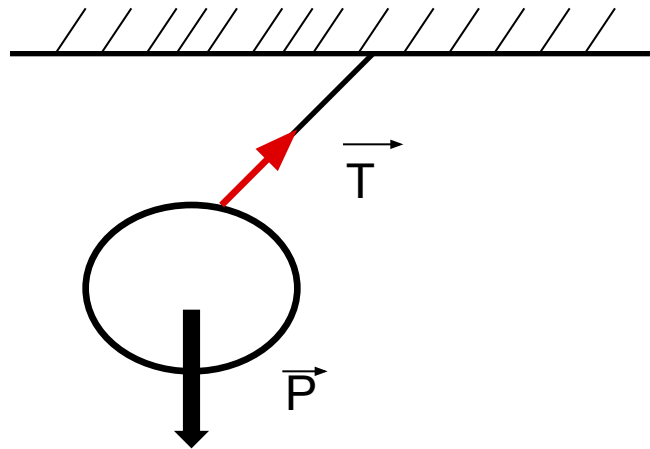


Рис.1.7.Гибкая связь

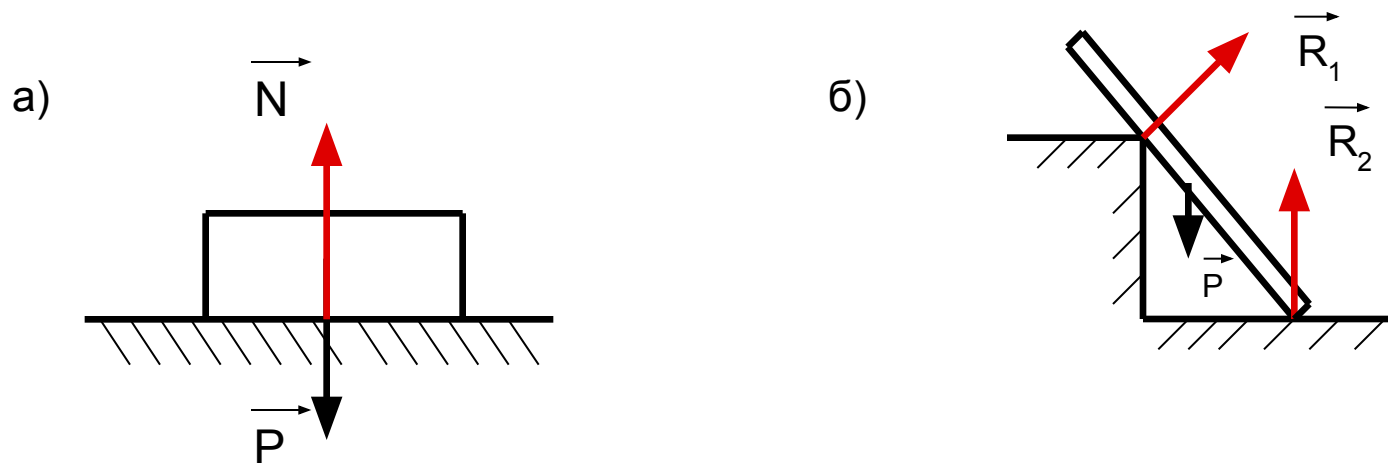


Рис.1.8. Гладкая поверхность

2. Гладкая (без трения) поверхность (опора).

В этом случае реакция направлена по нормали к поверхности (рис.1.8,а).

Если одно из тел касается другого в точке, то реакция направлена по нормали к другому телу (рис.1.8,б).

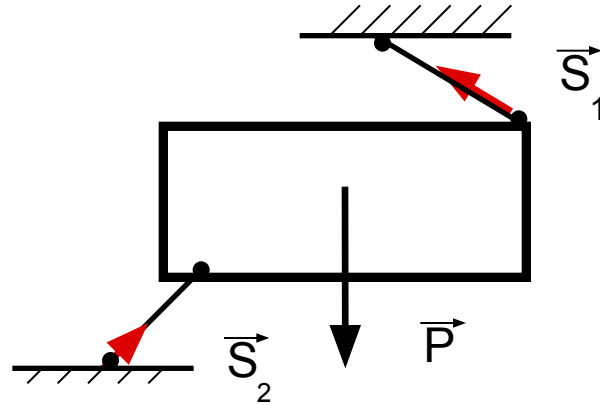


Рис.1.9. Тонкий невесомый

3. Тонкий невесомый стержень с шарнирным закреплением концов.

Поскольку стержень находится в равновесии под действием двух сил, приложенных к его концам, то согласно первой аксиоме статики эти силы должны быть направлены по одной прямой, следовательно, реакция стержня на тело будет направлена вдоль стержня (рис.1.9).

В отличие от нити стержень может быть как сжат, так и растянут.

Одной из важных задач статики является определение реакций связей. Для этого используется **принцип (аксиома) отбрасывания связей**:

каждое несвободное тело можно считать свободным, если отбросить связи и заменить их действие реакциями связей (рис.1.10). При решении задач новый рисунок, как правило, не делается, а реакции показываются прямо на связях.

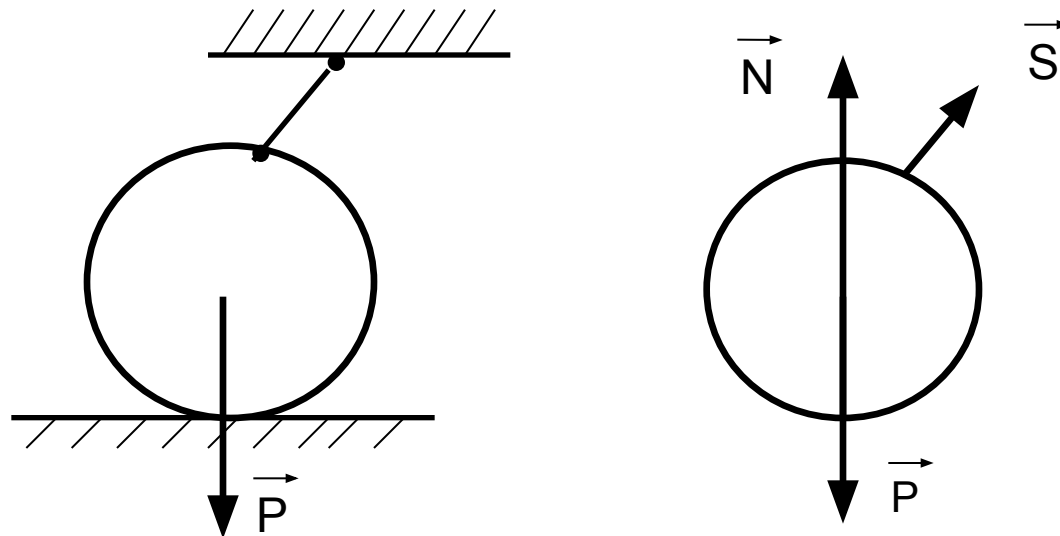


Рис.1.10. Аксиома отбрасывания связей

4. Действия с силами

С силами, как и с любыми векторами, можно проводить операции геометрического сложения и разложения. Сложить две силы можно, используя аксиому параллелограмма сил, строя диагональ параллелограмма на этих силах, как на сторонах.

Если нужно сложить несколько сил, то следует построить силовой многоугольник, прикладывая каждую последующую силу к концу предыдущей. Замыкающая сторона силового многоугольника и будет равна геометрической сумме этих сил. Заметим, что этот вектор всегда направлен из начала первой силы к концу последней, а не наоборот (рис.1.11).

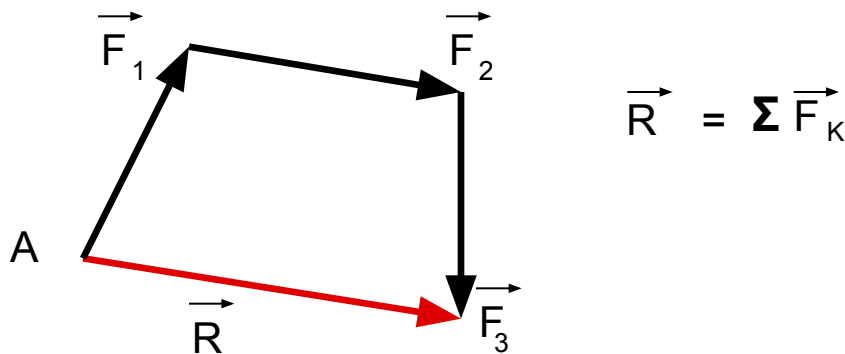
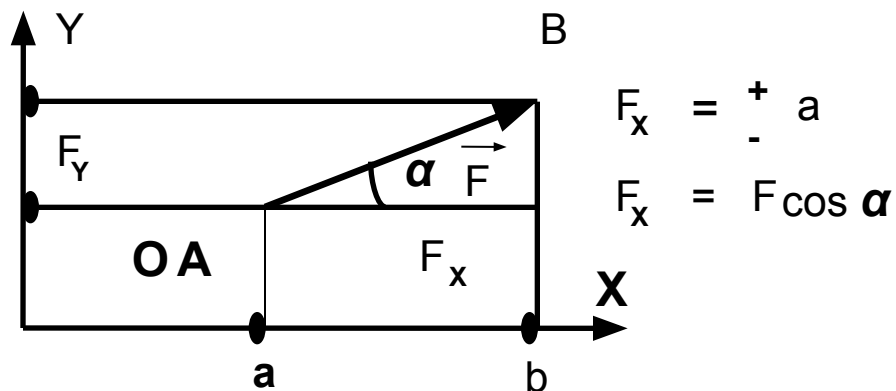


Рис.1.11. Сложение сил

- Величина R , равная геометрической сумме всех сил данной системы, называется **главным вектором** этой системы.
- Решение задач статики геометрическими методами сопряжено с громоздкими построениями. Более простыми являются так называемые аналитические методы, в которых все операции проводятся не с векторами, а с числами. Для этого вводится понятие проекции вектора силы на ось.
- **Проекцией силы на ось** называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора силы.
- Проекция считается положительной, если направление от начала к концу проекции совпадает с положительным направлением оси (рис.1.12).



Из рисунка видно, что проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

Рис.1.12. Проекция силы на ось

Частные случаи проектирования.

1. Сила образует острый угол с положительным направлением оси (рис.1.12). В этом случае проекция положительна ($F_x > 0$, $F_y > 0$).

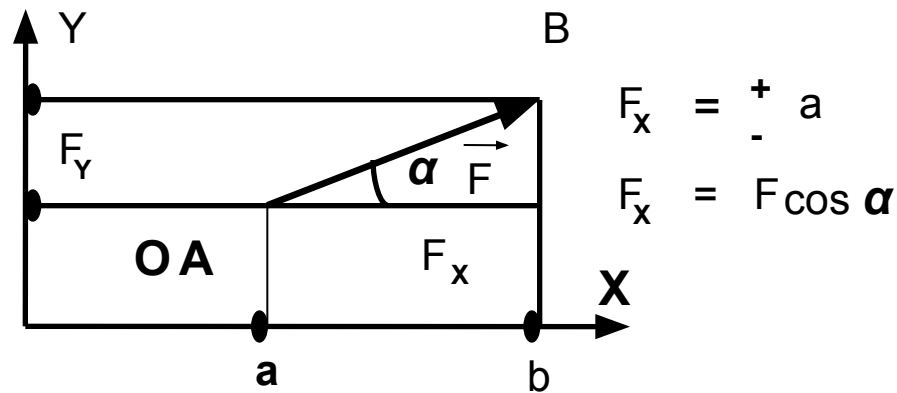


Рис.1.12. Проекция силы на ось

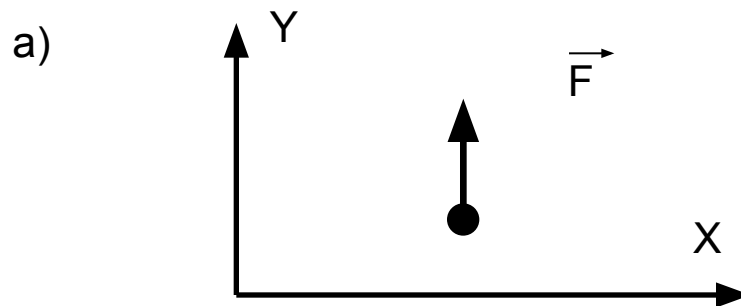


Рис.1.13. Частные случаи нахождения проекций сил

2. Сила перпендикулярна оси (рис.1.13,а). Поскольку в этом случае $\cos(\alpha)=0$, то и проекция силы на эту ось равна нулю: $F_x=0$.

3. Сила параллельна оси. Поскольку угол между силой и осью равен нулю, а косинус нуля равен единице, то проекция будет равна модулю силы: $F_y = F$ (рис.1.13,а).

4. Сила образует тупой угол с положительным направлением оси (рис.1.13,б).

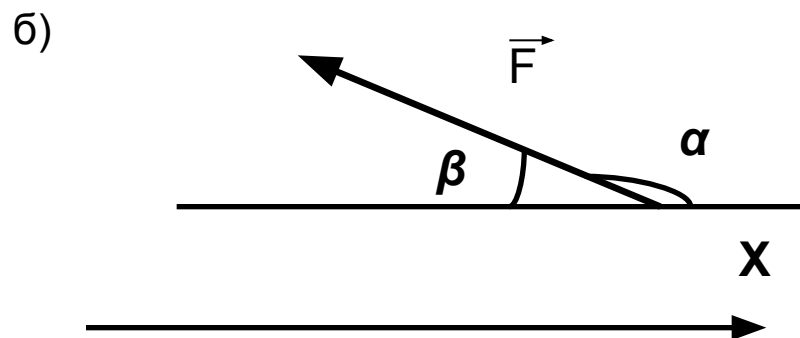


Рис.1.13. Частные случаи нахождения проекций сил

$$F_x = F \cos(\alpha) = F \cos(180 - \beta) = -F \cos(\beta),$$

В этом случае проекция отрицательна.

Зная величины проекций силы на взаимно перпендикулярные оси X, Y и Z, модуль силы можно вычислить с помощью теоремы Пифагора (рис.1.14).

- Так как $F = \sqrt{F_{xy}^2 + F_z^2}$, а $F_{xy} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, то

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.2)$$

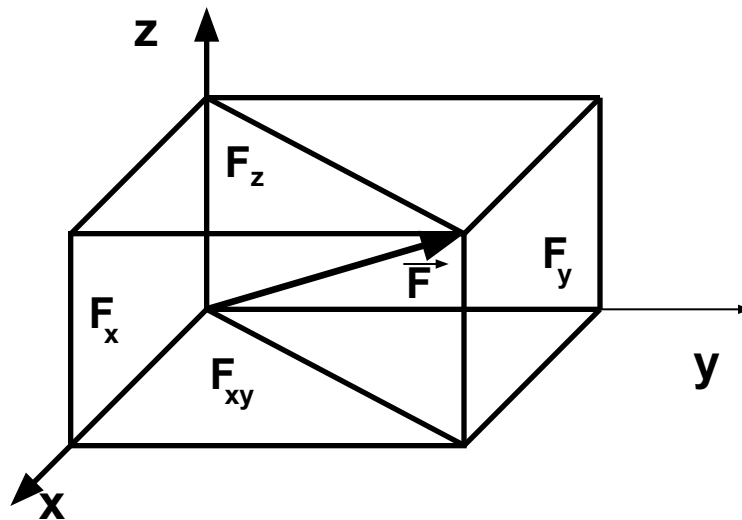


Рис.1.14. Разложение силы по осям координат

С помощью проекций можно находить не только силы, но и сумму сил. Рассмотрим силы, строя векторный многоугольник, найдем векторную сумму этих сил (рис.1.15).

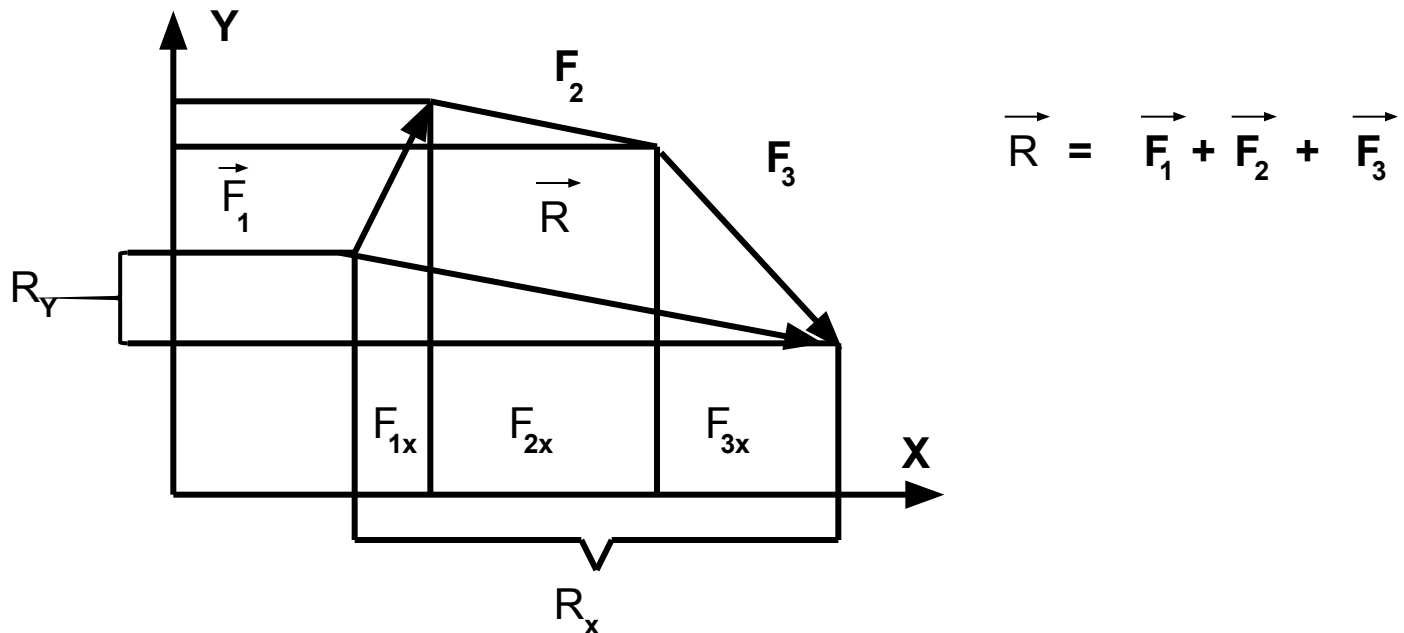


Рис.1.15. Сложение сил

Из рисунка видно, что проекция вектора суммы сил равна сумме проекций сил на эту же ось

или

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$R_x = \sum F_{kx}$$

Аналогично,

$$R_y = \sum F_{ky} \quad R_z = \sum F_{kz}$$

Тогда, учитывая формулу (1.2), модуль суммы сил равен

$$R = \sqrt{\sum F_{kx}^2 + \sum F_{ky}^2 + \sum F_{kz}^2} \quad (1.3)$$

5. Сходящаяся система сил

Рассмотрим систему сил, линии действия которых пересекаются в точке A (рис.1.16).

После переноса точек приложения сил в точку A можно последовательно сложить все силы, строя силовой многоугольник, таким образом заменяя все силы одной равнодействующей.

Следовательно, система сходящихся сил имеет равнодействующую, приложенную в точке пересечения сил и равную геометрической сумме всех сил данной системы.

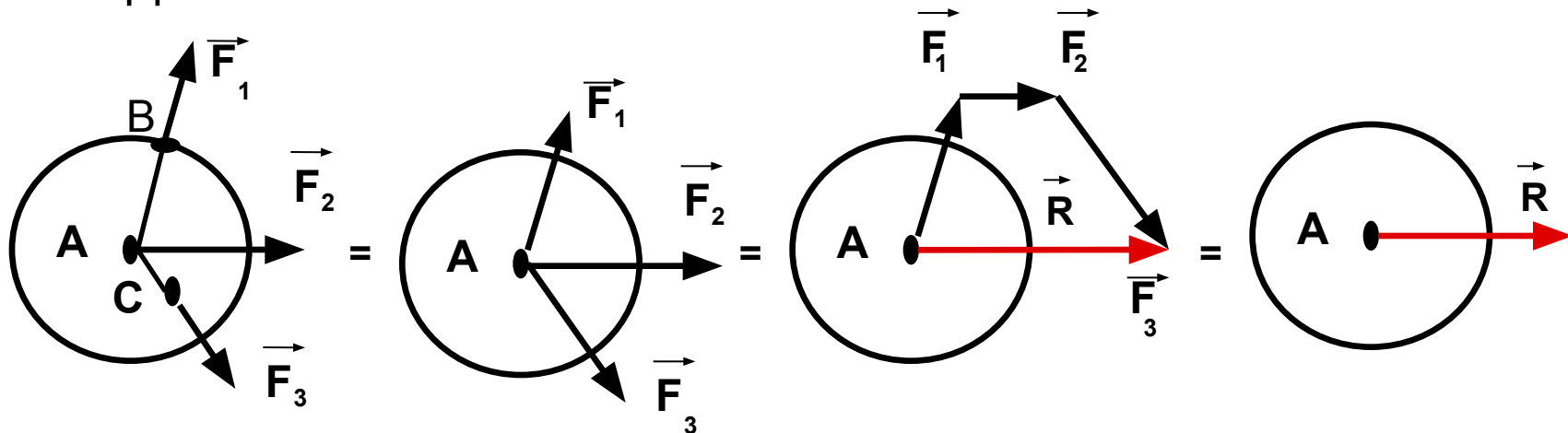


Рис.1.16. Приведение сходящейся системы сил к простейшему виду

Вторая задача статики - разработка условий равновесия.

Они могут быть получены в двух видах:

- 1.Геометрическое условие.** Очевидно, что система сходящихся сил будет эквивалентна нулю, если силовой многоугольник, построенный из сил системы, будет замкнут.
- 2.Аналитическое условие.** Из формулы (1.3) следует, что величина равнодействующей будет равна нулю, если выполняются условия:

$$\Sigma F_{kx}=0; \Sigma F_{ky}=0; \Sigma F_{kz}=0. \quad (1.4,a)$$

Выражения (1.4,а) являются **уравнениями равновесия сходящейся системы сил**:

система сил находится в равновесии, когда алгебраическая сумма проекций всех сил системы на оси X , Y и Z равна нулю.

Если все силы лежат в одной плоскости (плоская сходящаяся система сил), то последнее из равенств (1.4,а) превращается в тождество и остаются два значащих уравнения

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad \Sigma F_{ky} = 0. \quad (1.4,б)$$

Решение задач

Для решения задач статики можно воспользоваться следующим **планом**.

1. Выбрать объект, равновесие которого следует рассмотреть. Таким объектом может быть точка, тело либо система тел.
2. Приложить действующие на этот объект силы.
3. Отбросить связи, заменив их действие реакциями .
4. Определить тип полученной системы сил. Убедиться, что число неизвестных в задаче равно числу уравнений равновесия, то есть выяснить статическую определимость задачи.

5. Выбрать оси координат. При выборе осей следует помнить, что уравнение будет проще, если в него входит меньшее количество неизвестных, то есть необходимо по возможности оси координат брать перпендикулярно одной из неизвестных реакций.
6. Составить уравнения равновесия, соответствующие данному виду системы сил, и решить их относительно неизвестных.

Пример (рис.1.17). Два стержня связаны между собой и со стеной шарнирами. К шарниру B на нити подвешен груз весом 100 Н . Определить усилия в стержнях.

Пример (рис.1.17).

Два стержня связаны между собой и со стеной шарнирами. К шарниру B на нити подвешен груз весом 100 Н . Определить усилия в стержнях.

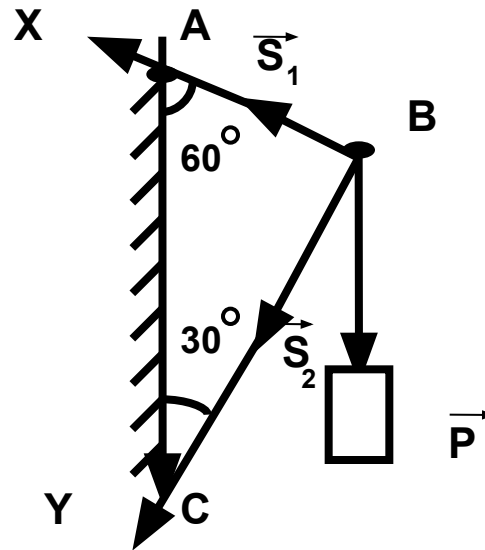


Рис.1.17. Аналитический способ решения

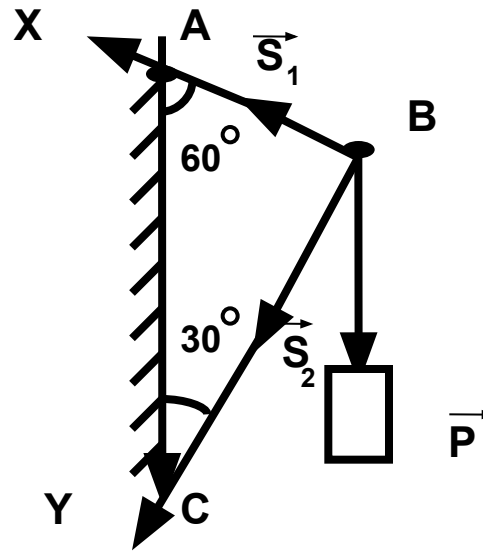


Рис.1.17. Аналитический способ решения

Решение. Поскольку стержни соединены в точке B , она будет служить объектом равновесия. На нее будет действовать сила натяжения нити, равная весу груза. Связями для точки B служат стержни AB и BC . Отбрасывая связи, заменим их реакциями, которые направлены вдоль стержня. Направляя усилия от точки B , предполагаем, что оба стержня растянуты.

На точку В действуют три силы, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке, то есть плоская сходящаяся система сил, для которой можно составить два уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0.$$

В этих уравнениях находится два неизвестных - усилия S_1 и S_2 . Оси координат направим вдоль стержней.

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= S_1 - P \cdot \cos(60^\circ) = 0; \\ \sum F_{ky} &= S_2 + P \cdot \cos(30^\circ) = 0.\end{aligned}$$

Из первого уравнения находим:

$$S_1 = P \cdot \cos(60^\circ) = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ Н},$$

из второго:
$$S_2 = - P \cdot \cos(30^\circ) = - 100 \cdot 0,866 = - 86,6 \text{ Н}.$$

Усилие S_2 получилось отрицательным, то есть стержень ВС будет не растягиваться, а сжиматься.

Для примера приведем геометрическое решение задачи. Для этого нужно построить из сил, действующих на точку B , векторный треугольник. Вначале в масштабе построим силу P (рис.1.18).

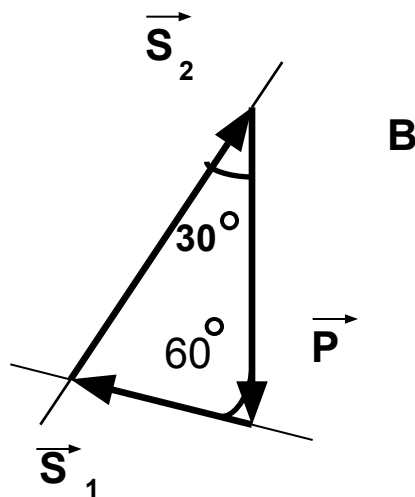


Рис.1.18. Геометрический способ решения

Из начала и конца этой силы проводим прямые, параллельные усилиям S_1 и S_2 , получая таким образом замкнутый силовой треугольник.

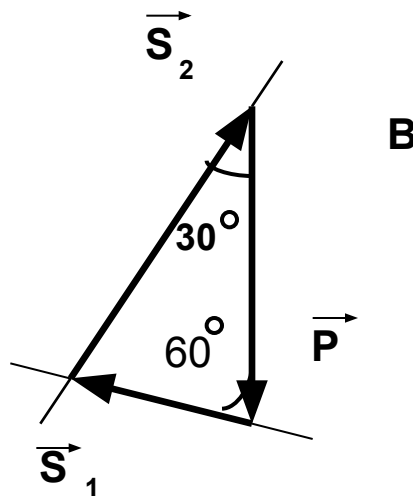


Рис.1.18. Геометрический способ решения

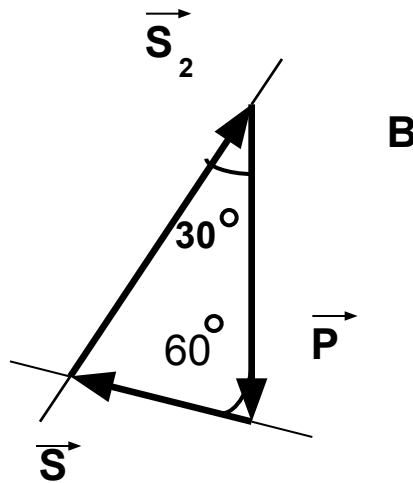


Рис.1.18. Геометрический способ решения

При этом для замыкания треугольника мы были вынуждены сменить направление усилия. Из треугольника, в котором усилие P является гипотенузой, а S_1 и S_2 - катетами, находим

$$S_1 = P \cdot \cos(60^\circ) = 50 \text{ Н}, \quad S_2 = P \cdot \cos(30^\circ) = 86,6 \text{ Н}.$$

Моменты силы относительно точки и оси

Сила может не только перемещать тело поступательно, но и оказывать на него вращательное действие, которое зависит не только от величины силы, но и от расстояния до центра поворота.

Например, для того, чтобы повернуть тело с помощью рычага (рис.1.19), наименьшую по модулю силу нужно приложить к концу рычага. Чем ближе к центру, тем величина силы должна быть больше, если же сила будет проходить через точку O , то повернуть тело будет невозможно, какой бы большой бы она ни была.

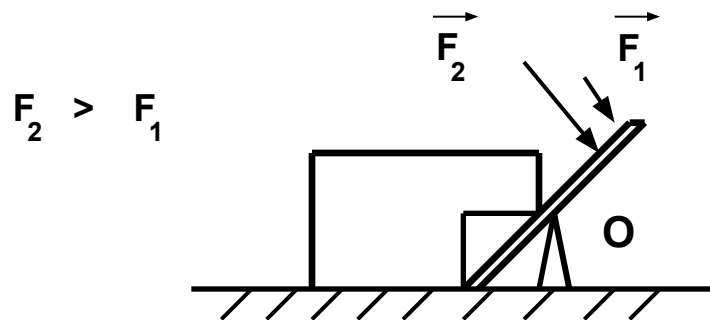


Рис.1.19. Вращательное действие силы

Для характеристики вращательного действия силы вводится понятие момента силы относительно точки.

Моментом силы относительно точки называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на кратчайшее расстояние между точкой и линией действия силы (плечо)

$$m_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h \quad (1.5)$$

Знак момента определяется следующим образом: если сила стремится повернуть тело вокруг данной точки против часовой стрелки, то он считается положительным (рис.1.20), в противном случае - отрицательным.

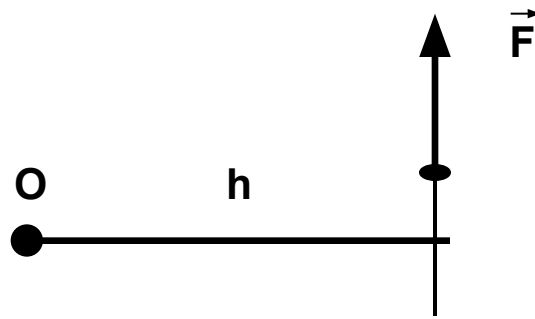


Рис.1.20. Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки равен нулю только в том случае, если линия действия силы проходит через данную точку. Единицы измерения момента $[H \cdot M]$ и в соответствующих кратных единицах.

Момент силы относительно оси характеризует вращательное действие силы относительно оси. Если силу $\vec{F}$ разложить на составляющие F_z и F_{xy} , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна оси Z (рис.1.21), то увидим, что F_z сила не способна повернуть тело вокруг оси, а вращательное действие силы F_{xy} определится ее моментом относительно точки O .

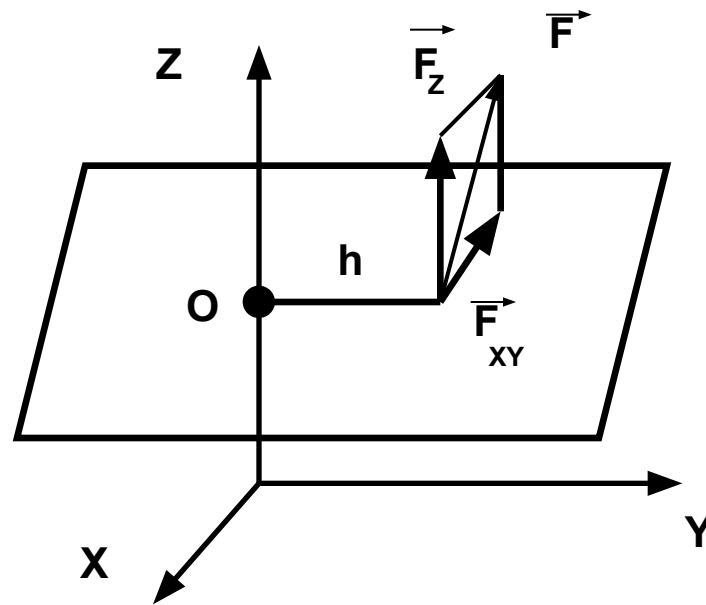


Рис.1.21. Момент силы относительно оси

Следовательно, для определения момента силы относительно оси нужно силу спроектировать на плоскость, перпендикулярную оси, и найти момент проекции относительно точки пересечения оси с этой плоскостью

$$m_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot h. \quad (1.6)$$

Знак момента определяется следующим образом: момент считается положительным, если, глядя с положительного конца оси, можно увидеть поворот тела будет виден против часовой стрелки. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее.

При определении момента силы относительно точки часто бывает затруднительно определить плечо силы. В этом случае можно воспользоваться **теоремой Вариньона**: момент равнодействующей плоской системы сил относительно точки равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки

$$m_0(\overset{\vee}{R}) = \sum m_0(\overset{\vee}{F}_k) \quad (1.7)$$

Аналогичная теорема применима и для определения момента силы относительно оси.

Пример: найти момент силы $F = 10 \text{ Н}$ относительно точки A , если $AB=0,2 \text{ м}$, $BC=0,5 \text{ м}$ (рис.1.22). Разложим силу F на две составляющих $F_x = F \cos(30)$, $F_y = F \sin(30)$.

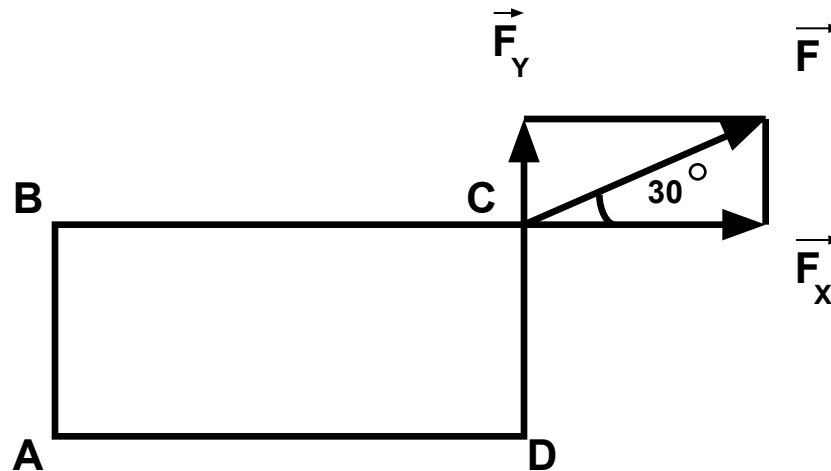


Рис.1.22. Пример применения теоремы Вариньона

Тогда

$$m_a(\vec{F}) = m_a(\vec{F}_x) + m_a(\vec{F}_y)$$

или

$$\begin{aligned} m_a(\vec{F}) &= -F \cdot \cos(30^\circ) \cdot AB + F \cdot \sin(30^\circ) \cdot BC = \\ &= -10 \cdot 0,867 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,766 \text{ H.} \end{aligned}$$

Пара сил и ее свойства

- **Парой сил** называется система, состоящая из двух сил, равных по модулю, противоположных по направлению и не лежащих на одной прямой (рис.1.23).
- Плоскость, в которой лежат силы пары, называется **плоскостью действия пары**, а кратчайшее расстояние между силами пары называется **плечом пары**.

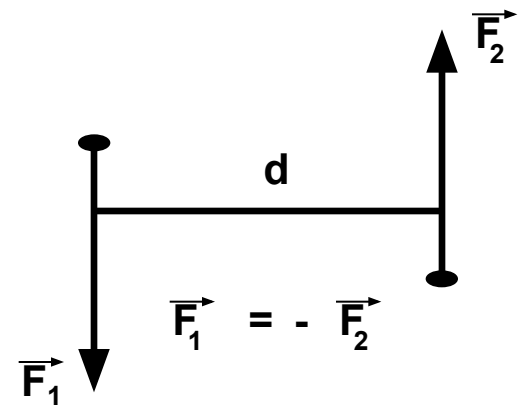


Рис.1.23. Пара сил

Сумма сил пары равна нулю, поэтому пара сил не имеет равнодействующей, однако она оказывает на тело вращательное действие, характеризующееся ее моментом.

- **Моментом пары** называется алгебраическая величина, модуль которой равен произведению одной из сил на плечо пары

$$m = \pm F_1 d = \pm F_2 d. \quad (1.8)$$

- Момент пары считается положительным, если пара стремится повернуть тело против часовой стрелки, и отрицательным, если пара стремится повернуть тело по часовой стрелке.

Эффект действия пары на твердое тело не зависит от ее положения в плоскости, поэтому ее можно переносить в плоскости действия в любое положение. Кроме того, не изменяя действия пары на тело, ее можно заменить другой парой с равным моментом.

Поэтому часто пары изображают в виде круговой стрелки и называют пару **сосредоточенным моментом** (рис.1.24).

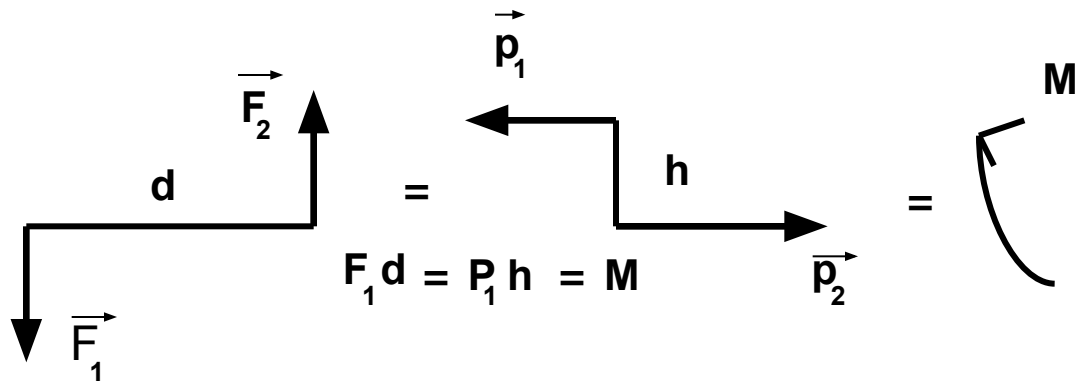


Рис.1.24. Эквивалентность пар

Поскольку действие пары определяется ее моментом, то если на тело действует несколько пар, лежащих в одной плоскости, то их можно заменить одной парой с моментом, равным сумме моментов слагаемых пар:

$$M = \sum M_k.$$

Отсюда следует **условие равновесия системы пар**, лежащих в одной плоскости: для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма их моментов была равна нулю

$$\sum M_k = 0. \quad (1.9)$$

Отметим еще одно важное свойство пары сил: *сумма моментов сил пары относительно любой точки равна моменту пары*. Возьмем пару сил F_1 и F_2 и произвольную точку A (рис.1.25).

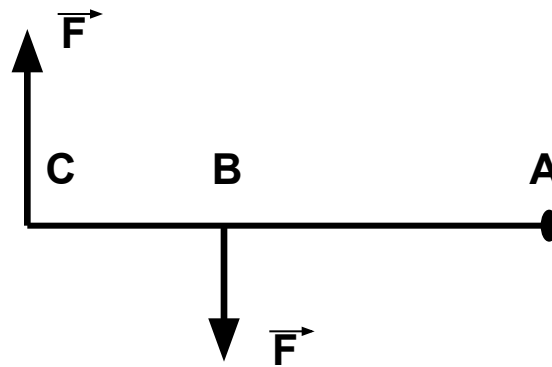


Рис.1.25. Свойство моментов сил пары

Тогда

$$\begin{aligned}
 m_A(\vec{F}_1) + m_A(\vec{F}_2) &= F_1 AB - F_2 (AB + BC) = \\
 &= F_1 AB - F_1 AB - F_2 BC = -F_2 BC = m.
 \end{aligned}$$

Теорема о параллельном переносе силы

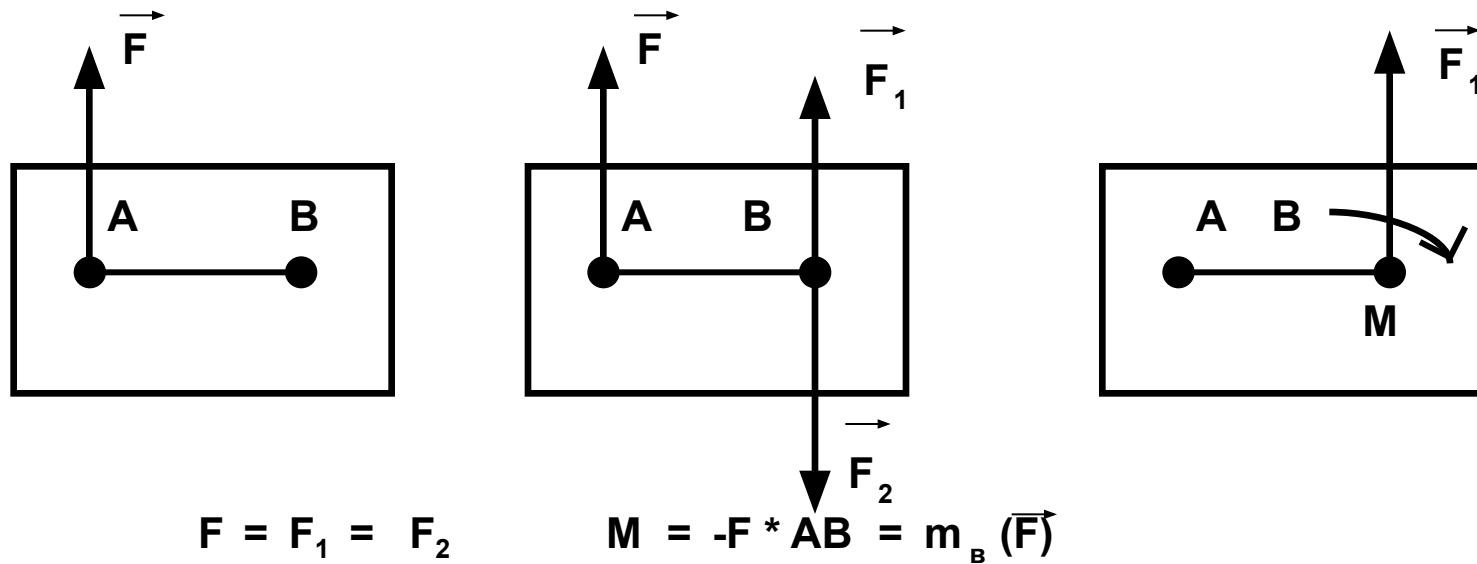


Рис.1.26. Теорема о параллельном переносе силы

Приложим в произвольной точке B уравновешенную систему сил F_1 и F_2 по модулю равных F и параллельных к ней. Тогда силы F и F_2 образуют пару сил, которую отобразим в виде момента M .

В результате имеем систему, состоящую из силы F , приложенной в точке B , и равную по модулю F_I , и пару сил с моментом M , равным моменту силы F относительно точки B .

Таким образом, мы доказали теорему: *не изменяя действия силы на тело ее можно перенести параллельно самой себе в любую точку, добавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту этой силы относительно точки, в которую она переносится.*

Плоская произвольная система сил

Теорема о параллельном переносе силы позволяет решить задачу упрощения плоской системы сил. Допустим, на тело действует система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис.1.27).

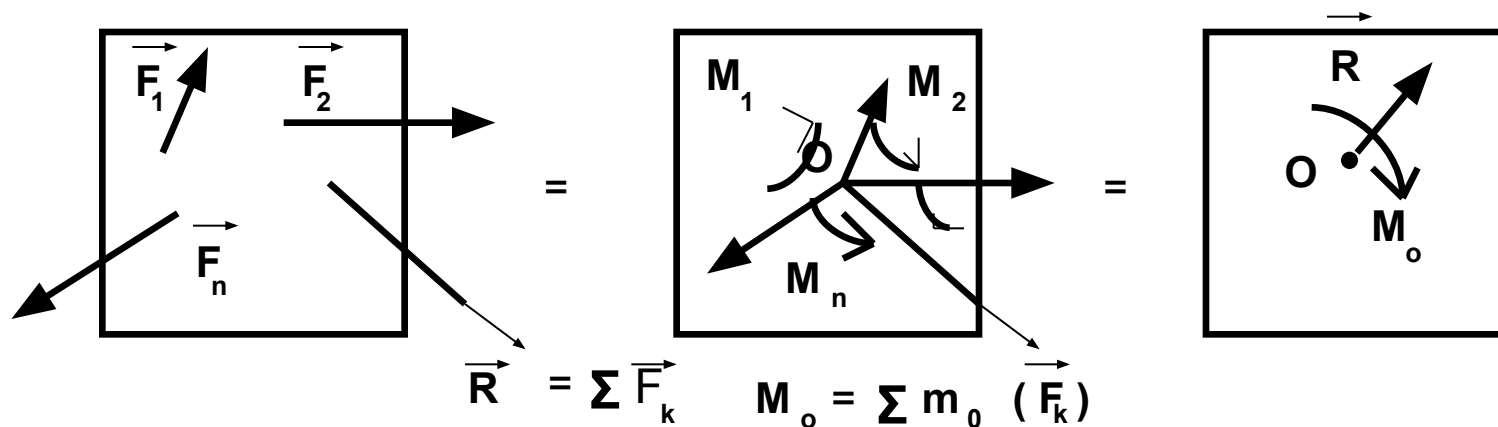


Рис.1.27. Приведение плоской системы сил к простейшему виду

Выберем произвольную точку O , которая называется центром приведения, и, используя теорему о параллельном переносе силы, перенесем все силы в точку O , добавляя при этом пары сил с моментами, равными моментам сил относительно этой точки. Тогда получим в точке O сходящуюся систему сил и систему пар. Эти силы заменим одной силой, равной геометрической сумме всех сил, а пары - одной парой, с моментом, равным сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения (главному моменту системы относительно точки O).

Таким образом, приводя плоскую систему сил к центру, ее можно заменить системой, состоящей из одной силы и одной пары.

Отсюда следует, что данная система будет находиться в равновесии, если результирующая сила и момент результирующей пары будут равны нулю.

Аналитически сила будет равна нулю, если равны нулю ее проекции на оси X и Y , то есть для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на оси X и Y и сумма моментов всех сил относительно произвольной точки были равны нулю

$$\Sigma F_{kx}=0; \quad \Sigma F_{ky}=0; \quad \Sigma m_o=0. \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) называются уравнениями равновесия плоской системы сил.

Опорные устройства балок

- Балкой называется тело, размерами сечения которого по сравнению с длиной можно пренебречь и которое предназначено, главным образом, для восприятия поперечных нагрузок.

Связями для балок могут служить рассмотренные ранее гибкие связи, стержни и гладкие поверхности, но, как правило, применяются и специальные опорные устройства. Рассмотрим три вида опорных устройств.

- 1. Шарнирно подвижная опора (рис.1.28,а). Такая опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение, параллельное опорной поверхности. Следовательно, реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности.

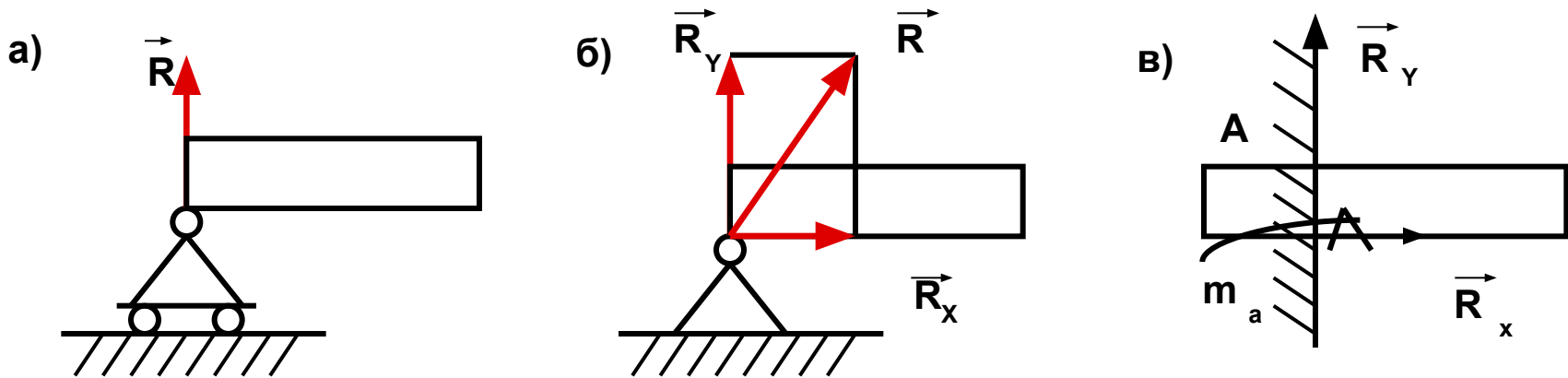


Рис.1.28. Опорные устройства балок

2. Шарнирно неподвижная опора (рис.1.28,б). Эта опора допускает только поворот вокруг оси шарнира и препятствует перемещению закрепленного в ней тела в любом направлении, поэтому и направление реакции неизвестно. Обычно вместо определения полной реакции ее разлагают на две составляющих.

3. Жесткая заделка (рис.1.28,в). Заделка препятствует повороту и любому перемещению балки, поэтому неизвестна не только величина и направление реакции R , но и ее точка приложения. Приводя все реактивные силы к точке A , заменяем их реакцией, которую разлагаем на составляющие R_x и R_y и парой сил с моментом m_a , который называется реактивным моментом.

Распределенная нагрузка

При решении практических задач далеко не всегда можно считать, что действующая на тело сила приложена в одной точке. Часто силы бывают приложены на целом участке тела (например, снеговая нагрузка, ветровая и т.д.). Такая нагрузка называется распределенной. Равномерно распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью q (рис.1.29).

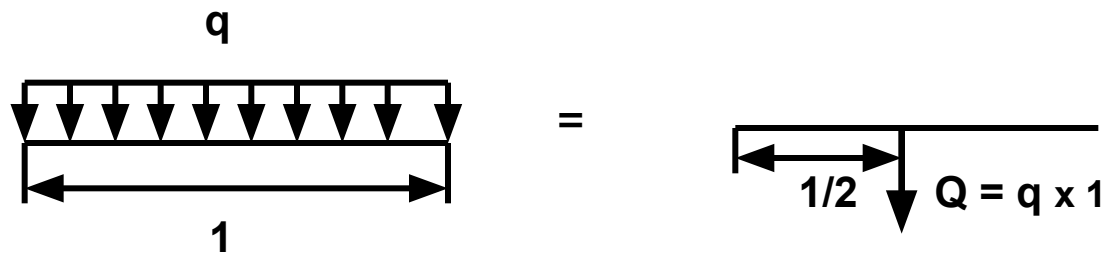


Рис.1.29. Распределенная нагрузка

Единица измерения интенсивности - $[H/m]$,
 $[кН/м]$.

При решении задач статики распределенную нагрузку можно заменить ее равнодействующей, которая равна произведению интенсивности на длину участка, на который действует распределенная нагрузка, и которая приложена в середине этого участка.

Решение задач на плоскую систему сил

Пример (рис.1.30). Определить реакции $\vec{F}$ шарнирно опертой балки, нагруженной силой и парой сил с моментом M .

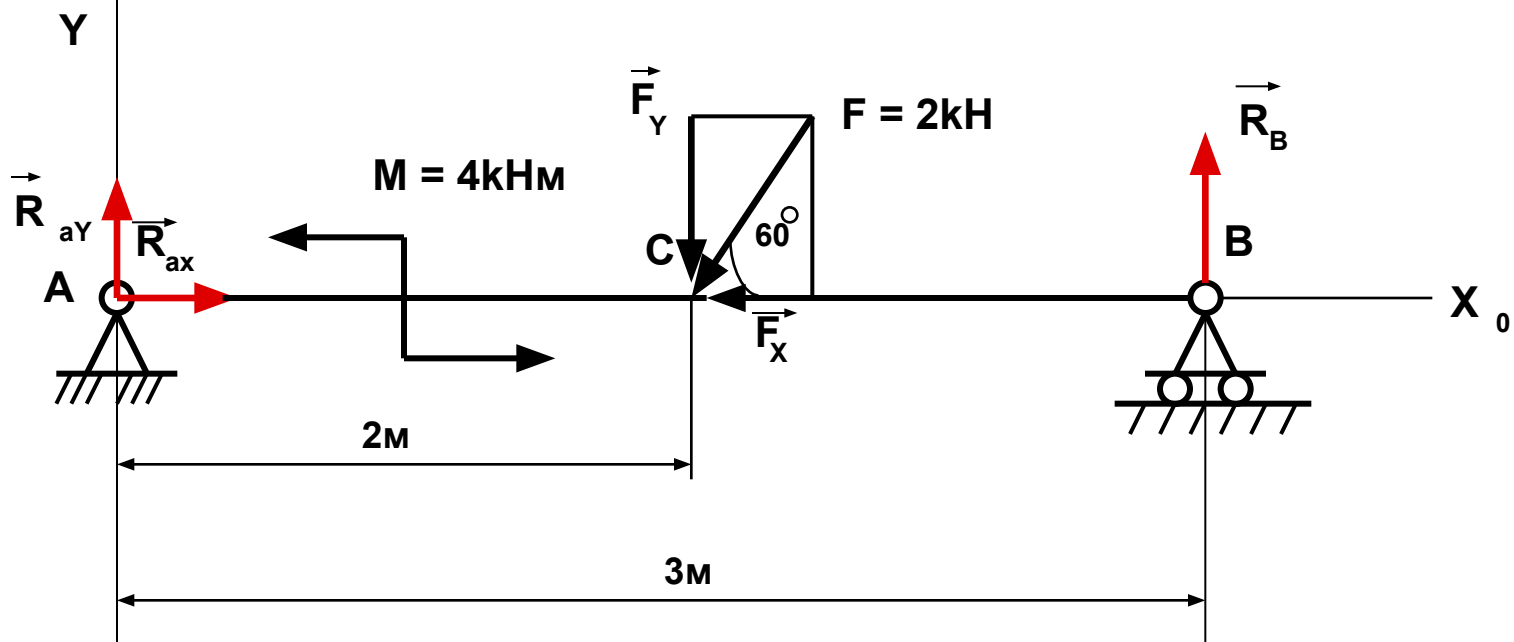


Рис.1.30. Рисунок к примеру

Решение. Воспользуемся тем же планом, который применялся для решения задач на сходящуюся систему сил.

Объектом равновесия является вся балка, нагрузка на которую показана на чертеже.

Отбросим связи - шарниры A и B . Реакцию неподвижного шарнира A разложим на две составляющих - и , а реакция подвижного шарнира B будет направлена перпендикулярно опорной плоскости.

Таким образом, на балку действует плоская произвольная система сил, для которой можно составить три уравнения равновесия. Выберем оси координат и составим эти уравнения.

Уравнения проекций

$$1. \sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - F \cdot \cos(60) = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} + R_B - F \cdot \cos(30) = 0$$

(пара в уравнение проекций не входит, так как сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю).

Уравнение моментов составляем относительно точки А, поскольку в ней пересекаются две неизвестные силы. При нахождении момента пары относительно точки А помним, что сумма моментов сил пары относительно любой точки равна моменту пары, а знак момента будет положительным, поскольку пара стремится повернуть тело против часовой стрелки. Для нахождения момента силы F удобно разложить ее на вертикальную и горизонтальную составляющие $F_x = F \cos(60)$, $F_y = F \cos(30)$

и воспользоваться теоремой Вариньона, причем следует учесть, что момент от силы относительно точки А равен нулю, поскольку ее линия действия проходит через эту точку. Тогда уравнение моментов примет вид:

$$3. \quad \sum m_a(\vec{F}_k) = 0 \quad R_B 3 - F \cdot \cos(30) \cdot 2 + M = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$R_B = \frac{F \cos(30) \cdot 2 - M}{3} = \frac{2 \cdot 0,866 \cdot 2 - 4}{3} = -0,177 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2) находим

$$R_{Ay} = F \cdot \cos(30) - R_B = 2 \cdot 0,866 - 4 = -2,67 \text{ кН},$$

а из уравнения (1) $R_{Ax} = F \cdot \cos(60) = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ кН}$

Пример. Определить реакции жестко заземленной балки длиной 3 м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=10\text{кН/м}$ (рис.1.31).

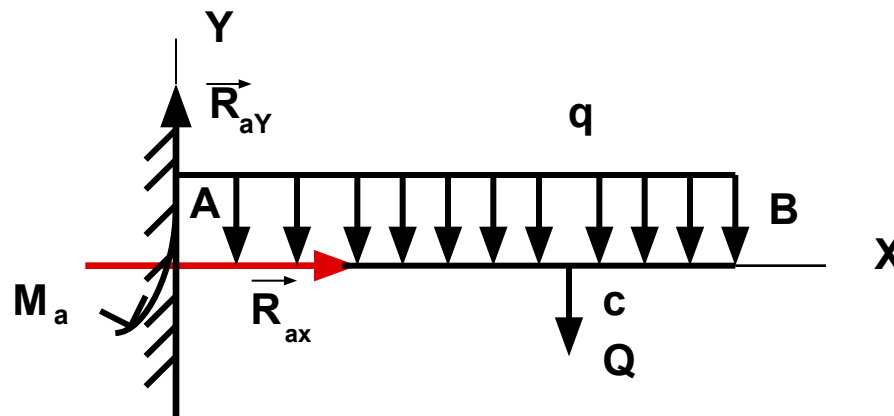


Рис.1.31. Рисунок к примеру

Решение. Заменим равномерно распределенную нагрузку ее равнодействующей $Q = 3 \cdot q = 3 \cdot 10 = 30$ кН. Она будет приложена в середине пролета, то есть на расстоянии $AC = 1,5$ м. Рассматриваем равновесие балки АВ. Отбрасываем связь - жесткую заделку, а вместо нее прикладываем две составляющие реакции R_{Ax} и R_{Ay} и реактивный момент M_A . На балку будет действовать плоская произвольная система сил, для которой можно составить три уравнения равновесия и из них можно найти искомые неизвестные:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - Q = 0; \quad R_{Ay} = Q = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad M_A - 1,5 \cdot Q = 0; \quad M_A = 1,5 \cdot Q = 1,5 \cdot 30 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчет составных конструкций

- Твердые тела, равновесие которых рассматривается в статике, являются моделями реальных конструкций элементов сооружений и машин. Однако далеко не всякую конструкцию можно смоделировать как одно твердое тело. Чаще всего ее можно представить в виде нескольких тел, соединенных между собой.
- Составными называются конструкции, состоящие из нескольких твердых тел, соединенных какими-либо связями. Примером является конструкция моста, состоящего из двух половинок, связанных шарниром в точке С (рис.1.32,а).

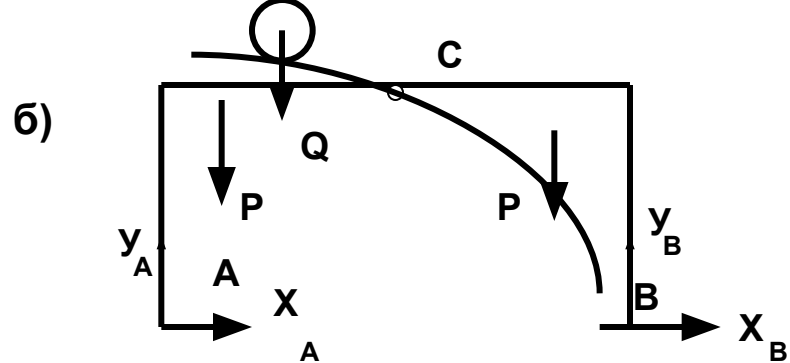
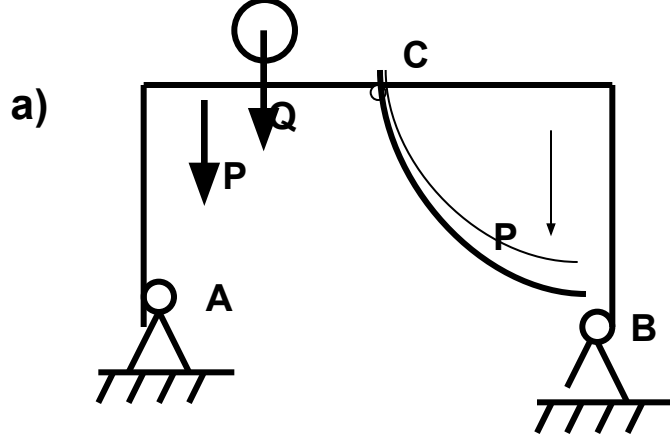


Рис.1.32. Составная конструкция

Если отбросить внешние связи – шарниры А и В (рис.1.32,б), то полученная конструкция может деформироваться (поворачиваться вокруг точки С), то есть не является твердым телом.

Для составления уравнений равновесия используется аксиома отвердевания: равновесие деформируемого тела не изменится, если считать его абсолютно твердым. То есть можно составить для данной системы тел такие же уравнения равновесия, как и для абсолютно твердого тела.

Так как на конструкцию действует плоская произвольная система сил, то для нее можно составить три уравнения равновесия, а неизвестных в них будет четыре – X_A , Y_A , X_B , Y_B . Поэтому, чтобы найти эти неизвестные, а также реакции внутреннего шарнира X_C , Y_C , можно использовать два способа.

1. Составить уравнения равновесия всей конструкции, а затем расчленить ее на части, прикладывая при этом реакции внутреннего шарнира С, и составить уравнения одной из ее частей, например левой (рис 1.33., а). Таким образом, всего будет шесть уравнений, в которых содержится столько же неизвестных – X_A , Y_A , X_B , Y_B , X_C , Y_C .

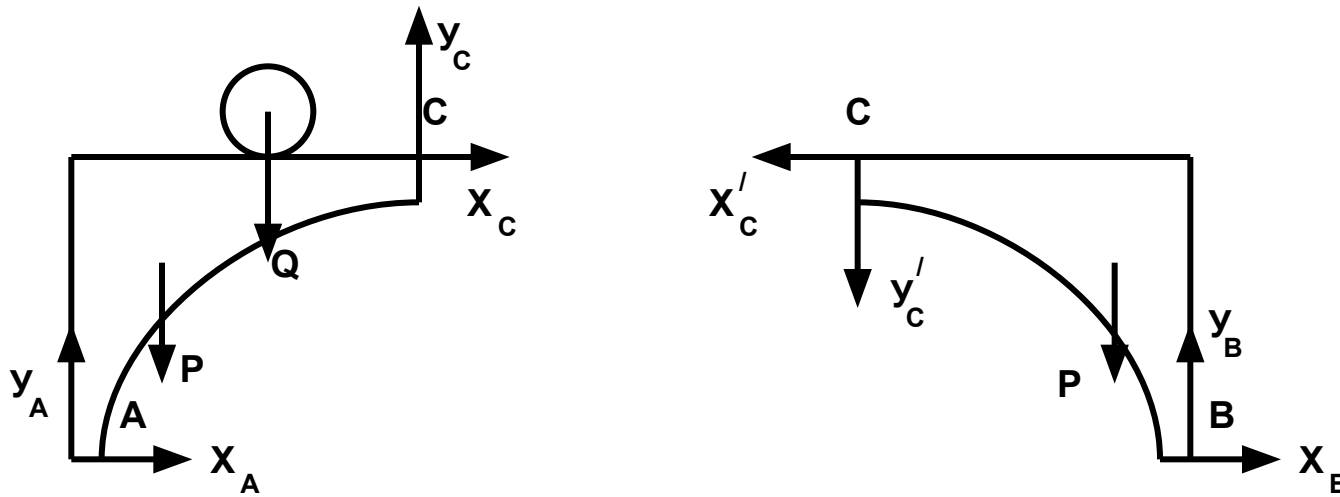


Рис.1.33. Расчет составной конструкции по частям

2. Не составляя уравнения равновесия всей конструкции, рассмотреть равновесие каждой ее части отдельно (рис.1.33), учитывая, что силы взаимодействия между частями равны по величине и противоположны по направлению $X_c = X'_c$ $Y_c = Y'_c$ Тогда полученная система из шести уравнений будет содержать столько же неизвестных.

Пример. Рама, закрепленная в жесткой заделке А и шарнире В, состоит из двух частей, соединенных в шарнире Н. Определить реакции внешних связей, если $M=100 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $q=20 \text{ Н/м}$; $L=0,5 \text{ м}$. $F_2 = 20 \text{ Н}$ (рис.1.34,а)

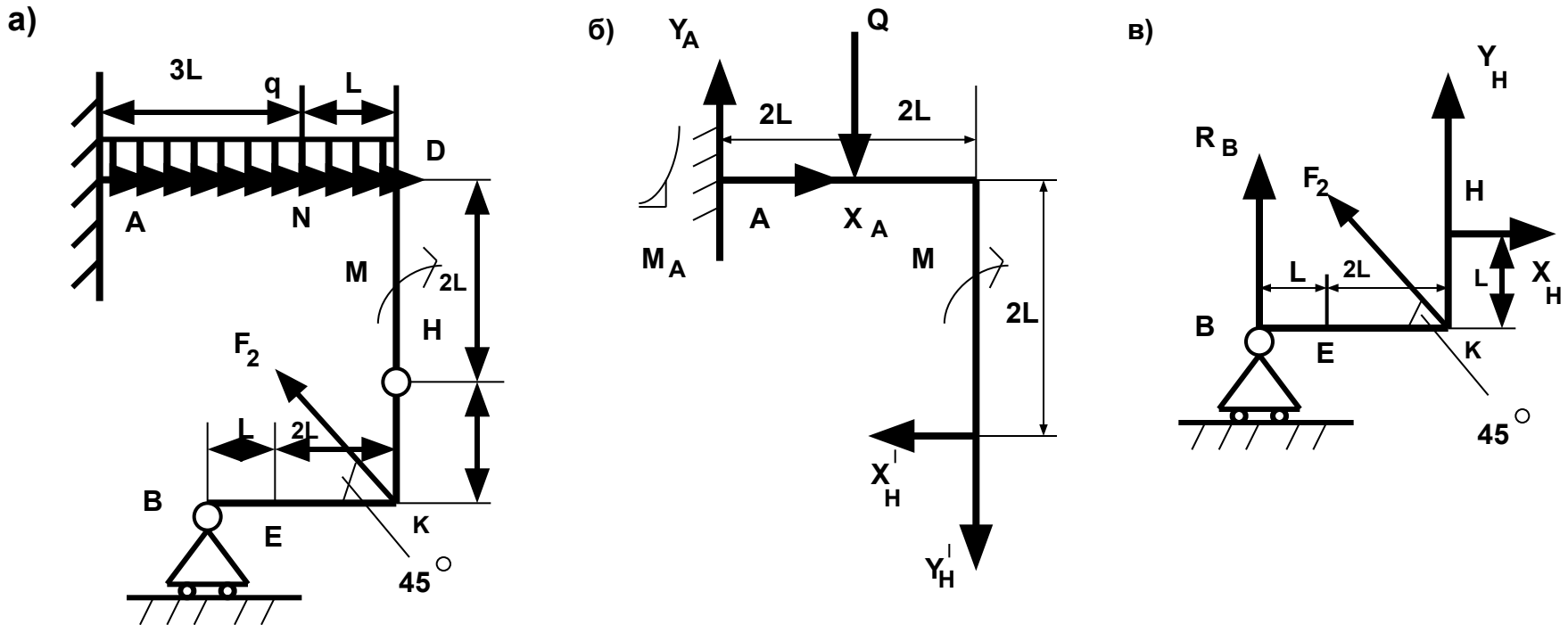


Рис.1.34. Рисунок к примеру

Решение. Рассмотрим равновесие отдельных участков рамы, разделив ее в шарнире Н.

Составим уравнения равновесия плоской системы сил, приложенной к левой верхней части рамы (рис.1.34,б). При этом распределенную нагрузку заменяем равнодействующей $Q=4Lq=40$ Н, приложенной в центре участка приложения нагрузки:

$$1. \quad \sum F_{kx} = -X'_H + X_A = 0;$$

$$2. \quad \sum F_{ky} = Y_A - Y'_H - Q = 0;$$

$$3. \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = M_A - 2LQ - 4LY'_H - 2LX'_H + M = 0.$$

Затем составим уравнения равновесия плоской системы сил, приложенной к правой части рамы (рис.1.34,в):

$$4. \quad \sum F_{kx} = X_H - F_2 \cos 45 = 0;$$

$$5. \quad \sum F_{ky} = Y_H + F_2 \sin 45 + R_B = 0;$$

$$6. \quad \sum m_H(\bar{F}_k) = -3LR_B - F_2 \cos 45 \cdot L = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$\text{из (4)} \quad X_H = F_2 \cos 45 = 14.1H,$$

$$\text{из (6)} \quad R_B = \frac{-F_2 \cos 45 \cdot L}{3L} = -4.71H,$$

$$\text{из (5):} \quad Y_H = -F_2 \sin 45 - R_B = -18.85H,$$

$$\text{из (2):} \quad Y_A = Y'_H + Q = 21.15H, \quad \text{из (1)} \quad X_A = X'_H = 14.1H,$$

$$\text{из (3)} \quad M_A = 2LQ + 4LY'_H + 2LX'_H - M = -8.2H \cdot m.$$

Расчет ферм

Фермой называется конструкция, состоящая из стержней, соединенных шарнирами (рис.1.35).

Места соединения стержней называются узлами фермы.

Допущения при расчете ферм:

1. Стержни считаются невесомыми.
2. Нагрузка приложена в узлах фермы.
3. Трение в узлах отсутствует.

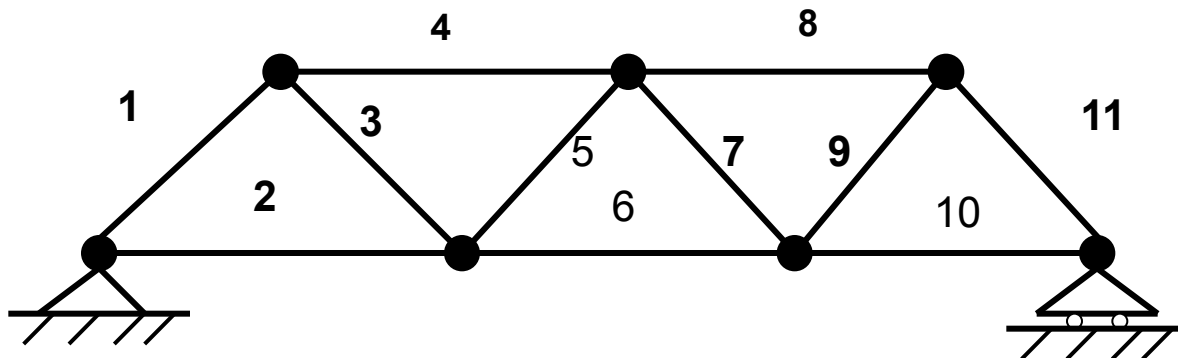


Рис.1.35. Плоская ферма

Для плоских статически определимых ферм число стержней S и число узлов n связаны уравнением $S=2n-3$. Если $S>2n-3$, то ферма статически неопределима, если $S<2n-3$, то конструкция кинематически изменяема.

Задача расчета ферм состоит в определении усилий в каждом стержне. Для этого вначале составляются уравнения равновесия всей фермы и определяются опорные реакции. Затем можно использовать два метода.

1. Метод вырезания узлов. Рассматривается равновесие каждого узла начиная с того, в котором соединяются два стержня, поскольку на каждый узел действует плоская сходящаяся система сил, составляются два уравнения:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$$

2. Метод сечений (Риттера). Делается сечение, проходящее через три стержня, и составляются уравнения равновесия отсеченной части, причем уравнения, как правило, составляются относительно точек, в которых пересекаются линии действия неизвестных усилий

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \sum m_C(\vec{F}_k) = 0$$

Пример. Найти усилия в стержнях фермы (рис.1.36), если $P_1=P_2=2$ кН, $F=1$ кН.
Нумерация стержней показана на рис.1.35.

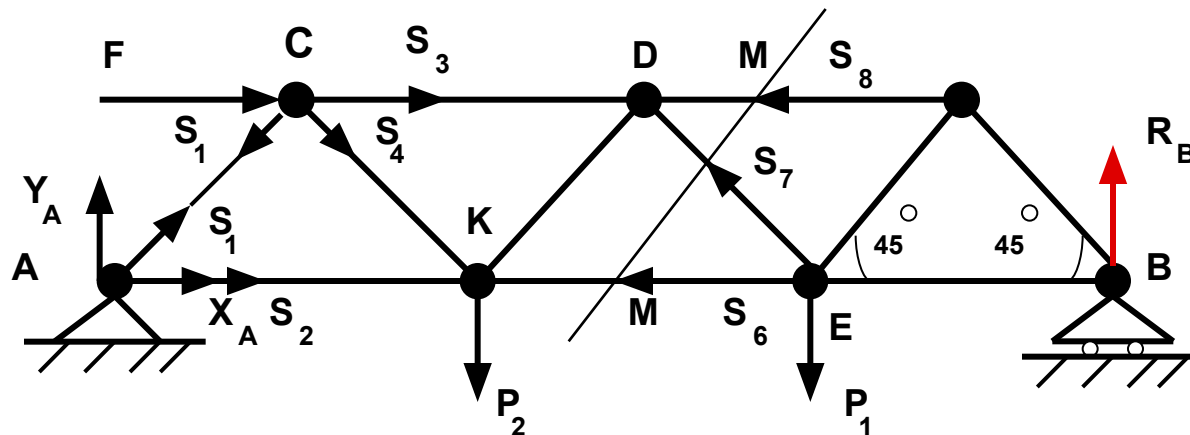


Рис.1.36. Рисунок к примеру

Решение. Составляя уравнения равновесия плоской системы сил, приложенной к ферме, находим опорные реакции:

$$\sum F_{kx} = X_A - F = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P_1 - P_2 + R_B = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 3LR_B - 2LP_1 - LP_2 - LF / 2 = 0$$

(L – длина горизонтальных стержней).

Отсюда находим $X_A = -1 \text{ кН}$, $Y_A = 1,83 \text{ кН}$, $R_B = 2,17 \text{ кН}$.

Уравнения равновесия узла А:

$$X_A + S_2 + S_1 \cos 45 = 0, \quad Y_A + S_1 \cos 45 = 0,$$

откуда $S_1 = -2,59 \text{ кН}$, $S_2 = 2,73 \text{ кН}$.

Знак «минус» означает, что стержень 1 сжат.

Затем можно последовательно рассмотреть равновесие узлов С, К, D и т.д.

Для нахождения усилий в стержнях 6,7 и 8 используем метод Риттера. Для этого делаем сечение, проходящее через эти стержни, и составляем уравнения равновесия для правой части фермы:

$$\sum m_D(\overset{\nabla}{F})_k = R_B 1,5L - P_1 L / 2 - S_6 L / 2 = 0.$$

$$\sum m_E(\overset{\nabla}{F})_k = R_B L + S_8 L / 2 = 0.$$

$$\sum F_{ky} = S_7 \cos 45 - P_1 + R_B = 0.$$

Заметим, что уравнения составлены таким образом, чтобы в каждом была только одна неизвестная величина.

Произвольная пространственная система сил

Система сил называется пространственной, если линии действия сил не лежат в одной плоскости.

В этом случае систему также можно привести к центру, заменив ее одной силой, равной главному вектору, и парой с моментом, равным главному моменту относительно центра приведения. Однако в общем случае сила не будет лежать в плоскости результирующей пары. Главный вектор системы сил найдется через его проекции на оси координат X, Y, Z

$$R = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2}. \quad (1.11)$$

Модуль главного момента системы можно найти через моменты силы относительно осей координат

$$M_0 = \sqrt{(\sum m_x)^2 + (\sum m_y)^2 + (\sum m_z)^2}. \quad (1.12)$$

Пространственная система сил будет эквивалентна нулю, то есть находиться в равновесии, если величины R и M_0 , будут равны нулю.

На этом основании следует шесть уравнений равновесия:

$$\begin{array}{lll} \sum F_{kx} = 0; & \sum F_{ky} = 0; & \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_{kx} = 0; & \sum m_{ky} = 0; & \sum m_{kz} = 0 \end{array} \quad (1.13)$$

то есть для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси X , Y, Z и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю.

Пример. Определить реакции шарниров и усилие в стержне, с помощью которых вагонная полка весом 200Н крепится к стене (рис.1.37).

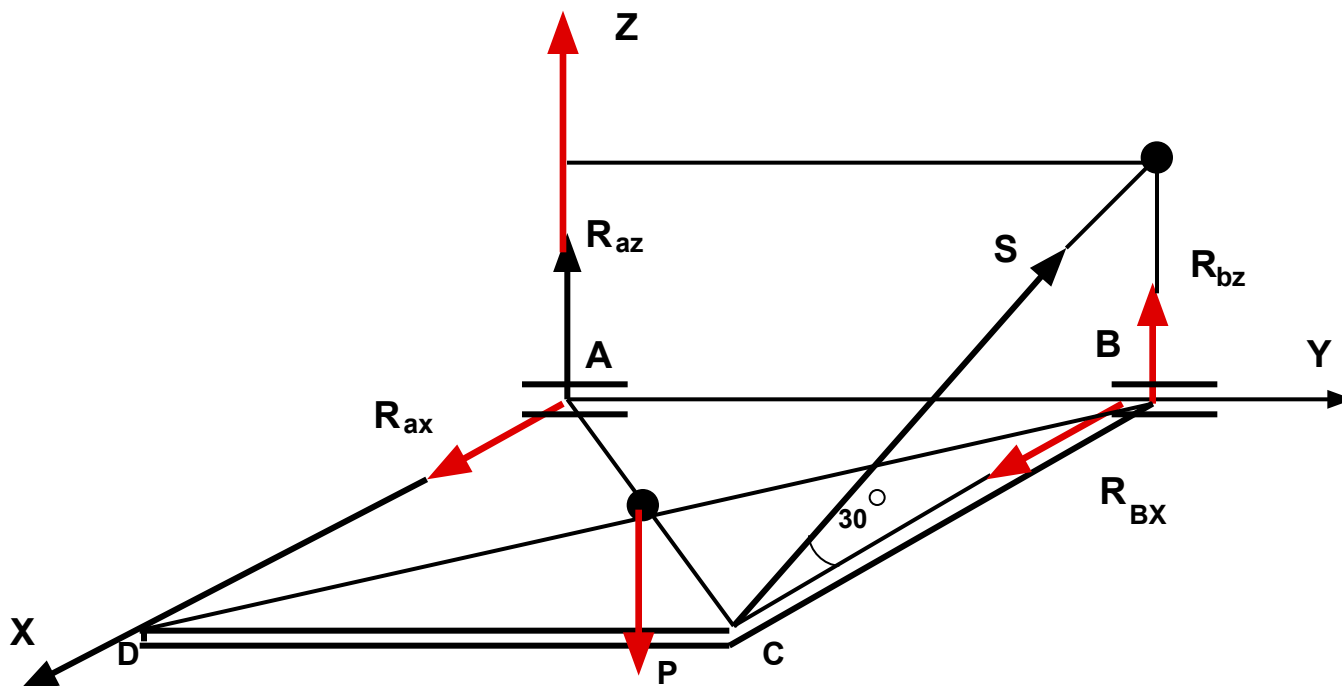


Рис.1.37. Рисунок к примеру

Решение. Объект равновесия - плита ABCD.

Нагрузка на плиту - вес P , приложен в центре плиты.

Отбрасывая связи - шарниры A и B, прикладываем реакции, которые разлагаем на две составляющие - R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By} поскольку шарниры препятствуют перемещению плиты в плоскости XOZ.

Реакция стержня S направлена вдоль стержня. На плиту действует пространственная система сил, для которой можно составить шесть уравнений равновесия.

Выбираем оси координат и составляем уравнения:

$$1. \Sigma F_{kx} = 0; \quad R_{ax} + R_{bx} - S \cdot \cos(30) = 0;$$

$$2. \Sigma F_{ky} = 0;$$

$$3. \Sigma F_{kz} = 0; \quad R_{az} + R_{bz} - P + S \cdot \cos(60) = 0;$$

$$4. \Sigma m_{kx} = 0; \quad R_{bz} \cdot AB - P \cdot AB/2 + S \cdot \cos(60) \cdot AB = 0;$$

$$5. \Sigma m_{kx} = 0; \quad P \cdot BC/2 - S \cdot \cos(60) \cdot BC = 0;$$

$$6. \Sigma m_{kx} = 0; \quad S \cdot \cos(30) \cdot AB - R_{ax} \cdot AB = 0.$$

Из уравнения (5)

$$S = P/2 \cos(60) = 200/2 \cdot 0,5 = 200 \text{ H},$$

$$\text{из (6)} \quad R_{ax} = S \cos(30) = 200 \cdot 0,867 = 173 \text{ H},$$

$$\text{из (4)} \quad R_{\theta z} = P/2 - S \cos(60) = 200/2 - 200 \cdot 0,5 = 0,$$

$$\text{из (3)} \quad R_{az} = P - S \cos(60) - R_{\theta z} = 200 - 200 \cdot 0,5 - 0 = 100 \text{ H},$$

$$\text{из (1)} \quad R_{\theta x} = S \cos(30) - R_{ax} = 200 \cdot 0,867 - 173 = 0.$$

Силы сцепления и трения скольжения

Рассмотрим тело, находящееся в равновесии на горизонтальной шероховатой поверхности (рис.1.38).

Если сдвигающая нагрузка отсутствует, то на тело действуют сила тяжести и нормальная реакция (рис.1,38,а).

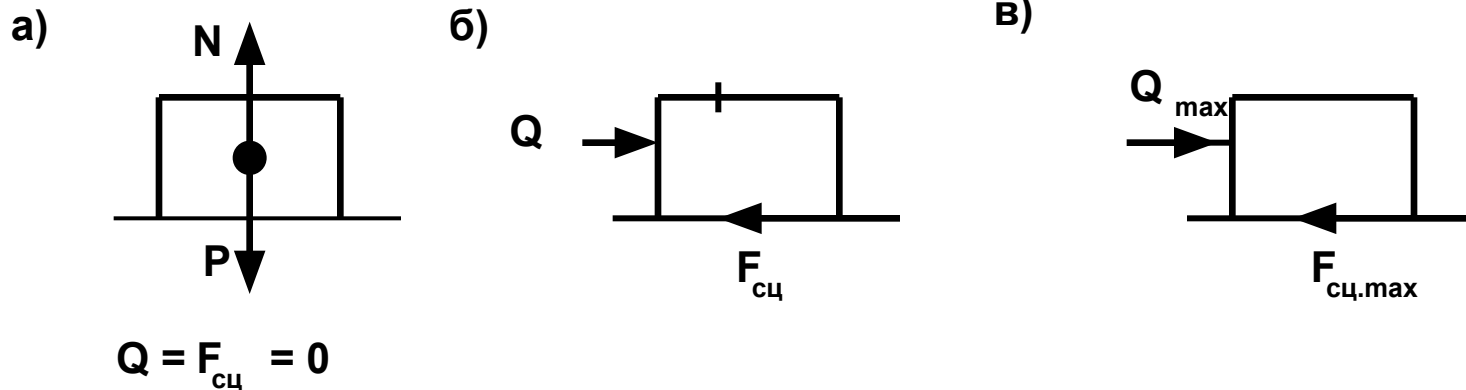


Рис.1.38. Тело на шероховатой поверхности

При приложении небольшой сдвигающей нагрузки в месте контакта поверхностей возникает сила сцепления, по модулю равная этой нагрузке и направленная в противоположную сторону. (рис.1,38,б).

При увеличении сдвигающей силы сила сцепления возрастает до тех пор, пока не достигнет максимальной величины (рис.1,38,в)., после чего тело срывается с места и начинает скользить.

При скольжении тел на них действует сила трения.

Возникновение сил сцепления объясняется шероховатостью поверхностей, а также силами молекулярного сцепления между частицами поверхностных слоев соприкасающихся тел.

Существуют различные теории сил сцепления и трения. Наиболее простой и распространенной из них является теория Амонтона-Кулона. Приведем основные положения этой теории.

1. Максимальная сила сцепления пропорциональна нормальному давлению и не зависит от площади соприкасающихся поверхностей

$$F_{сц. max} = f_0 N, \quad (1.14)$$

где f_0 - коэффициент сцепления (трения покоя).

2. Сила трения при скольжении пропорциональна нормальному давлению

$$F_{mp} = f N, \quad (1.15)$$

где f - коэффициент трения при скольжении.

3. Сила трения при скольжении меньше максимальной силы сцепления.

Величина коэффициентов сцепления и трения зависит от вида материалов, степени шероховатости, наличия смазки, температуры и определяется опытным путем.

При наличии сил сцепления может возникнуть два вида задач.

1. Необходимо определить, будет тело двигаться или нет. При этом сила сцепления находится из уравнений предполагаемого равновесия. Если она окажется меньше, чем максимальная, найденная по формуле (1.14), то равновесие действительно будет, а если больше, то тело на самом деле будет двигаться.

- 2. Имеет место предельное состояние, то есть сила сцепления равна максимальной. В этом случае составляются обычные уравнения равновесия, и к ним добавляется уравнение (1.14).
- **Пример 1.** На тело весом $P=100$ Н, находящееся на горизонтальной поверхности, действует сила $Q=40$ Н (рис 1.39). Будет ли тело находиться в покое, если коэффициент сцепления $f=0,5$?

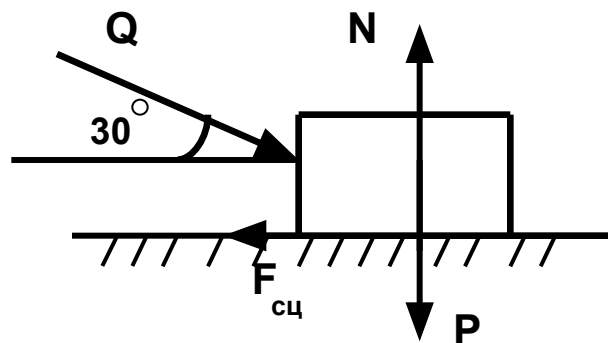


Рис.1.39. Рисунок к примеру

Решение. Составим уравнения равновесия тела в виде проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси:

$$Q \cdot \cos 30 - F_{\text{сц}} = 0; \quad N - P - Q \cdot \sin 30 = 0.$$

Из первого уравнения находим:

$$F_{\text{сц}} = Q \cdot \cos 30 = 40 \cdot 0,867 = 34,7 \text{ Н},$$

из второго $N = P + Q \cdot \sin 30 = 120 \text{ Н}.$

Максимальная сила сцепления

$$F_{\text{сц max}} = f \cdot N = 0,5 \cdot 120 = 60 \text{ Н}.$$

Так как $F_{\text{сц}} < F_{\text{сц max}}$, то тело будет находиться в покое.

Пример 2. Определить, какую минимальную силу Q нужно приложить, чтобы сдвинуть тело с места (рис.1.39).

Решение. Так как в этом случае имеет место предельное состояние, то

$$F_{сц} = F_{сц \max} = f \cdot N = f(P + Q \cdot \sin 30).$$

Подставляем в первое уравнение

$$Q \cdot \cos 30 - f(P + Q \cdot \sin 30) = 0.$$

Отсюда

$$Q = fP / (\cos 30 - f \sin 30).$$

Подставляя значения, находим $Q = 81 \text{ Н}$.

Центр тяжести

Рассмотрим тело, на которое действуют две параллельные силы (рис.1.40). Используя теорему о параллельном переносе силы, перенесем силу в точку В, добавляя при этом момент $M = F_1 AB$. Сложим силы F_1 и F_2 , заменяя их равнодействующей $R = F_1 + F_2$, а момент М отобразим парой, силы которой по модулю равны R , а плечо найдется из соотношения $M = R \cdot BC$. Отбрасывая уравновешенную систему сил R и R_2 , приводим систему к равнодействующей, модуль которой равен сумме модулей составляющих сил и приложенной в точке С, расстояние до которой равно $BC = F_1 AB / (F_1 + F_2)$.

Проводя аналогичные построения и перенося силу в точку А, найдем расстояние $AC = F_2 AB / (F_1 + F_2)$. Отсюда $AC/BC = F_2/F_1$, то есть равнодействующая делит расстояние между силами на части, обратно пропорциональные силам.

Если обе силы повернуть на один и тот же угол, то равнодействующая их останется равной сумме этих сил и повернется на тот же самый угол, а линия ее действия поделит отрезок АВ на части, обратно пропорциональные величинам задаваемых сил (рис.1.41).

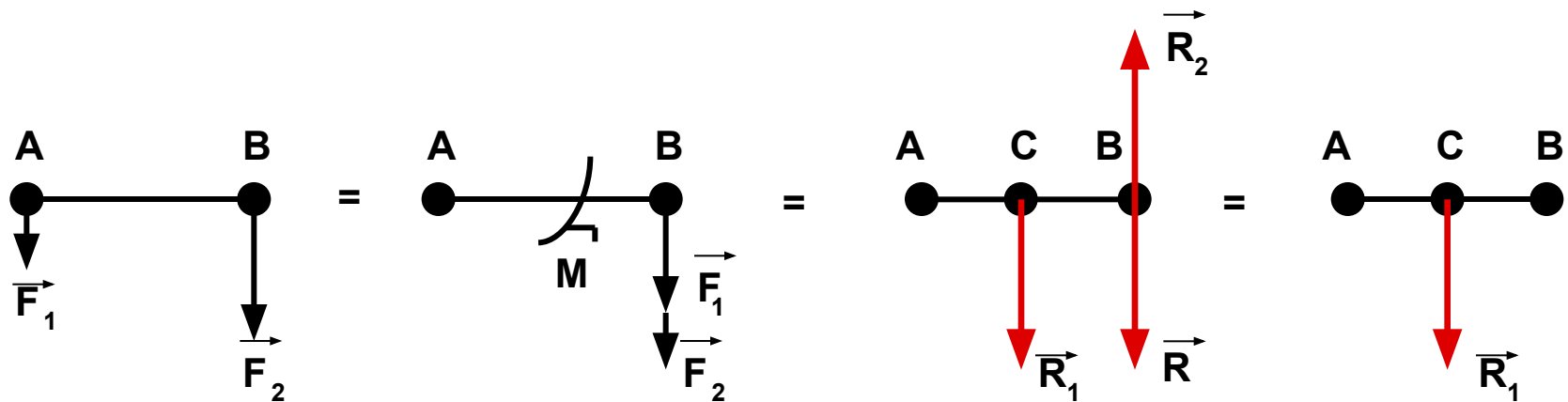


Рис.1.40. Сложение параллельных сил

Точка С, через которую проходит равнодействующая системы параллельных сил при повороте их на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

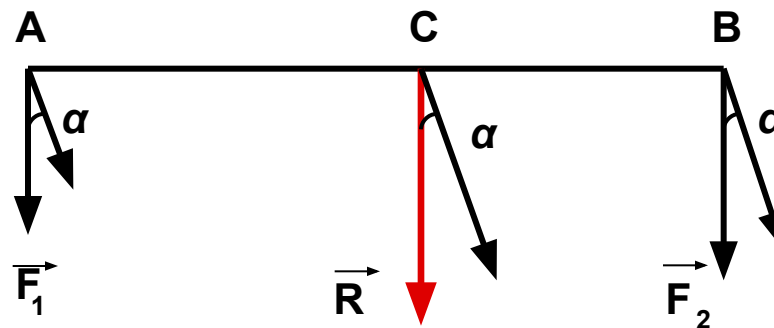


Рис.1.41. Поворот параллельных сил

Для нахождения координат центра параллельных сил можно воспользоваться теоремой Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси Y

$$m_y(\overset{\vee}{R}) = \sum m_y(\overset{\vee}{F}_k)$$

Из рис.1.42 следует, что

$$m_y(\overset{\vee}{R}) = R \cdot X_c = \left(\sum F_k \right) X_c$$

$$\sum m_y(\overset{\vee}{F}_k) = F_1 X_1 + F_2 X_2 + \dots + F_n X_n = \sum (F_k X_k)$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$X_c = \frac{\sum (F_k X_k)}{\sum (F_k)}$$

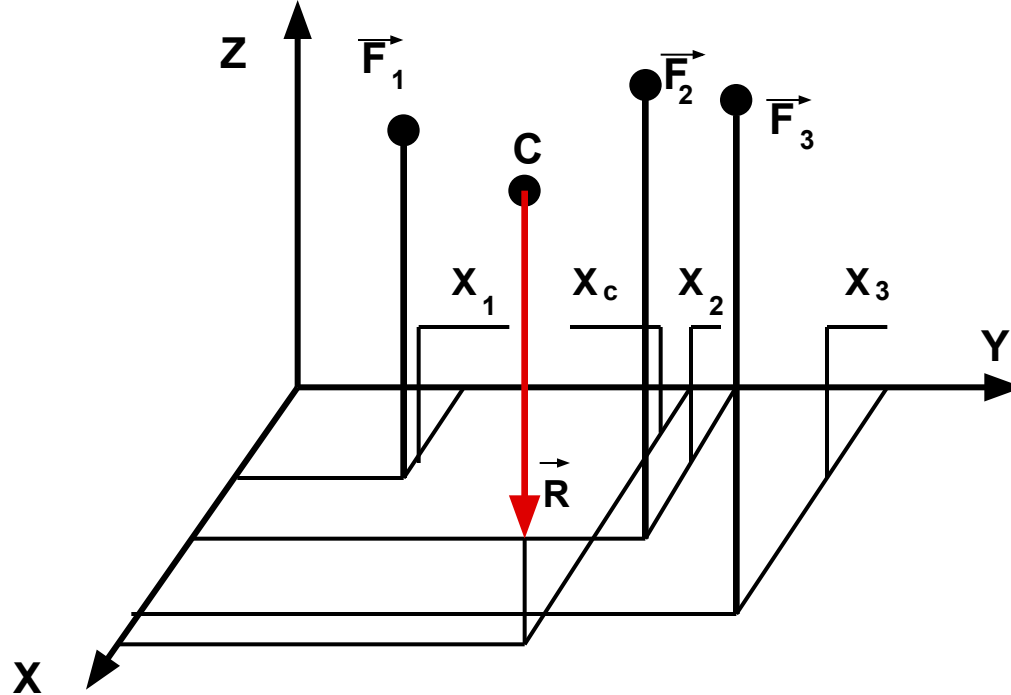


Рис.1.42. Определение координат центра параллельных сил

Аналогичные формулы получим для координат Y_c и Z_c

$$Y_c = \frac{\sum (F_k Y_k)}{\sum (F_k)} \quad Z_c = \frac{\sum (F_k Z_k)}{\sum (F_k)} \quad (1.16)$$

Примером системы параллельных сил можно считать силы тяжести, действующие на частицы любого тела. Равнодействующую этих сил называют силой тяжести или весом тела, а точка C , через которую проходит сила тяжести при любом повороте тела, называется центром тяжести.

Важной технической задачей при проектировании машин является определение положения центра тяжести.

Для нахождения координат центра тяжести можно воспользоваться формулами (1.16), если вместо произвольных сил F_k в них подставить вес отдельных частей тела P_k

$$X_c = \frac{\sum (P_k X_k)}{P}, \quad Y_c = \frac{\sum (P_k Y_k)}{P}, \quad Z_c = \frac{\sum (P_k Z_k)}{P}. \quad (1.17)$$

Полученные формулы позволяют найти координаты центра тяжести тел, имеющих конечное количество частей правильной формы.

Центр тяжести симметричных тел всегда лежит в плоскости, на оси или в центре симметрии.

- Для однородного тела его вес, как и вес отдельных частей, можно найти как произведение объема на удельный вес

$$P = \gamma V, \quad P_k = \gamma V_k.$$

- Подставляя в формулы (1.17), получим

$$X_c = \frac{\sum (V_k X_k)}{V}, \quad Y_c = \frac{\sum (V_k Y_k)}{V}, \quad Z_c = \frac{\sum (V_k Z_k)}{V}. \quad (1.18)$$

Здесь V - объем всего тела,

V_k - объем отдельных частиц.

Если однородное тело представляет собой плоскую фигуру, то для него надо найти только две координаты центра тяжести, поскольку он будет лежать в плоскости фигуры.

Так как вес фигуры будет пропорционален ее площади, то координаты центра тяжести найдутся по формулам:

$$X_c = \frac{\sum (A_k X_k)}{A}, \quad Y_c = \frac{\sum (A_k Y_k)}{A}, \quad (1.19)$$

где A - площадь всей фигуры,
 A_k - площади отдельных частиц фигуры.

Пример. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры (рис.1.43).

Решение. Выберем оси координат с началом в нижнем левом углу фигуры. Разобьем фигуру на 2 части, положение центров тяжести которых C_1 и C_2 известно. Это прямоугольник 1 со сторонами 5 и 10 см и квадрат 2 со стороной 5 см.

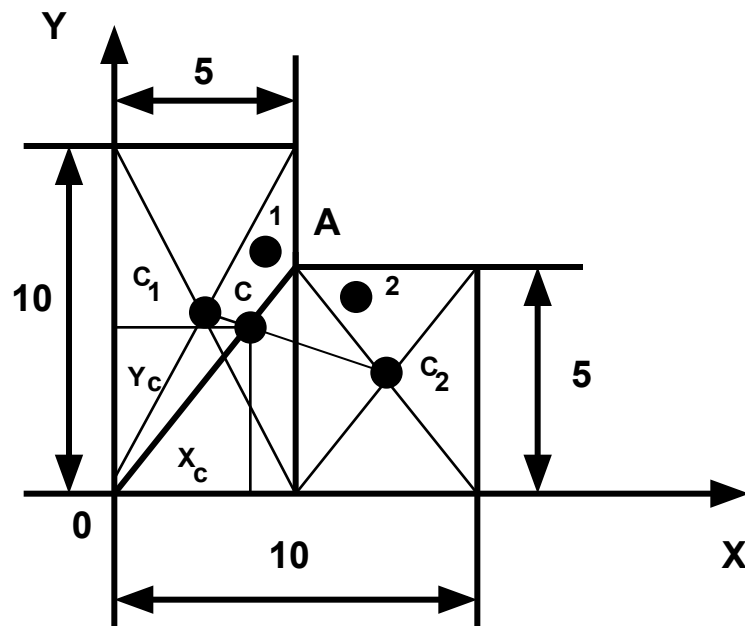


Рис.1.43. Рисунок к примеру

Тогда формула (1.19) для определения координаты X_c примет вид

$$X_c = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2}{A_1 + A_2},$$

где $A_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см}^2$ - площадь первой фигуры,
 $A_2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см}^2$ площадь второй фигуры,
 $X_1 = 2,5 \text{ см}$ - координата центра тяжести
первой фигуры,
 $X_2 = 7,5 \text{ см}$ - координата центра тяжести
второй фигуры. Отсюда

$$X_c = \frac{50 \cdot 2,5 + 25 \cdot 7,5}{50 + 25} = 4,17 \text{ см.}$$

Аналогично можем найти и координату Y_c однако это не имеет смысла, так как центр тяжести всей фигуры должен лежать на оси симметрии, которой является линия ОА, поэтому и координата Y_c также равна 4,17 см.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 1. Как находится проекция силы на ось?
- 2. В каком случае проекция силы на ось положительна?
- 3. В каком случае проекция силы на ось отрицательна?
- 4. В каком случае проекция силы на ось равна нулю?
- 5. Как находится алгебраический момент силы относительно точки?
- 6. В каком случае момент силы относительно точки положителен?
- 7. В каком случае момент силы относительно точки отрицателен?
- 8. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
- 9. Как находится момент пары сил?
- 10. Какие уравнения равновесия составляются для сходящейся системы сил?
- 11. Какие уравнения равновесия составляются для плоской сходящейся системы сил?

- 12. Какие уравнения равновесия составляются для плоской произвольной системы сил?
- 13. Как находится момент силы относительно оси?
- 14. В каком случае момент силы относительно оси положителен?
- 15. В каком случае момент силы относительно оси равен нулю?
- 16. Какие уравнения равновесия составляются для произвольной пространственной системы сил?
- 17. Какие силовые факторы находятся при определении реакций в жесткой заделке?
- 18. Методы расчета составных конструкций.
- 19. В чем заключается метод вырезания узлов?
- 20. Как находится максимальная сила сцепления?
- 21. Как находится сила трения при скольжении?
- 22. Как находится центр тяжести плоской фигуры?
- 23. Как находится центр тяжести однородного тела?
- 24. Где находится центр тяжести симметричных тел?