

электромагнетизм переменный ток

Английский физик Майкл Фарадей, узнав об опытах Эрстеда, поставил перед собой задачу «превратить магнетизм в электричество». Решал эту задачу в течение 10 лет, с 1821 по 1831 г. Фарадей доказал, что магнитное поле может порождать электрический ток.

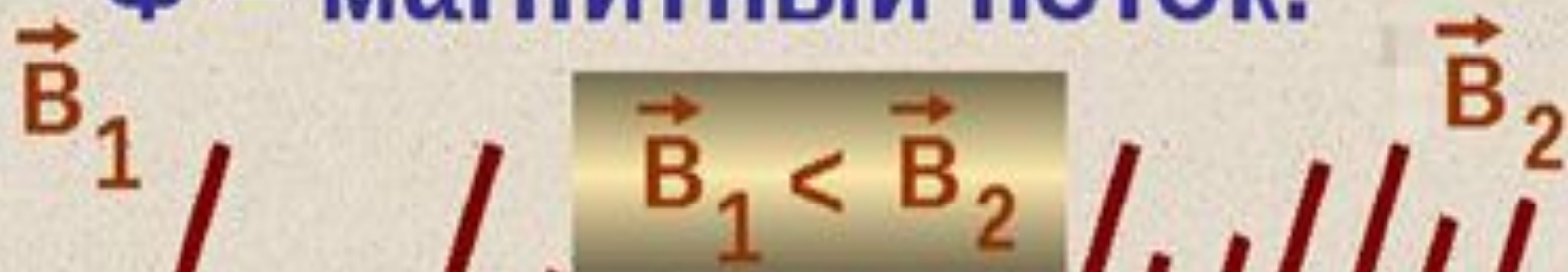




ОПЫТЫ ФАРАДЕЯ

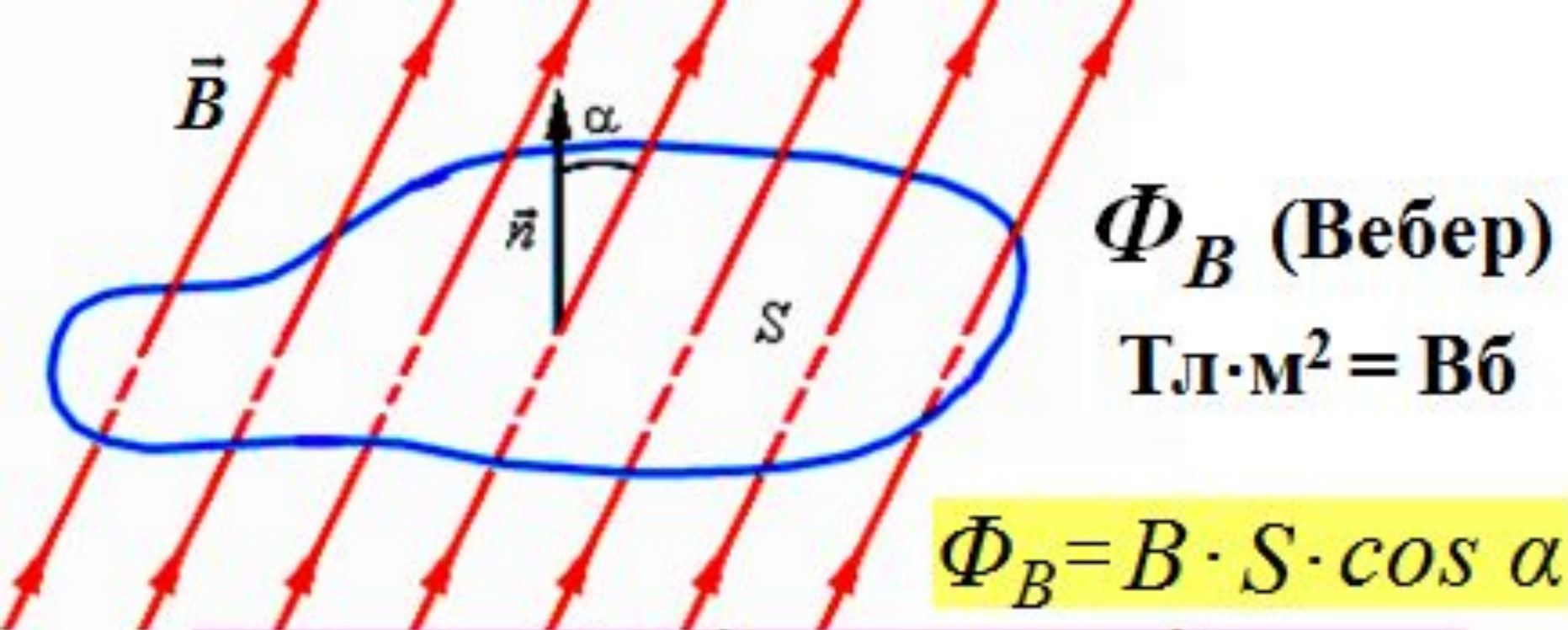


Φ – магнитный поток.



$$\Phi_1 < \Phi_2$$

Магнитный поток пропорционален
модулю вектора магнитной индукции

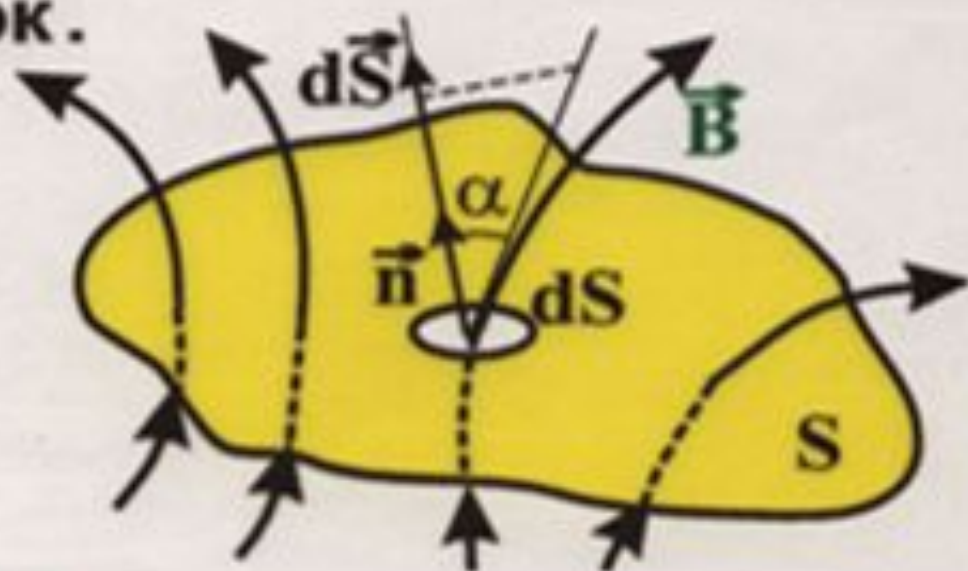


$$\Phi_B = \oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S} \right) = 0$$

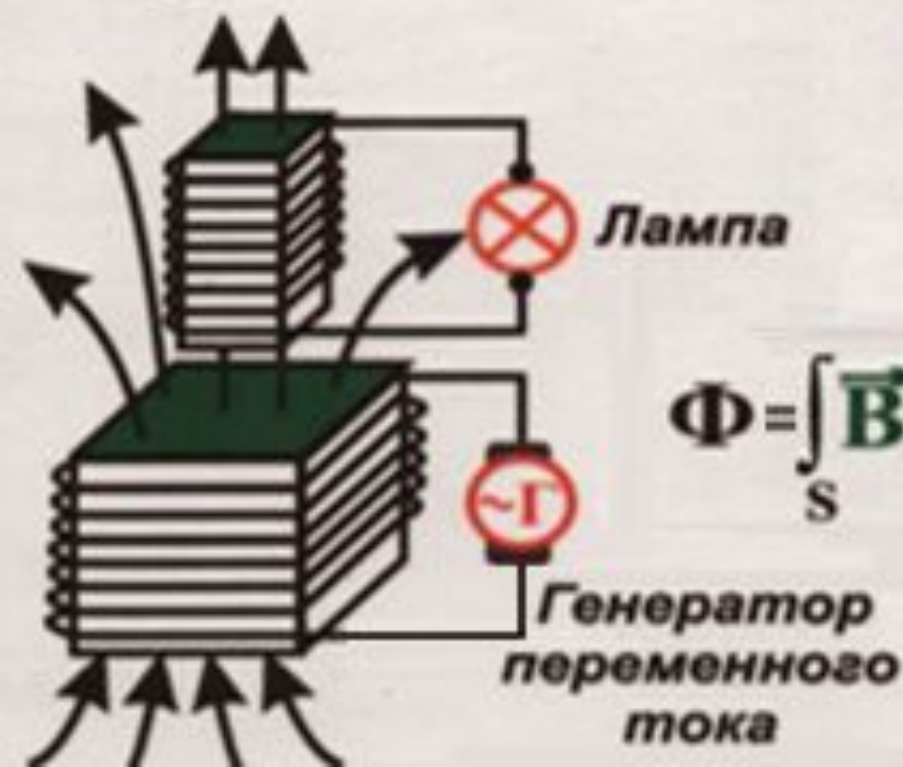
Магнитный поток, равный 1 Вб, создается магнитным полем с индукцией 1 Тл, пронизывающим по направлению нормали плоский контур площадью 1 м².

Явление электромагнитной
индукции.

Перемещение провода в
магнитном поле создает
ТОК.



$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B \cos \alpha dS = \int_S B_n dS$$



Лампочка загорается, хотя
прямо не соединена
с генератором.

Явление электромагнитной индукции заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название индукционного.

Закон Фарадея

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Электродвижущая сила индукции в контуре прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего плоскость контура.

Найдем **ЭДС** индукции в контуре .

Пусть подвижная сторона **MN** проводящего контура **L**, помещенного в постоянное магнитное поле ($\vec{B} = \text{const}$), движется со скоростью v .
В момент времени t магнитный поток равен :

$$\Phi = BS = B \cdot a \cdot x(t)$$



Сторонней силой является сила Лоренца, действующая на электроны, движущиеся вместе со стержнем со скоростью v :

$$\vec{F} = e [\vec{v}, \vec{B}]$$

Напряженность поля сторонних сил равна: $\vec{E}_{\text{ст}} = [\vec{v}, \vec{B}]$

Сторонняя сила действует только в подвижной стороне контура.

Поэтому: $\mathcal{E}_i = \int_L \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = \int_{MN} \vec{E} d\vec{l}$

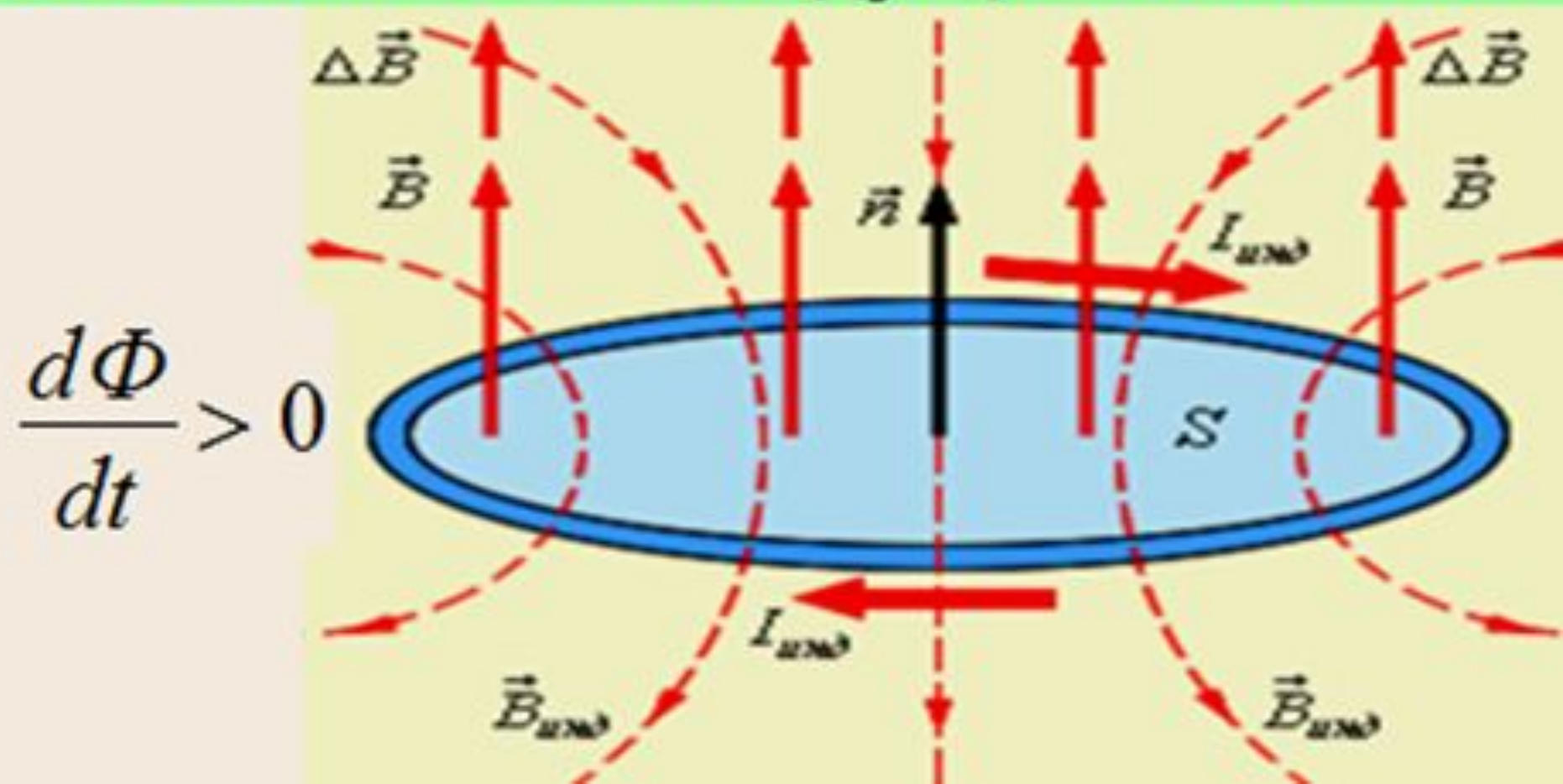
С учетом направлений векторов:

$$\vec{E} d\vec{l} = -E dl \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_i = - \int_{MN} E dl = -v \int_{MN} B dl = -vBa \quad (1)$$

Из $\Phi = BS = Bax(t)$ получим $d\Phi/dt = Bav \quad (2)$

Сравнивая (1) и (2), получаем $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$

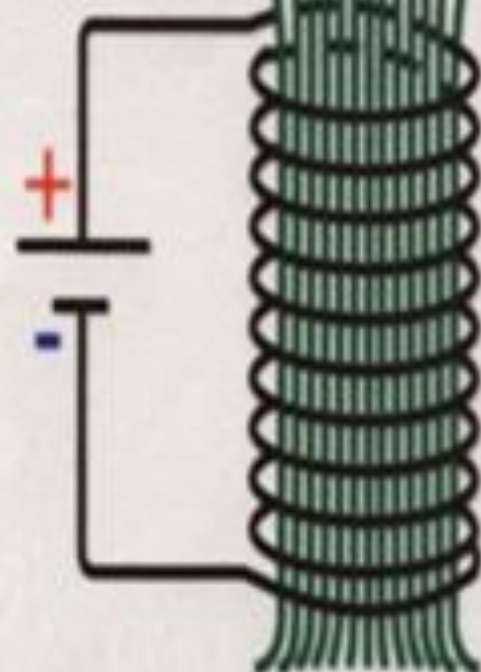
Индукционный ток всегда имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.



Явление электромагнитной индукции. Правило Ленца.

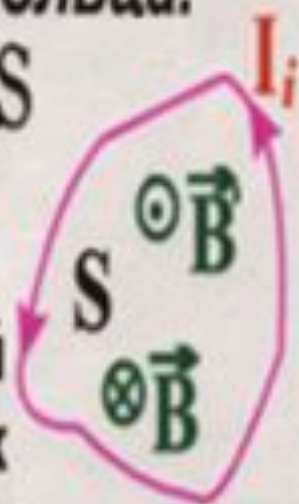
Опускающееся
кольцо

Направление
индукционного
тока

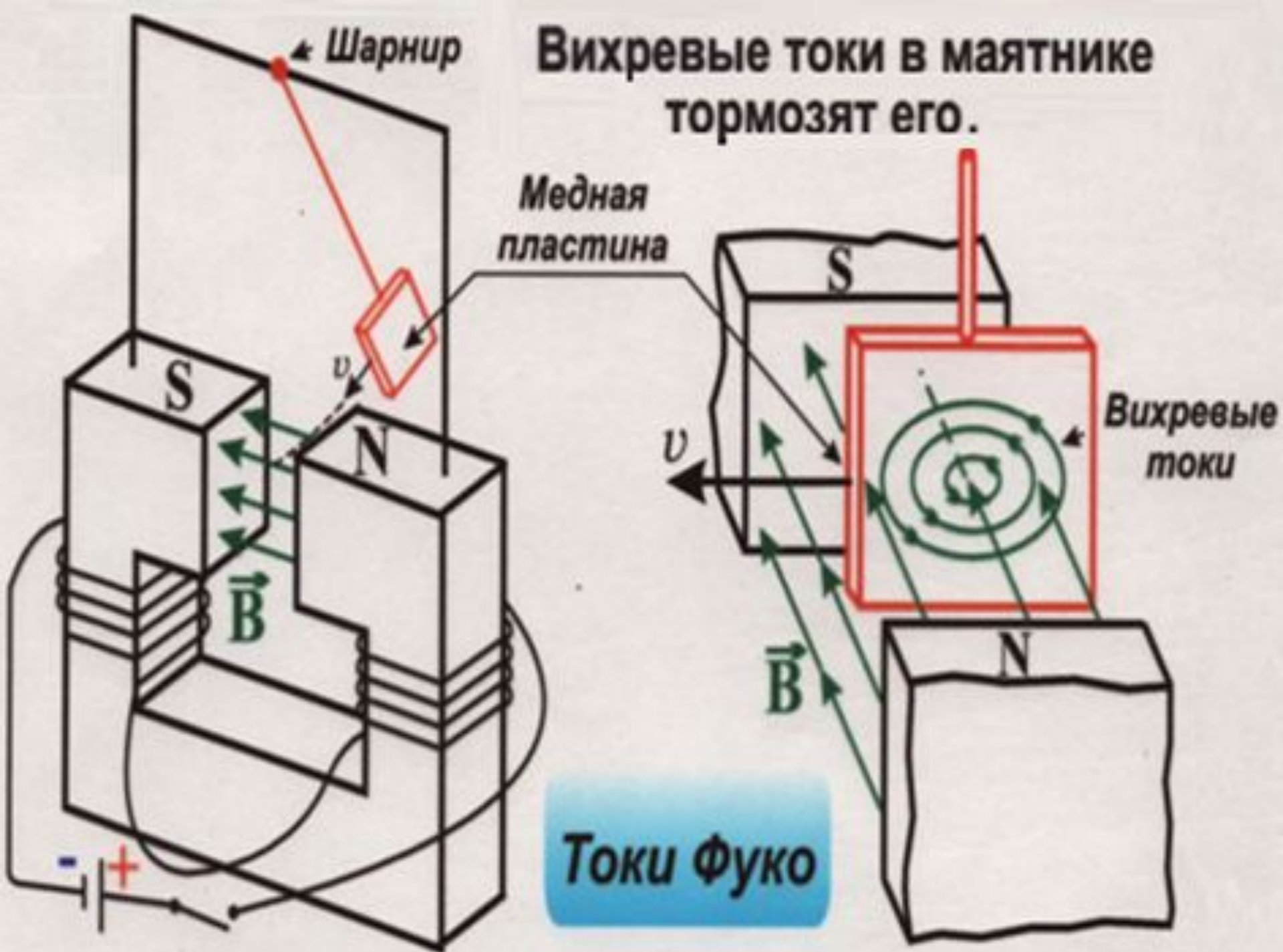


Индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызвавшей. Система противодействует причине возникновения индукционного тока в кольце, т.е. опусканию кольца.

Пусть магнитный поток $\Phi = BS$ пронизывающий плоскость неподвижного проводящего контура, растет. Индукционный ток направлен так, чтобы поток вектора индукции его магнитного поля $\Phi' = B'S$, препятствовал росту Φ .

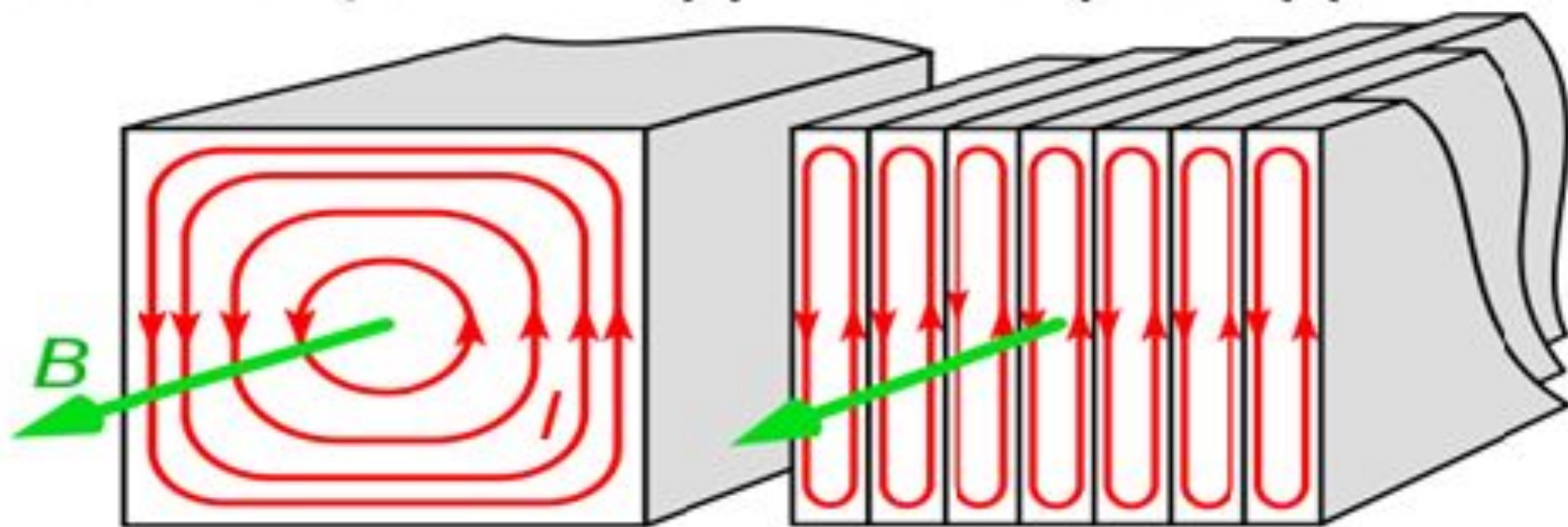


Вихревые токи в маятнике тормозят его.



Токи Фуко (вихревые токи) – индукционные токи, возникающие в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле.

Массивные проводники – поперечные размеры, которых соизмеримы с длиной проводника.



Электромагнитная индукция

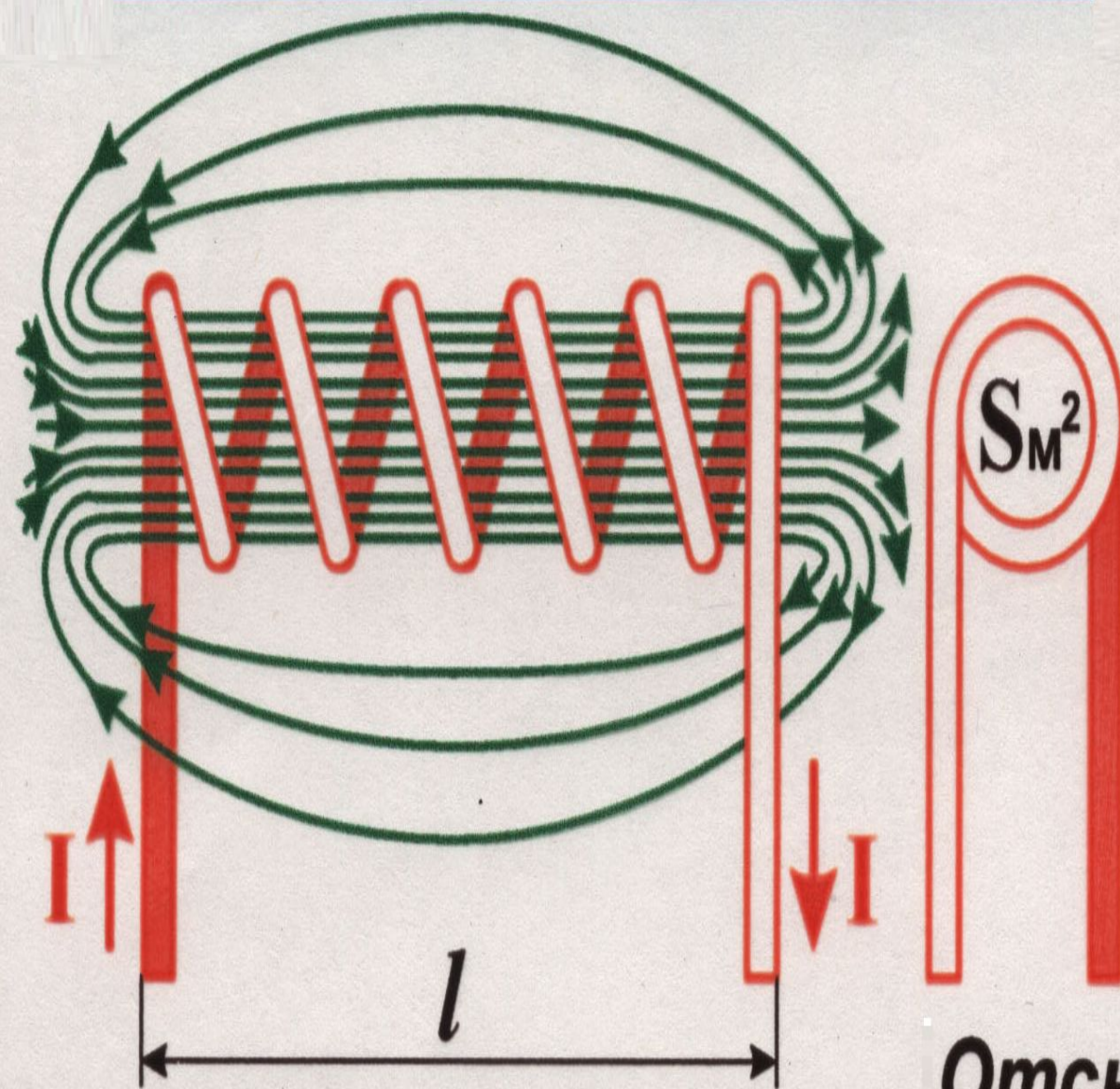
$\Phi = LI$, где L - индуктивность

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (\text{при } L = \text{const})$$

Единица измерения L - генри (Гн)

$$1 \text{ генри (Гн)} = 1 \text{ Вб} / \text{А}$$

Индуктивность соленоида



$$B = \mu\mu_0 n I$$

Магнитный поток
через один виток

$$\Phi_1 = B S = \mu\mu_0 n I S$$

Полный поток

$$\Phi = N \Phi_1 = n l B S =$$

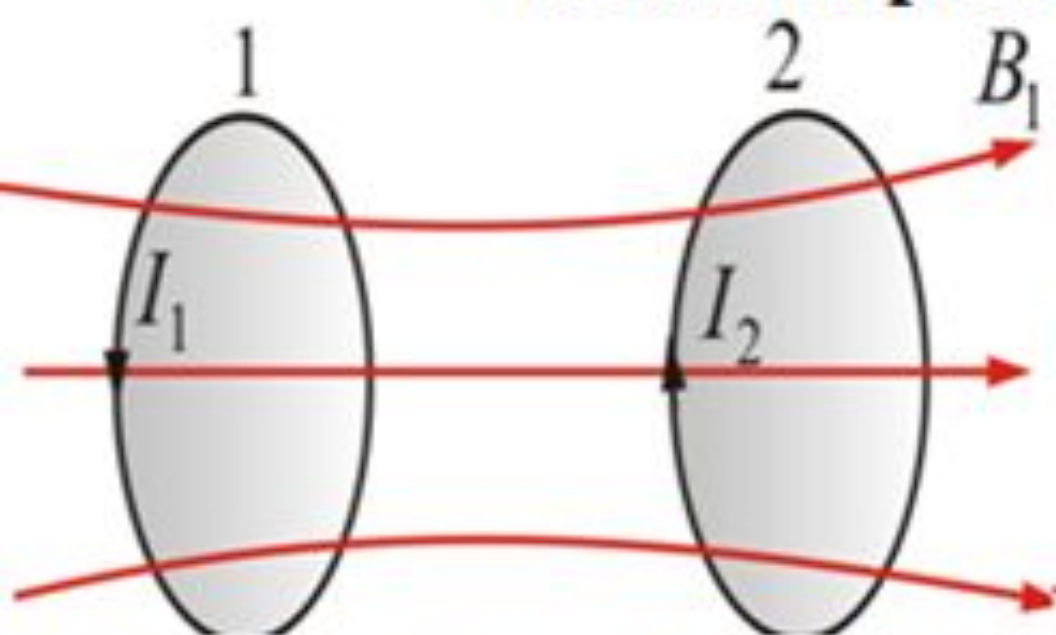
$$= \mu\mu_0 n^2 I V, \text{ где}$$

n - число витков
на единицу длины

Отсюда : $L = \mu\mu_0 n^2 V$

ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

Рассмотрим два контура, расположенные недалеко друг от друга. В первом контуре течет ток I_1 . Он создает магнитный поток, который пронизывает витки второго контура.



$$\Phi_2 = L_{21} I_1$$

При изменении тока I_1 во втором контуре наводится ЭДС индукции

$$E_{12} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Аналогично, ток I_2 второго контура создает магнитный поток Φ_1 пронизывающий первый контур

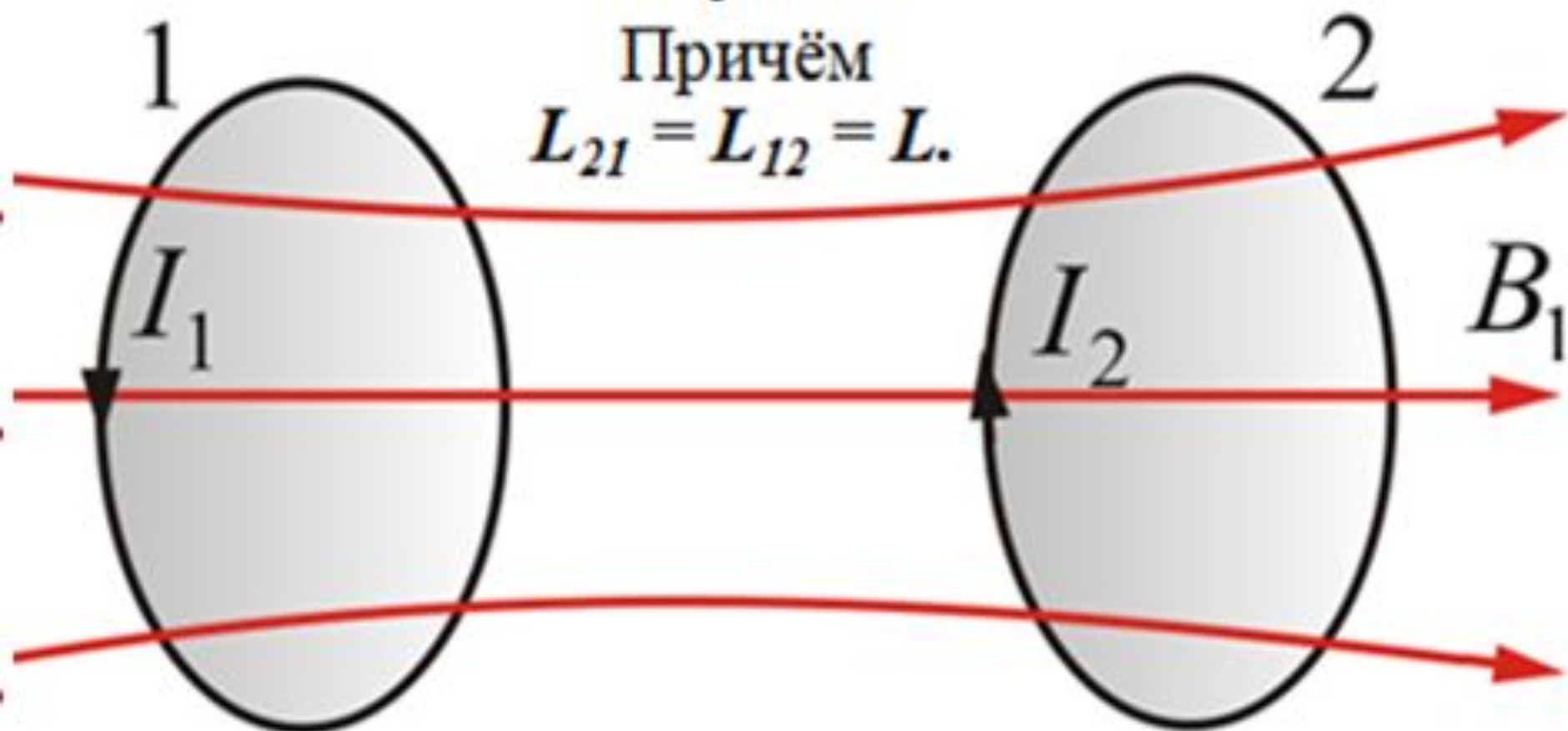
$$\Phi_1 = L_{12} I_2$$

При изменении тока I_2 наводится ЭДС $E_{21} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$

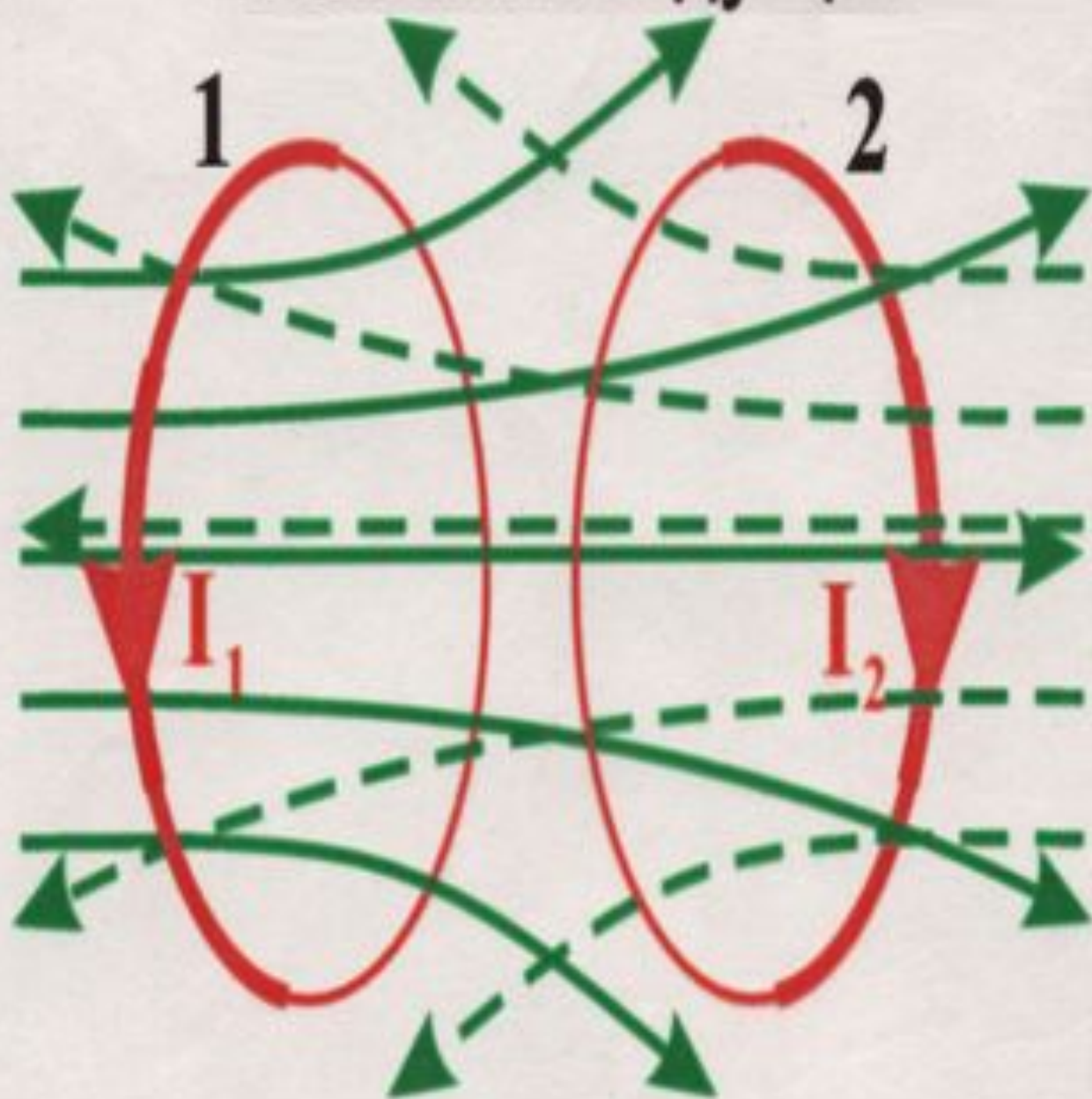
Контуры называются *связанными*, а *явление* – *взаимной индукцией*.

Коэффициенты L_{21} и L_{12} называются *взаимной индуктивностью* или коэффициенты взаимной индукции.

Причём
 $L_{21} = L_{12} = L.$



Взаимная индукция



$$\Phi_2 = L_{21} I_1$$

$$\Phi_1 = L_{12} I_2$$

Если

$$L_{12}, L_{21} = \text{const},$$

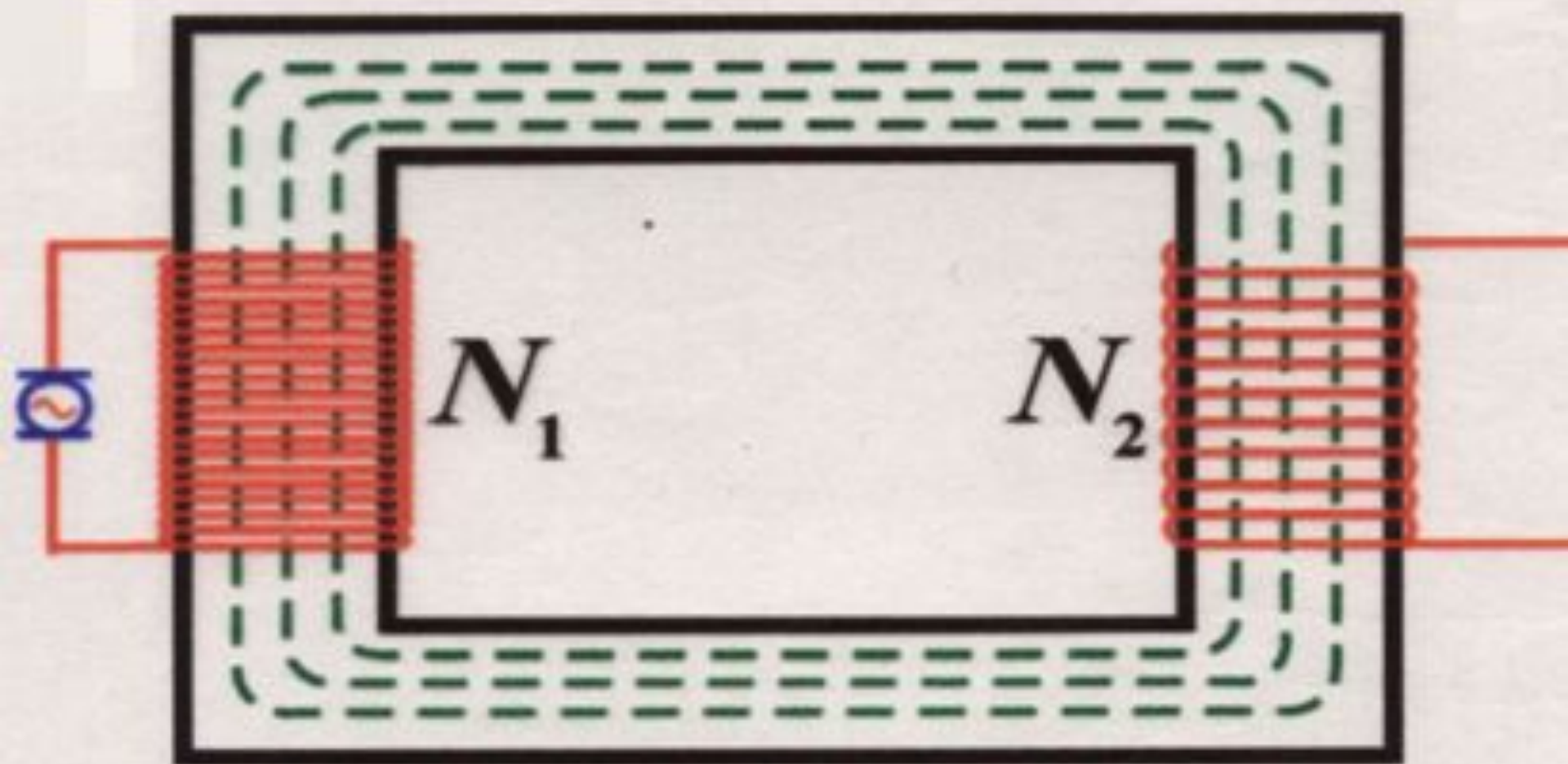
то

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

Связанные контуры

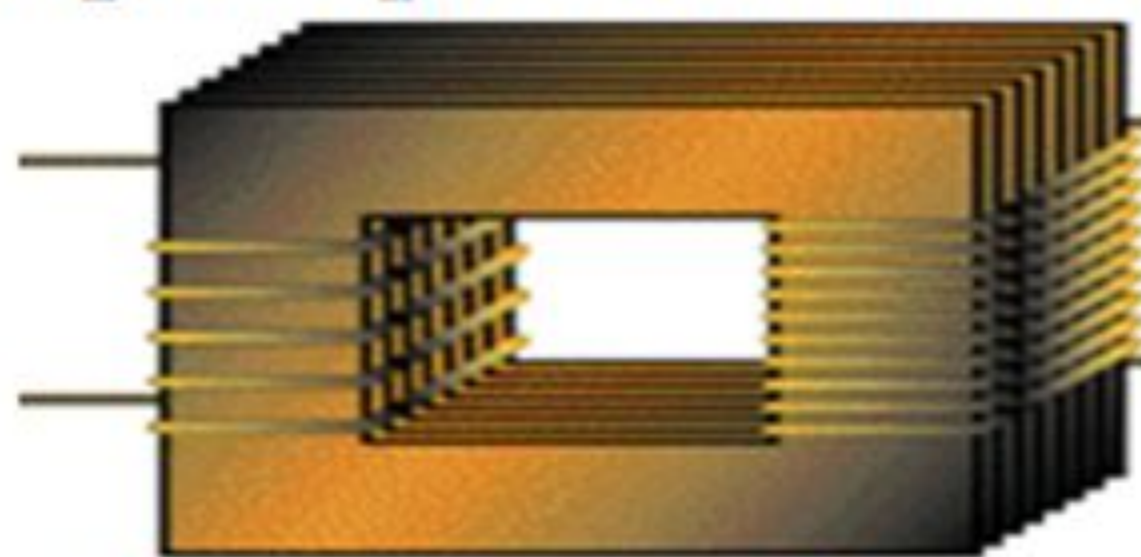
Теорема
взаимности: $L_{12} = L_{21}$



Трансформатор

**устройство для преобразования
переменного тока, при
котором напряжение
увеличивается или
уменьшается в несколько раз**

Трансформатор является примером связанных контуров.



E — ЭДС

$$\frac{E_1}{E_2} \approx \frac{N_1}{N_2}$$

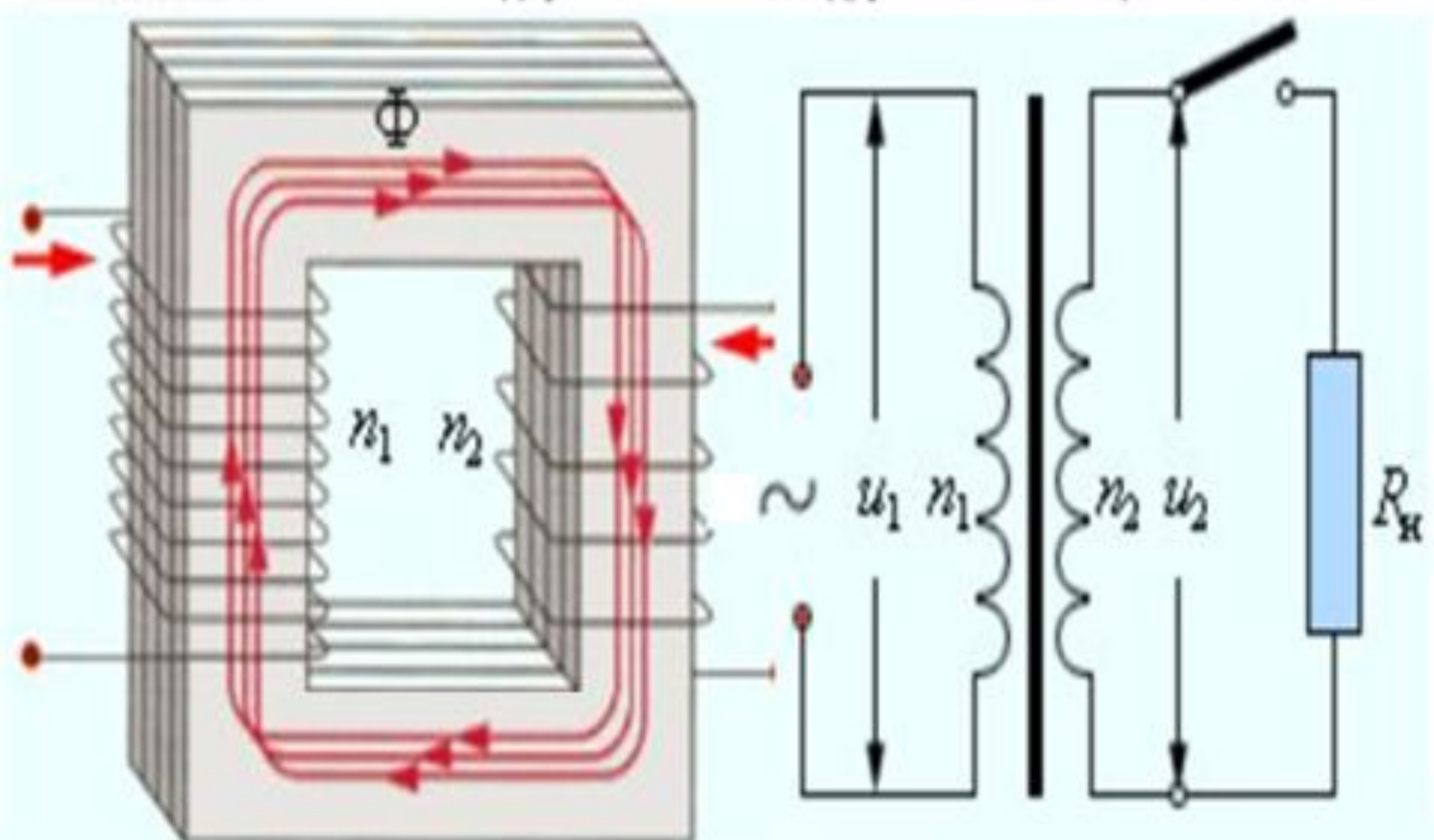
Если пренебречь потерями, предположить, что $R \gg 0$, то

$$E_1 I_1 \approx E_2 I_2$$

Коэффициент трансформации

$$K = \frac{E_2}{E_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Трансформатор – устройство, имеющее две или более индуктивно связанных обмоток для преобразования посредством электромагнитной индукции одной или нескольких систем тока в одну или несколько других систем переменного тока.



Коэффициент трансформации

$$K = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \approx \frac{I_2}{I_1}$$

1. $N_2 > N_1$ – повышает $K < 1$
2. $N_2 < N_1$ – понижает $K > 1$

КПД ТРАНСФОРМАТОРА

P_1 и P_2 – мощность тока в первичной и вторичной обмотках.

η -Коэффициент полезного действия (КПД)

$\eta = 96-99\%$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1}$$

Во сколько раз увеличивается напряжение переменного тока, во столько раз уменьшается сила тока.

Потери энергии при работе трансформатора

Нагрев обмоток трансформатора

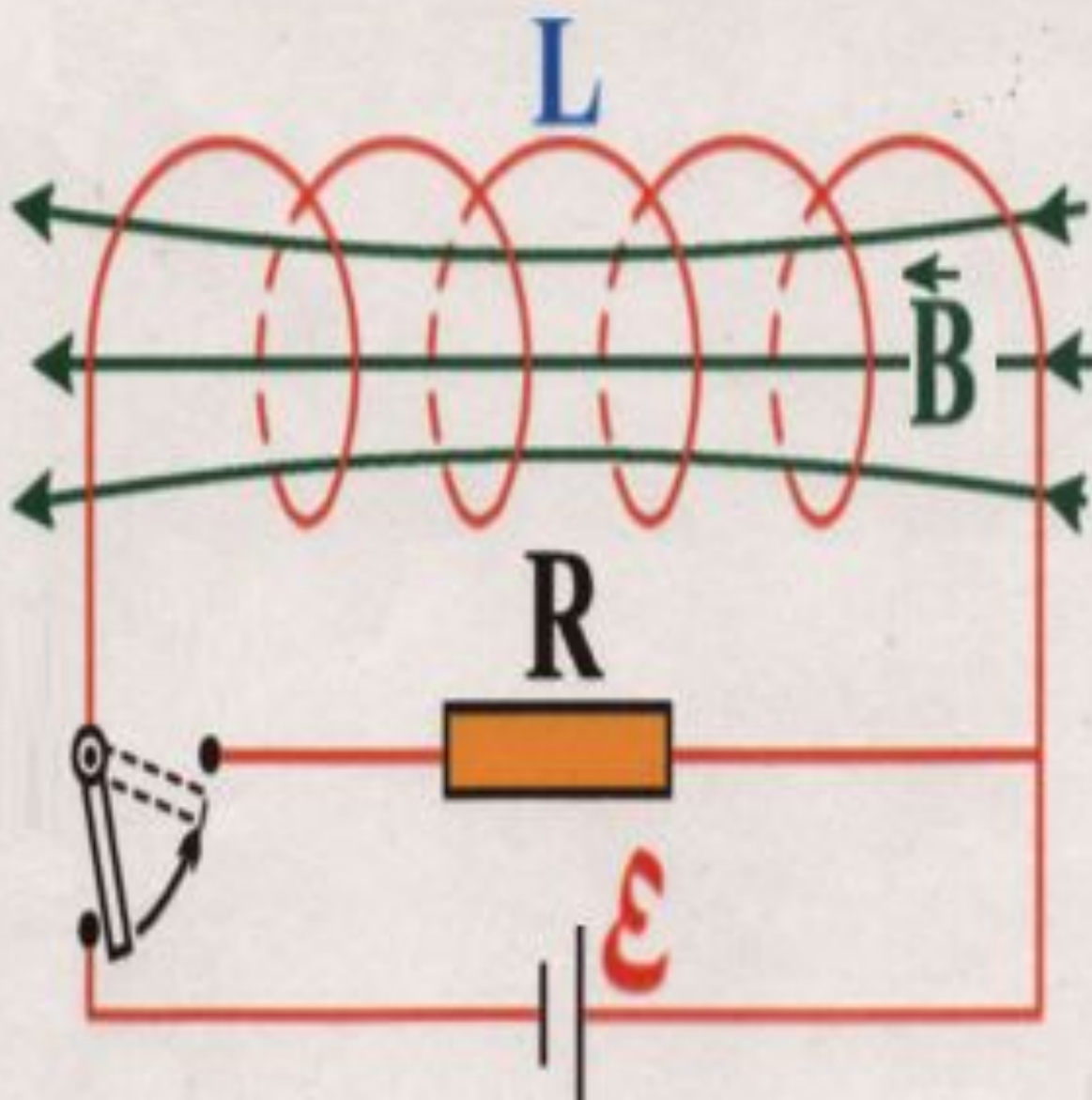
Нагрев сердечника токами Фуко

Потери при перемагничивании
сердечника

Потери на рассеивание
магнитного потока

Энергия магнитного поля.

Работа, совершаемая током, начиная с $t=t_0$



$$dA = \mathcal{E}_s I dt = -L \frac{dI}{dt} I dt = -L I dI$$

(при $L = \text{const}$)

$$A = - \int_I^0 L I dI = \frac{LI^2}{2}$$

$$A = W \quad W = \frac{LI^2}{2}$$

Энергия магнитного поля длинного соленоида

$$\left. \begin{aligned} L &= \mu\mu_0 n^2 V, \\ I &= \frac{H}{n} \end{aligned} \right\} \rightarrow W = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V$$

n - число витков на единицу длины, V - объем соленоида

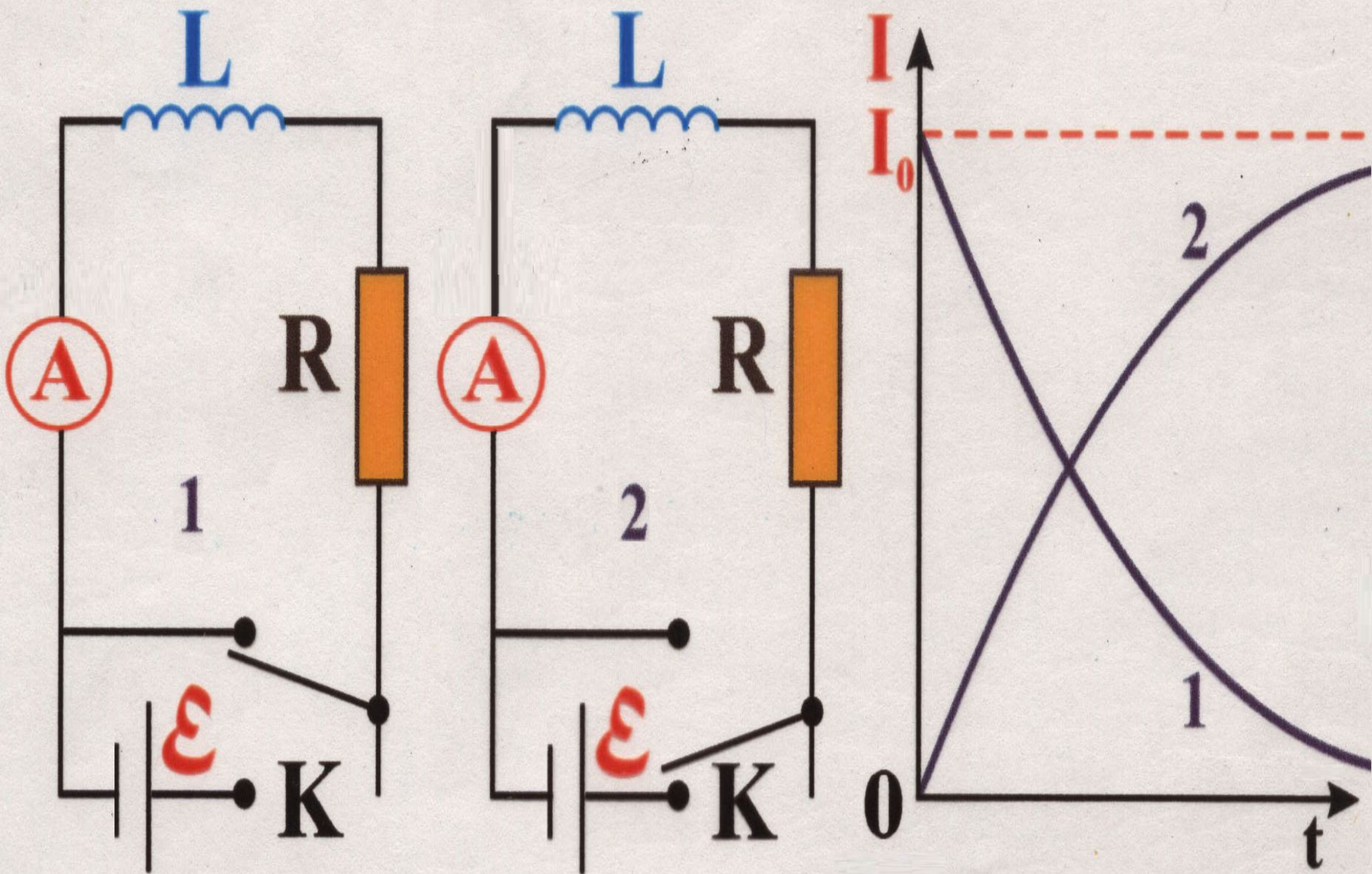
Плотность энергии:

$$w = \frac{W}{V}, \quad w = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2}$$

Энергия неоднородного поля :

$$W = \int_V w dV = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu H^2 dV$$

Ток при замыкании и размыкании цепи



Ток самоиндукции

$$I_{\text{инд}} = -\tau I \quad \tau = L / R$$

τ - время релаксации



Ток при размыкании цепи :

$$IR = \mathcal{E} \rightarrow IR = -L \frac{dI}{dt} \text{ (при } L = \text{const)} \rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \rightarrow$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L} t \rightarrow I = I_0 e^{-(R/L)t} \rightarrow$$

$$\rightarrow I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ где } \tau = \frac{L}{R} - \text{постоянная}$$

Ток при замыкании : $I = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Экстратоки

при наличие ферромагнетика

$$L = L(I)$$

$$\mathcal{E}_s = - \left(L + I \frac{dL}{dI} \right) \frac{dI}{dt}$$

Аналогия механических и электрических явлений

Самоиндукция подобна инерции. Она не даёт току мгновенно достигать максимума при замыкании цепи или минимума при её размыкании.

При большом значении ЭДС самоиндукции возможен пробой воздуха!

Ток смещения.

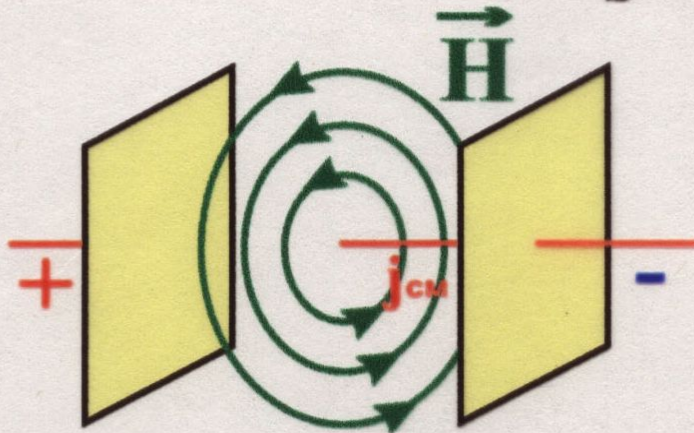
Плотностью тока смещения
называется вектор:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

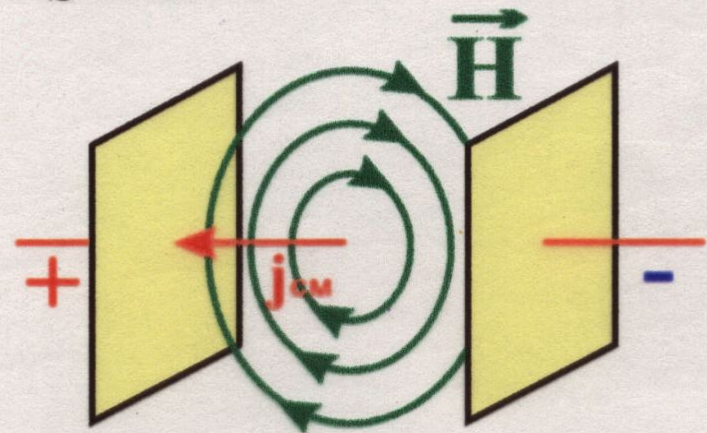
где $\vec{D}$ - вектор электрического смещения.

Ток смещения через произвольную поверхность S

равен:
$$I_{\text{см}} = \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$



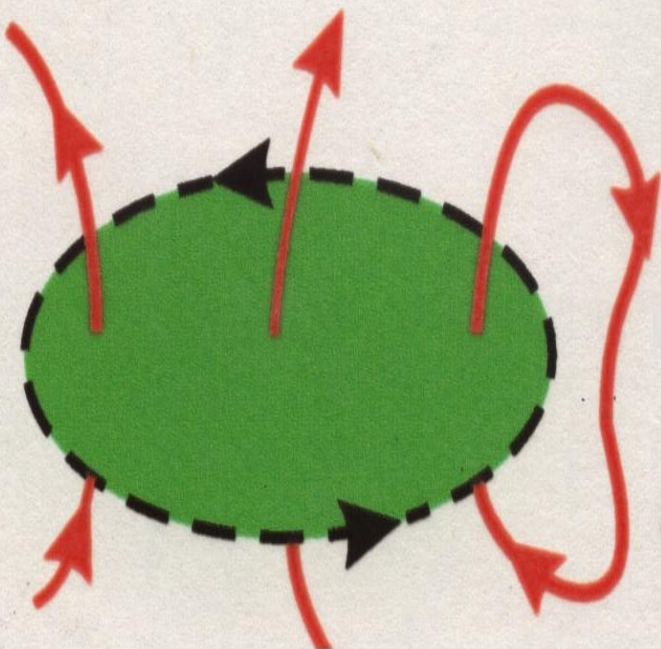
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ возрастает



$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ убывает

Ток смещения или изменяющееся во времени
электрическое поле вызывает появление
магнитного поля.

Основные законы магнитного поля



Теорема
Гаусса:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

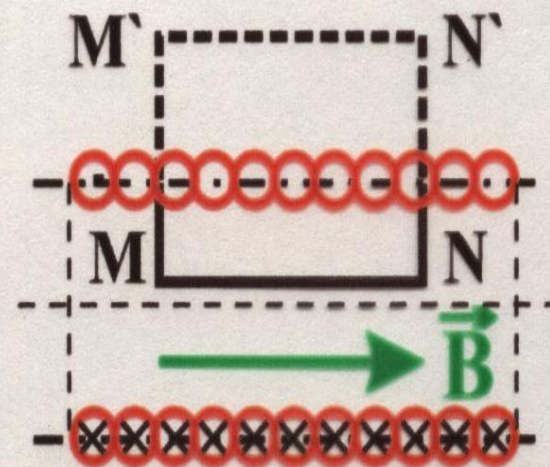
Поток вектора $\vec{B}$ сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

Теорема о циркуляции
вектора $\vec{B}$:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum \vec{I}_i$$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на μ_0 .

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$: $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum \mathbf{I}_i$



К расчету магнитного поля бесконечно длинного соленоида

$$\int_{M'MNN'} \vec{B} d\vec{l} = \int_{MN} \vec{B} d\vec{l} + \int_{NN'} \vec{B} d\vec{l} + \int_{N'M'} \vec{B} d\vec{l} + \int_{M'M} \vec{B} d\vec{l}$$

$$\int_{M'MNN'} \vec{B} d\vec{l} = \int_{MN} \vec{B} d\vec{l} = \vec{B} MN$$

$$\sum \mathbf{I}_i = \mathbf{I} n MN$$

$$\mathbf{B} MN = \mu_0 \mathbf{I} n MN$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{I} n$$

Уравнения Максвелла Интегральная форма

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (1)$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} \quad (3)$$

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_v \rho dV \quad (4)$$

Уравнение (1) – обобщение закона Фарадея (закона электромагнитной индукции),
уравнение (3) – закон полного тока, уравнения
(2) и (4) – теоремы Остроградского – Гаусса для магнитного и электрического полей.

**Электрическое поле создают
электрические заряды и
изменяющиеся во времени
магнитные поля.**

**Магнитное поле создают
движущиеся электрические
заряды и изменяющиеся во
времени электрические
поля.**

Переход от интегральной формы уравнений к дифференциальной осуществляется с помощью теорем Гаусса и Стокса

Теорема Гаусса

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV,$$

где дивергенция вектора $\vec{A}$ - скалярная величина

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Теорема Стокса

$$\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S},$$

ротор вектора $\vec{A}$ - вектор, определяемый с помощью следующей матрицы в декартовой системе координат:

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \text{Или:}$$

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Уравнения Максвелла. Дифференциальная форма.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Граничные условия :

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{пов}}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau};$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{\text{пов}}.$$

$\sigma_{\text{пов}}$ - поверхностная плотность свободных электрических зарядов

$j_{\text{пов}}$ - поверхностная плотность тока проводимости

оператора ∇ (набла)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

что означает

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Скалярное произведение.

$$(\vec{\nabla} \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{A}$$

Векторное произведение.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Уравнения Максвелла с оператором ∇

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Случай стационарных полей.

Для стационарных полей ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$) уравнения Максвелла распадутся на уравнения электростатики :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0.$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad \text{div } \vec{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho,$$

и уравнения магнитостатики :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S}, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}.$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца.

При переходе от системы К к системе К', движущейся со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ вдоль положительного направления оси X, для проекций векторов $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ и $\vec{D}$ имеем:

$$E_{x'} = E_x, \quad E_{y'} = \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_{z'} = \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$B_{x'} = B_x, \quad B_{y'} = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B_{z'} = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$D_{x'} = D_x, \quad D_{y'} = \frac{D_y - \frac{v}{c^2} H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad D_{z'} = \frac{D_z + \frac{v}{c^2} H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$H_{x'} = H_x, \quad H_{y'} = \frac{H_y + v D_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad H_{z'} = \frac{H_z - v D_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Из приведенных преобразований Лоренца для электромагнитного поля следует, что инвариантны следующие скалярные произведения:

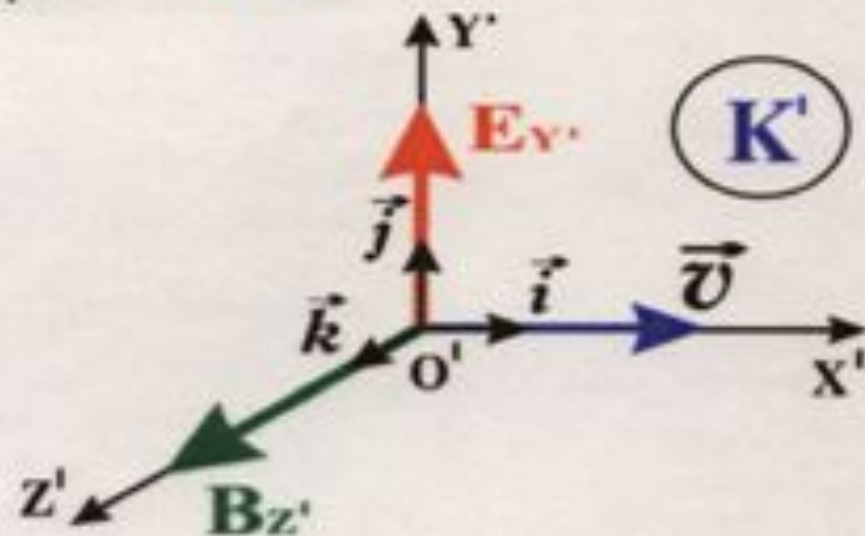
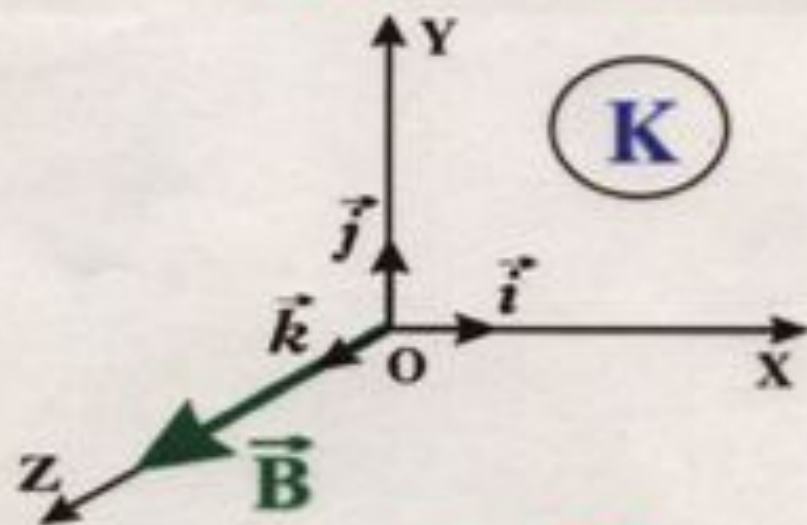
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}', \quad \vec{H} \cdot \vec{D} = \vec{H}' \cdot \vec{D}'.$$

Пусть в системе отсчета **K** существует только магнитное поле $\vec{B} = B_z \vec{k}$. Тогда, в соответствии с преобразованиями Лоренца для электромагнитного поля, в системе отсчета **K'**, движущейся с постоянной скоростью v вдоль оси X, наблюдатель зафиксирует и магнитное, и электрическое поле.

Векторы $\vec{B}'$ и $\vec{E}'$ имеют следующие проекции:

$$B'_{x'} = 0, \quad B'_{y'} = 0, \quad B'_{z'} = \frac{B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

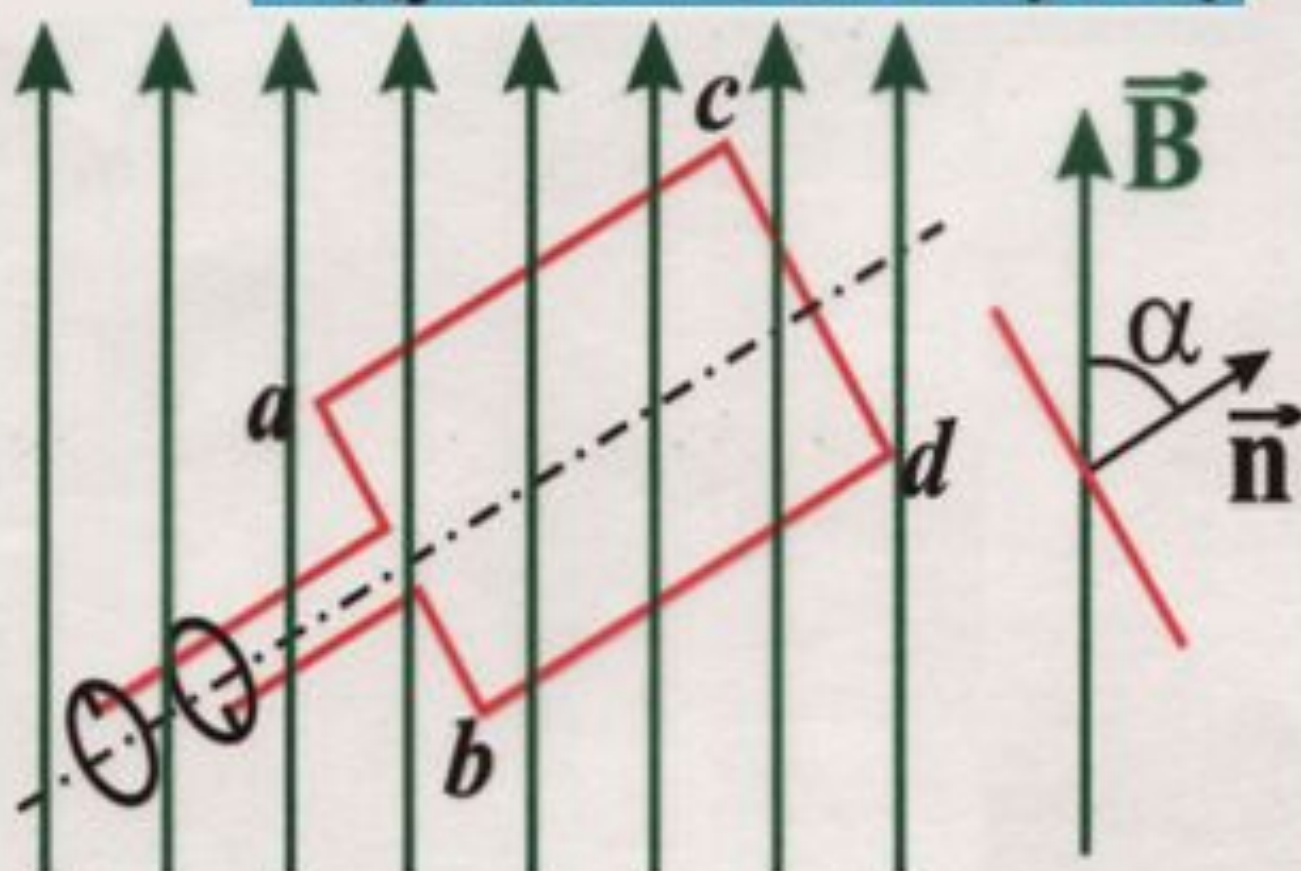
$$E'_{x'} = 0, \quad E'_{y'} = \frac{v B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E'_{z'} = 0$$



Векторы $\vec{B}'$ и $\vec{E}'$ взаимно перпендикулярны ($\vec{B}' = B_{z'} \vec{k}$, $\vec{E}' = E_{y'} \vec{j}$).

**Переменным называется
электрический ток,
изменяющийся по модулю
и направлению. Переменный
ток в энергетических
электрических цепях является
результатом вынужденных
электромагнитных колебаний,
которые создаются
генератором переменного тока.**

Индукционный генератор



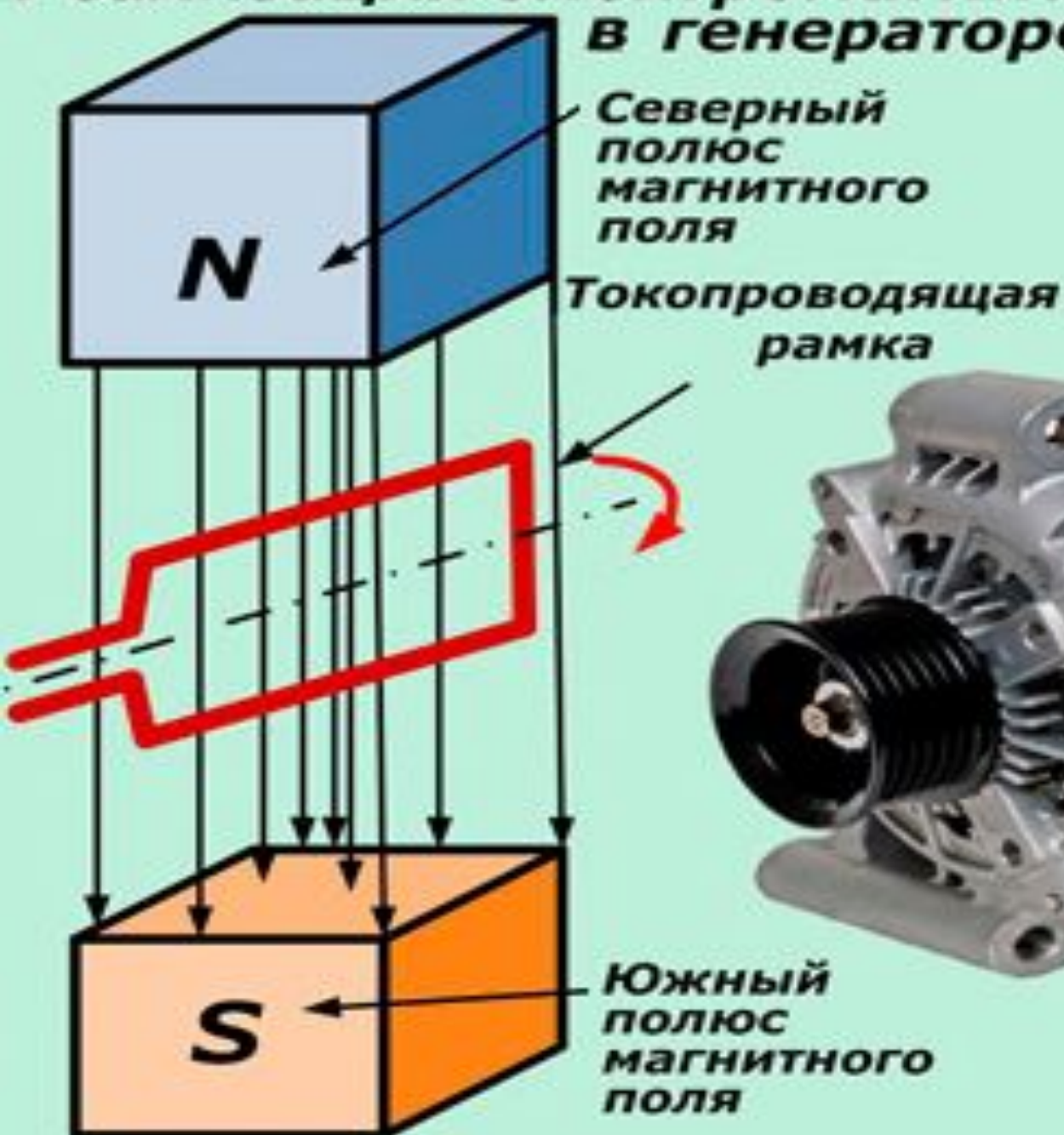
$$\Phi = \vec{B} S \cos \alpha, \quad \alpha = \omega t, \quad \Phi = \vec{B} S \cos \omega t, \quad \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} =$$

(ω - угловая скорость вращения)

$$= \vec{B} S \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\vec{B} S \omega}{R} = I_0 \sin \omega t$$

Реализация электромагнитной индукции в генераторе



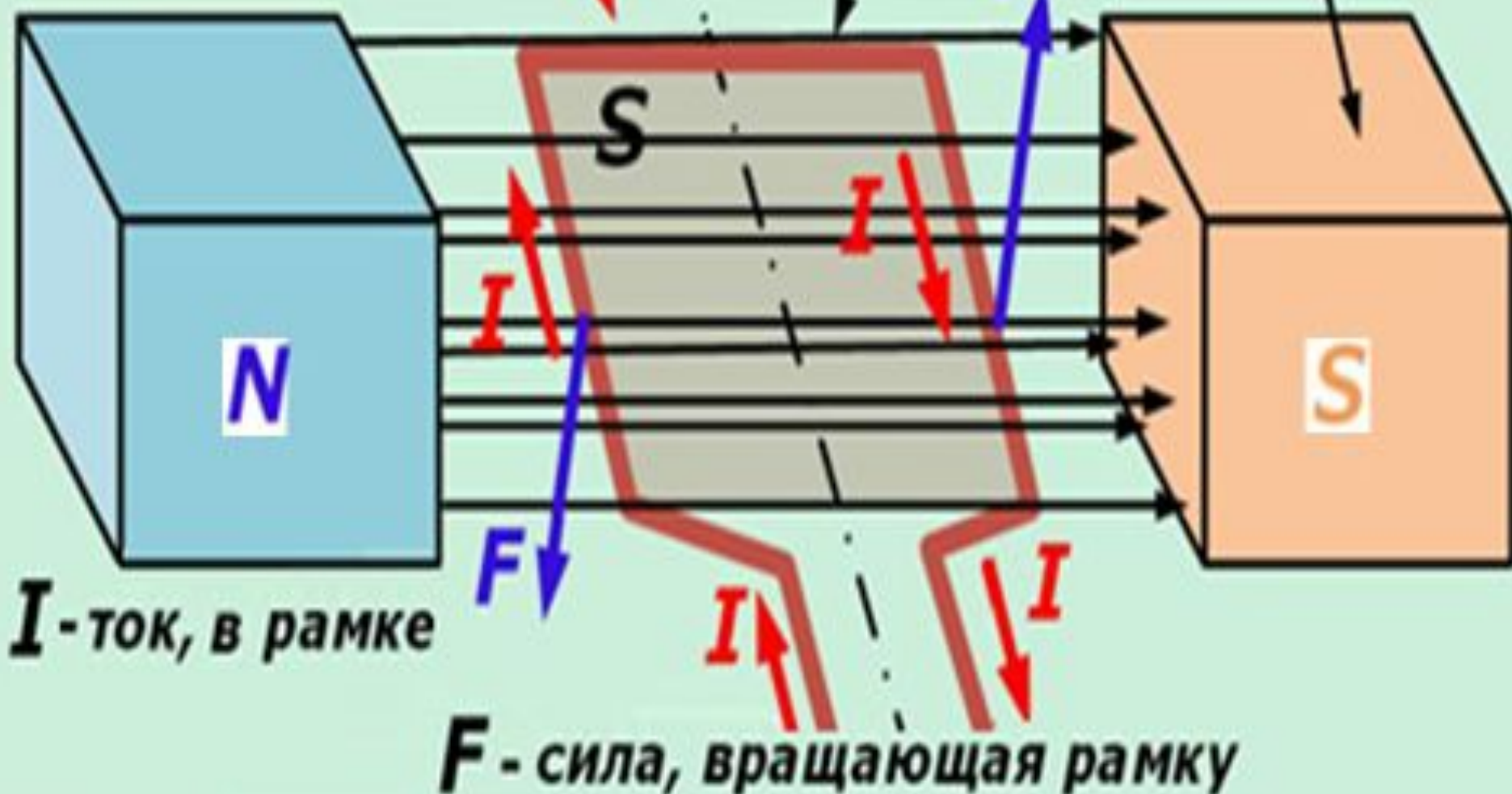
Принцип работы генератора

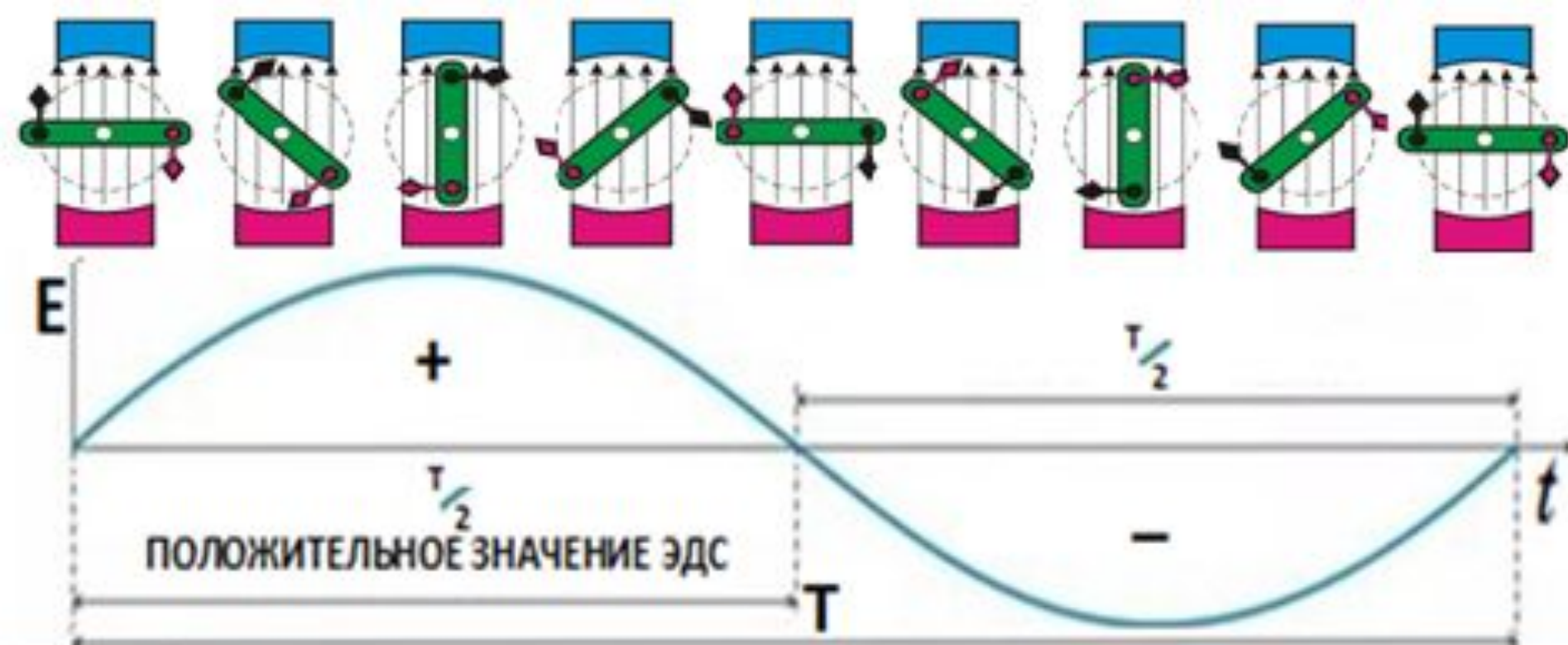
Токопроводящая

Северный полюс
магнита

Южный полюс
магнита

рамка





Электрические колебания в веществе –
электрические токи, изменяющиеся во времени
– *переменные токи*:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Переменный электрический ток

Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося электрического тока.

**Переменный
ток**



Блок преобразования
переменного
тока в постоянный
(ВЫПРЯМИТЕЛЬ)

**Постоянный
ток**

**Переменный
ток**



Блок преобразования
постоянного
тока в переменный
(ИНВЕРТОР)

Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света c .

Пусть l – длина электрической цепи, тогда время распространения сигнала в данной цепи $t = l / c$.

Если $t \ll T$, то такие токи называются *квазистационарными* (T – период колебаний тока).

При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет одинаковым.

Для частоты $f = 50$ Гц квазистационарность выполняется при длине цепи ~ 100 км.

Рассматривая электрические колебания, будем считать, что *токи квазистационарны*.

Сопротивление в цепи переменного тока

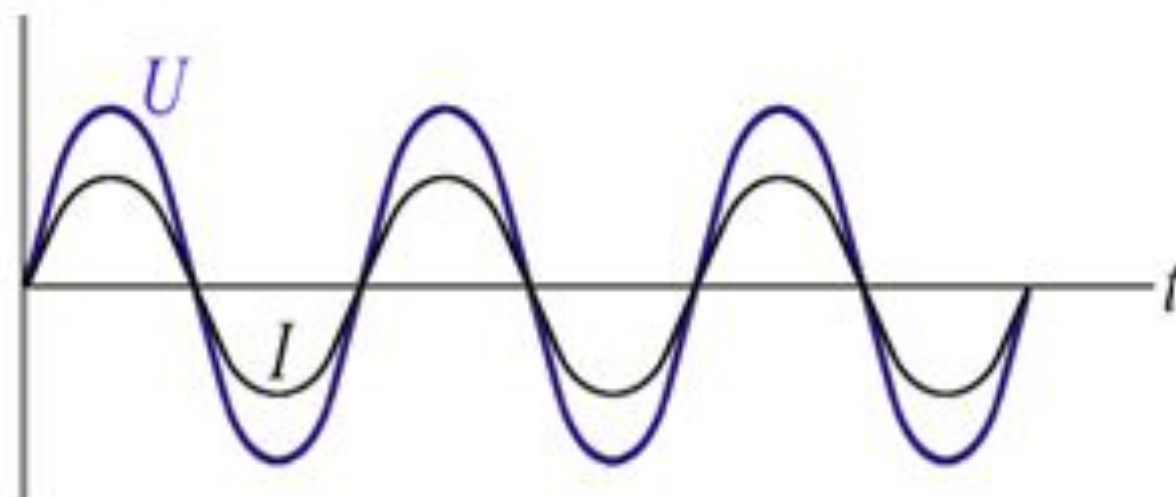


Ток в цепи $I = I_0 \sin \omega t$;

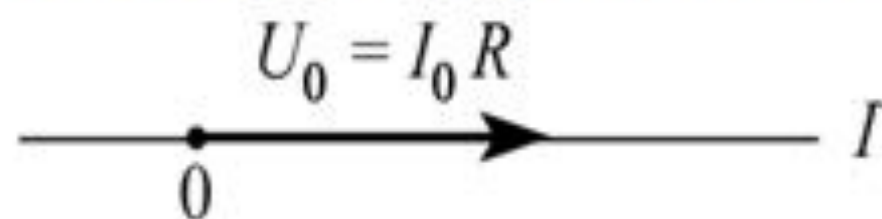
По закону Ома:

$U = IR = I_0 R \sin \omega t$ - напряжение изменяется синфазно с током;

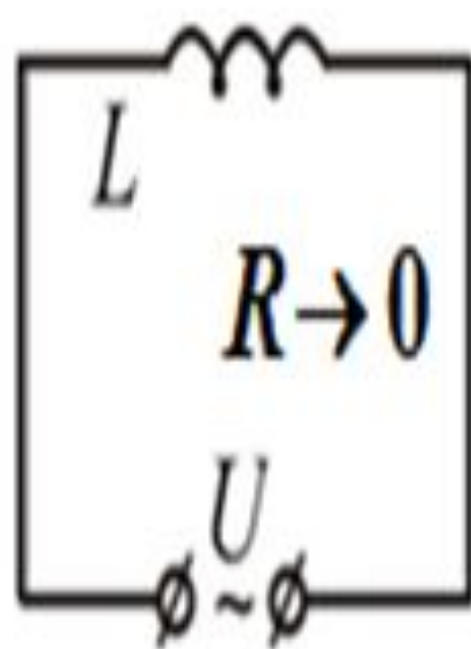
$U_0 = I_0 R$ - амплитуда напряжения.



Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



Индуктивность в цепи переменного тока



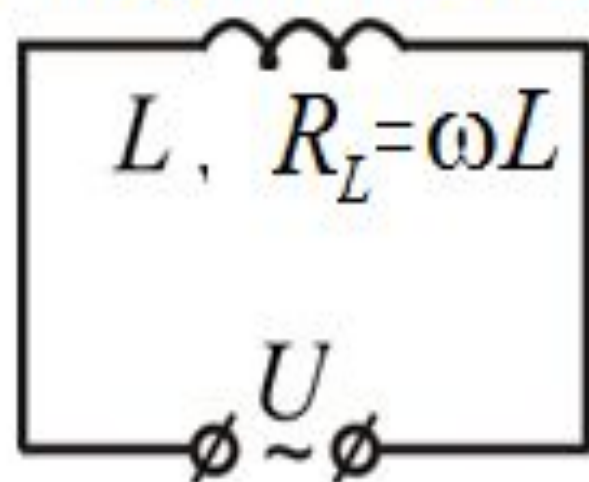
Рассмотрим цепь с $R \rightarrow 0$ при наличии переменного тока в катушке возникает

ЭДС самоиндукции: $\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}$.

По закону Ома для участка цепи с ЭДС:

$$U = IR - \mathcal{E}_c = -\mathcal{E}_c$$

Индуктивность в цепи переменного тока



$$U = L \frac{dI}{dt} = LI_0 \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

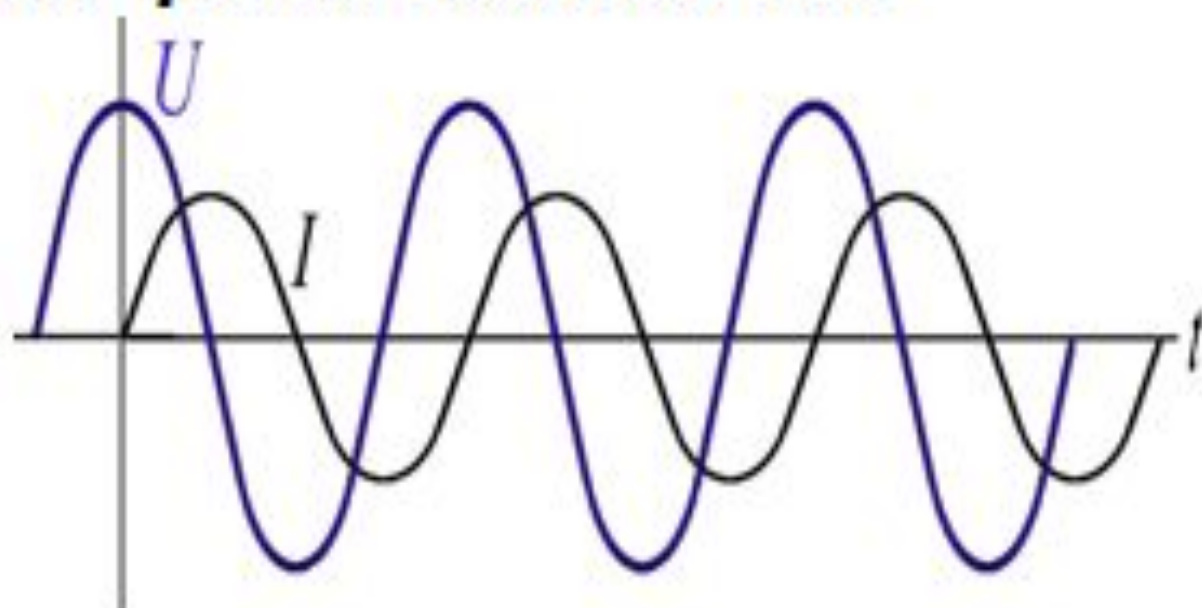
$$U_0 = I_0 \omega L$$

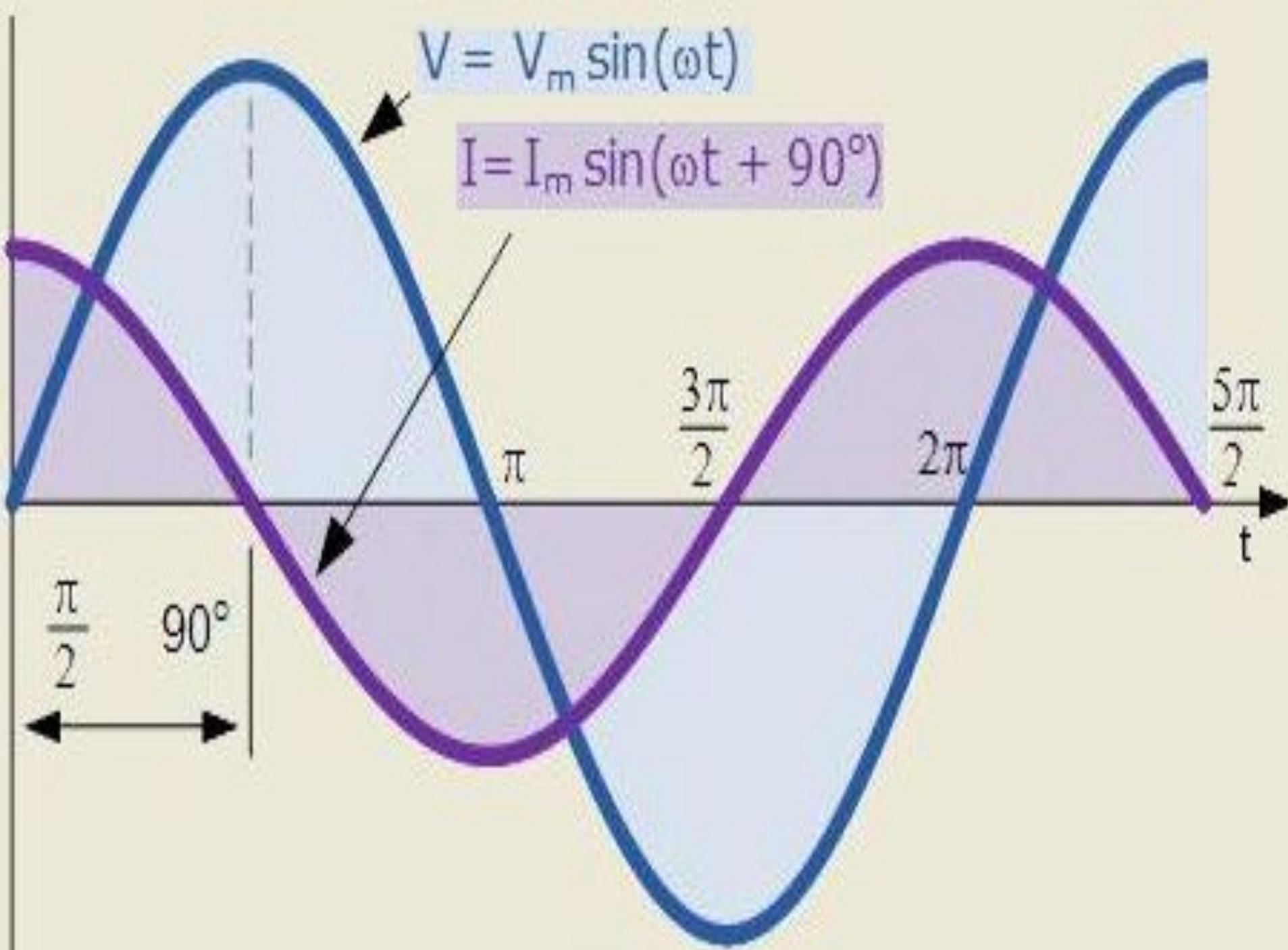
**Напряжение опережает
по фазе ток на $\pi/2$**

$$R_L = \omega L$$

**Кажущееся
сопротивление
индуктивности**

(основа работы
дросселей)





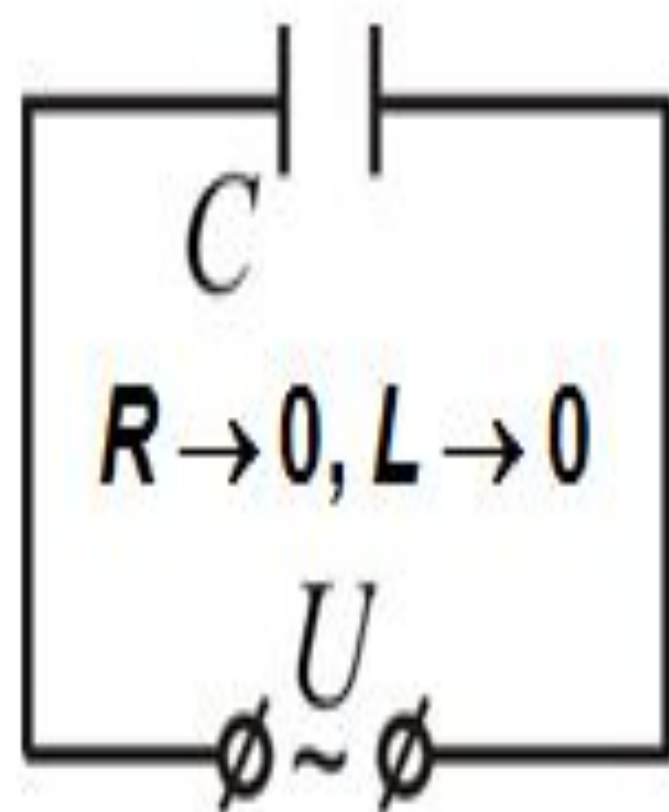
Емкость в цепи переменного тока

Ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t$,

По определению $I = \frac{dq}{dt}$

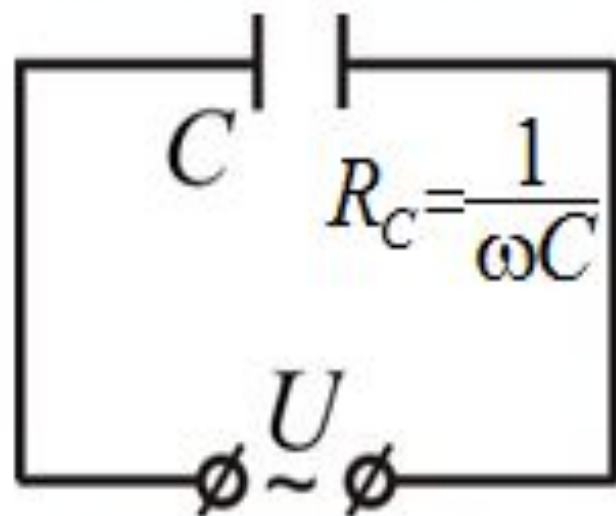
Заряд конденсатора:

$$q = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$$



Емкость в цепи переменного тока

$$R \rightarrow 0, L \rightarrow 0$$



$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

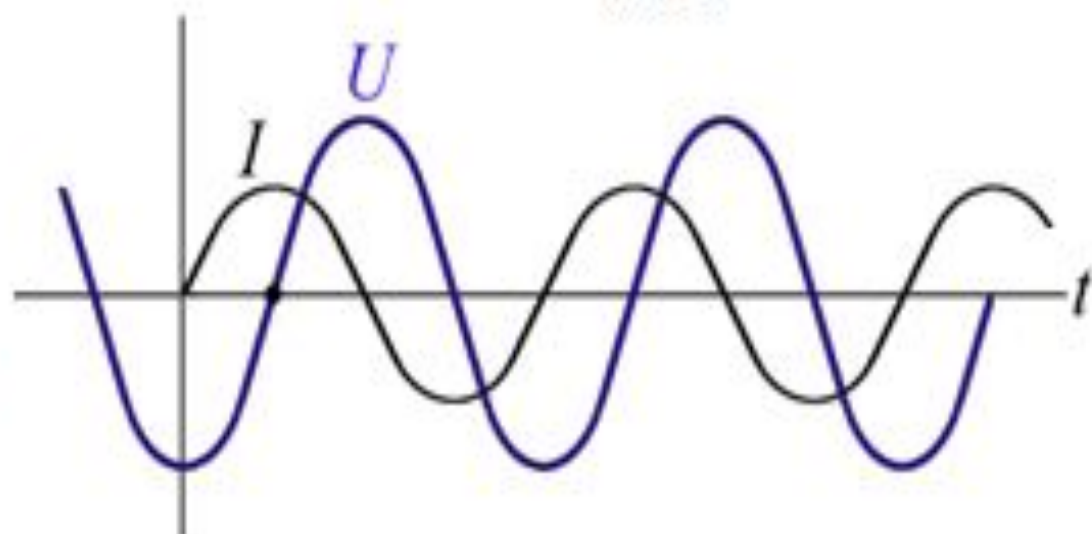
$$q = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$$

$$U = \frac{q}{C} = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

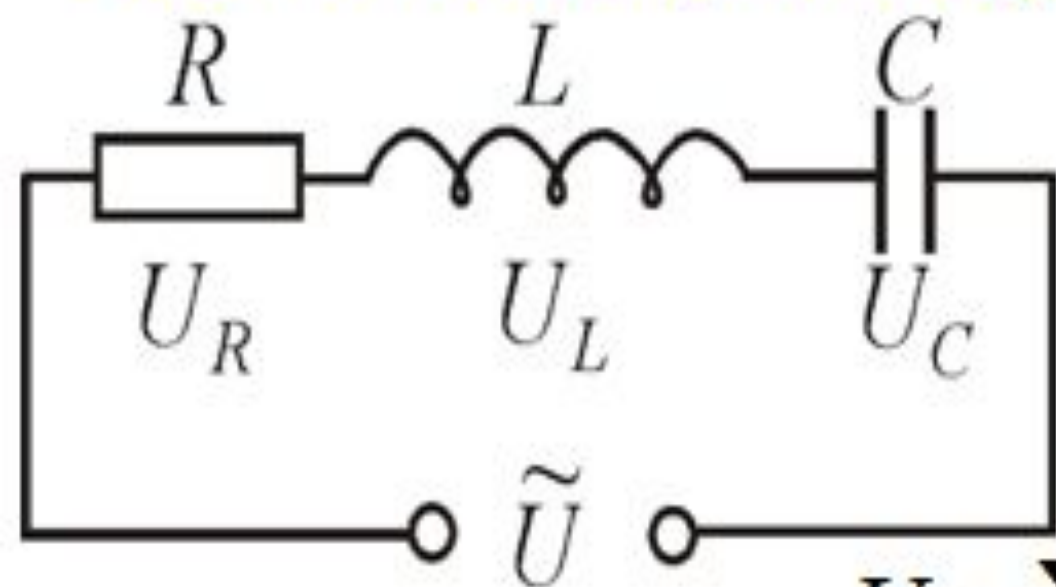
$$U_0 = \frac{I_0}{\omega C}$$

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

**-кажущееся
сопротивление
емкости**



Закон Ома для переменного тока



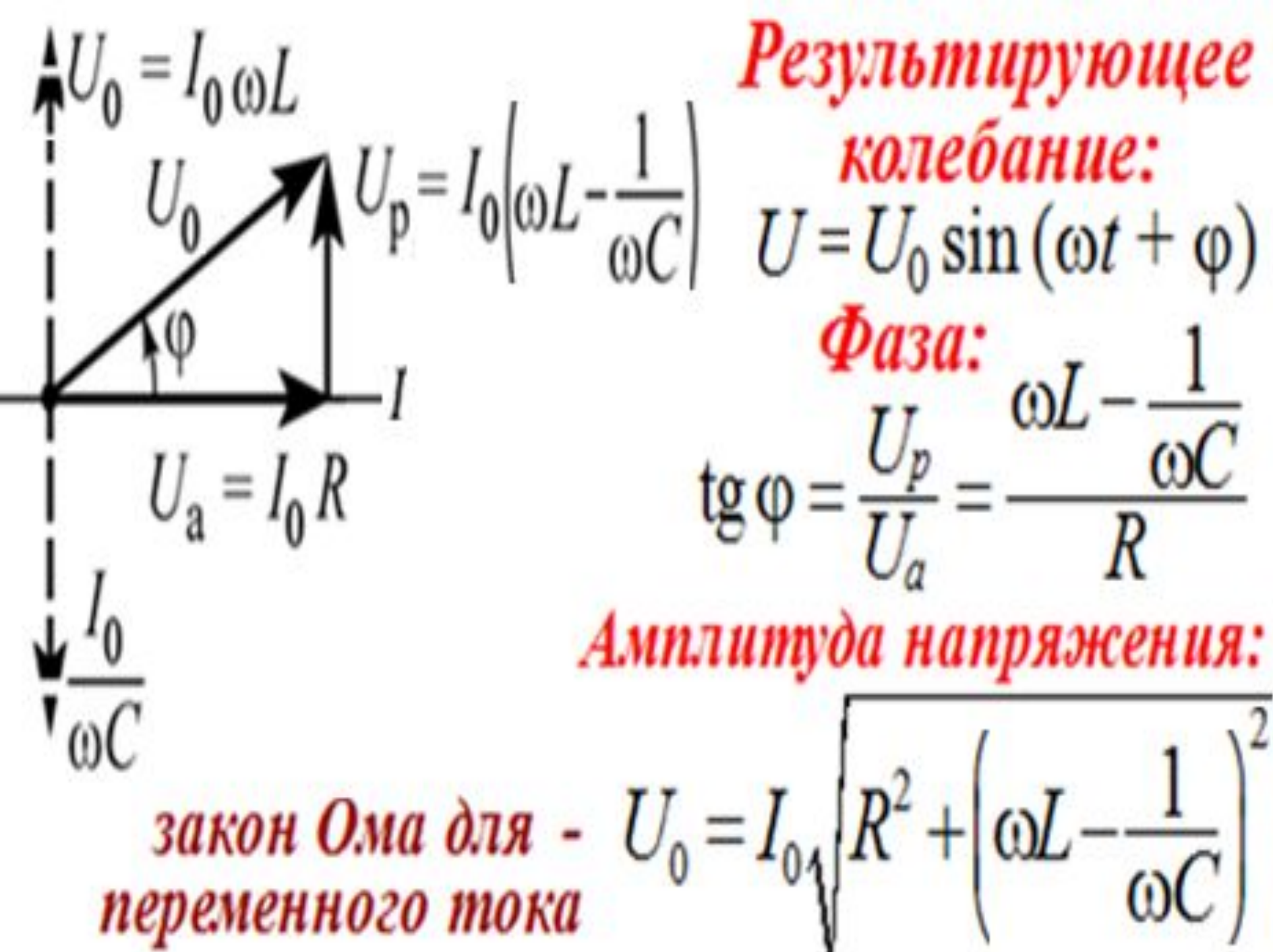
Напряжение при последовательном соединении R, L, C :

$$U = \sum U = U_R + U_C + U_L$$

Сумма

$$U_{0C} + U_{0L} = U_p = I_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \text{ - реактивная составляющая напряжения}$$

$$U_{0R} \equiv U_a = I_0 R \text{ - активная составляющая напряжения}$$



Полное сопротивление цепи:

$$R_{\text{полн}} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

R – активное (омическое) **сопротивление**

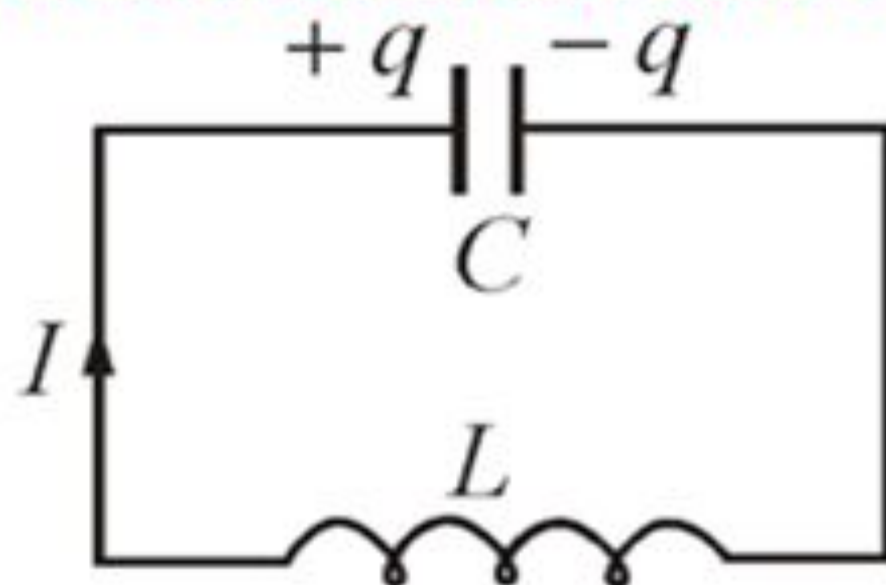
$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ – реактивное сопротивление

R – активное сопротивление отвечает
за потерю мощности в цепи.

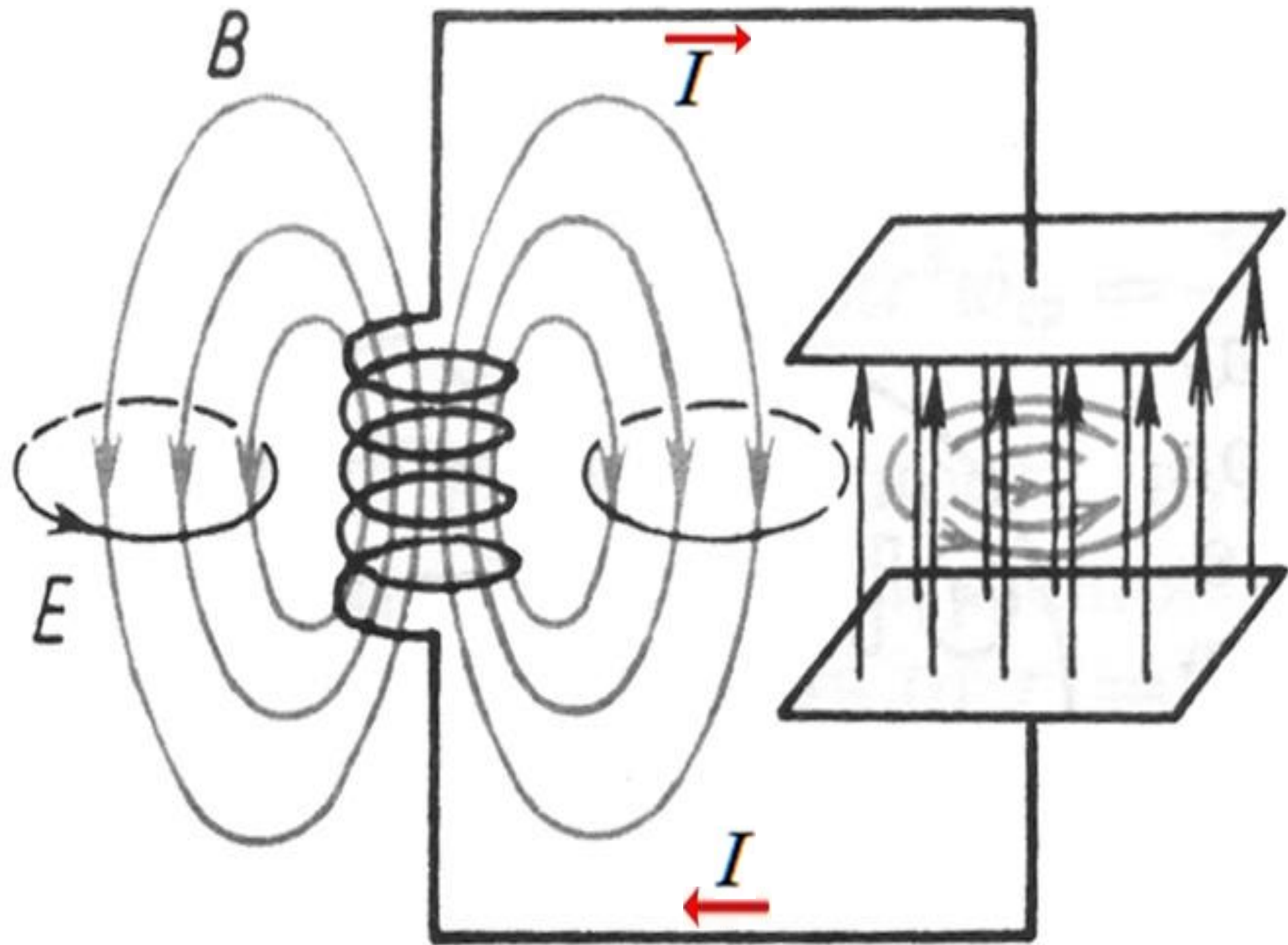
X – реактивное сопротивление,

определяет величину энергии
пульсирующей в цепи с частотой 2ω .

Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления
ЦЕПЬ, СОДЕРЖАЩАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ
И ЁМКОСТЬ НАЗЫВАЕТСЯ
КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ КОНТУРОМ.



КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ МОЖНО ВЫЗВАТЬ
ЗАРЯДИВ КОНДЕНСАТОР ИЛИ ВЫЗВАВ В
ИНДУКТИВНОСТИ ТОК. Т.К. $R=0$, ТО ПОЛНАЯ
ЭНЕРГИЯ КОНТУРА $E=CONST$.



Свободные колебания в контуре

закон Ома для 1-3-2

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, R = 0, \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C},$$

$$\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\text{Отсюда, } L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

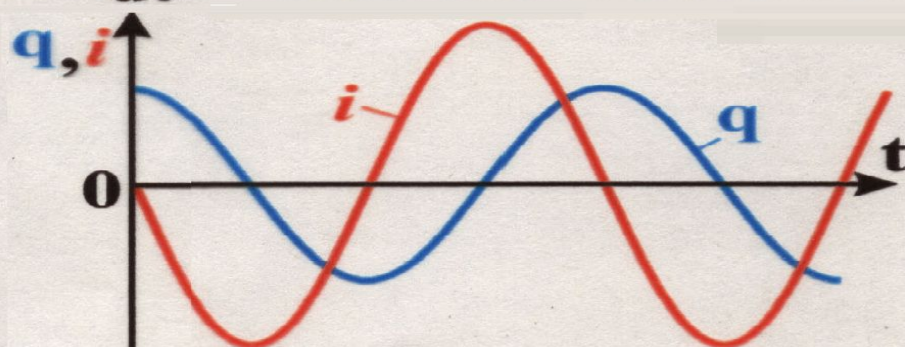
Формула Томсона

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

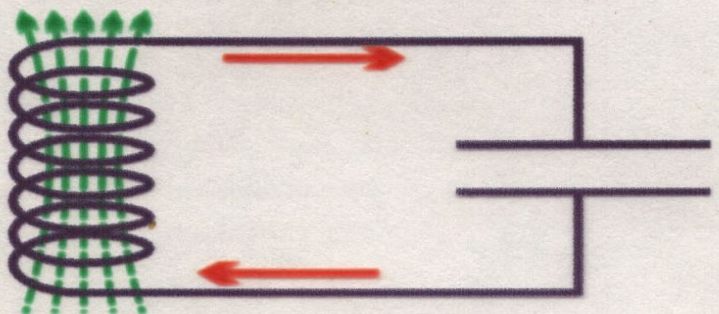
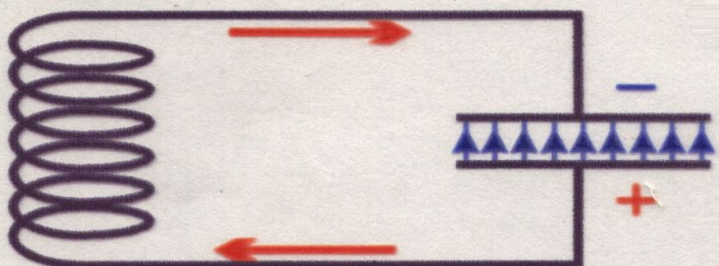
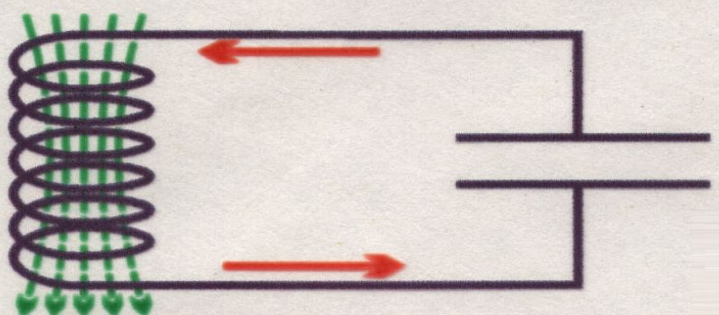
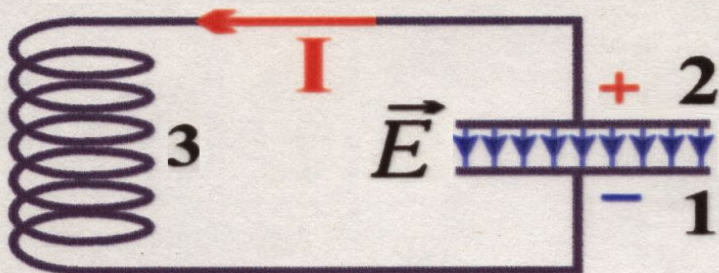
Решение дифференциального уравнения

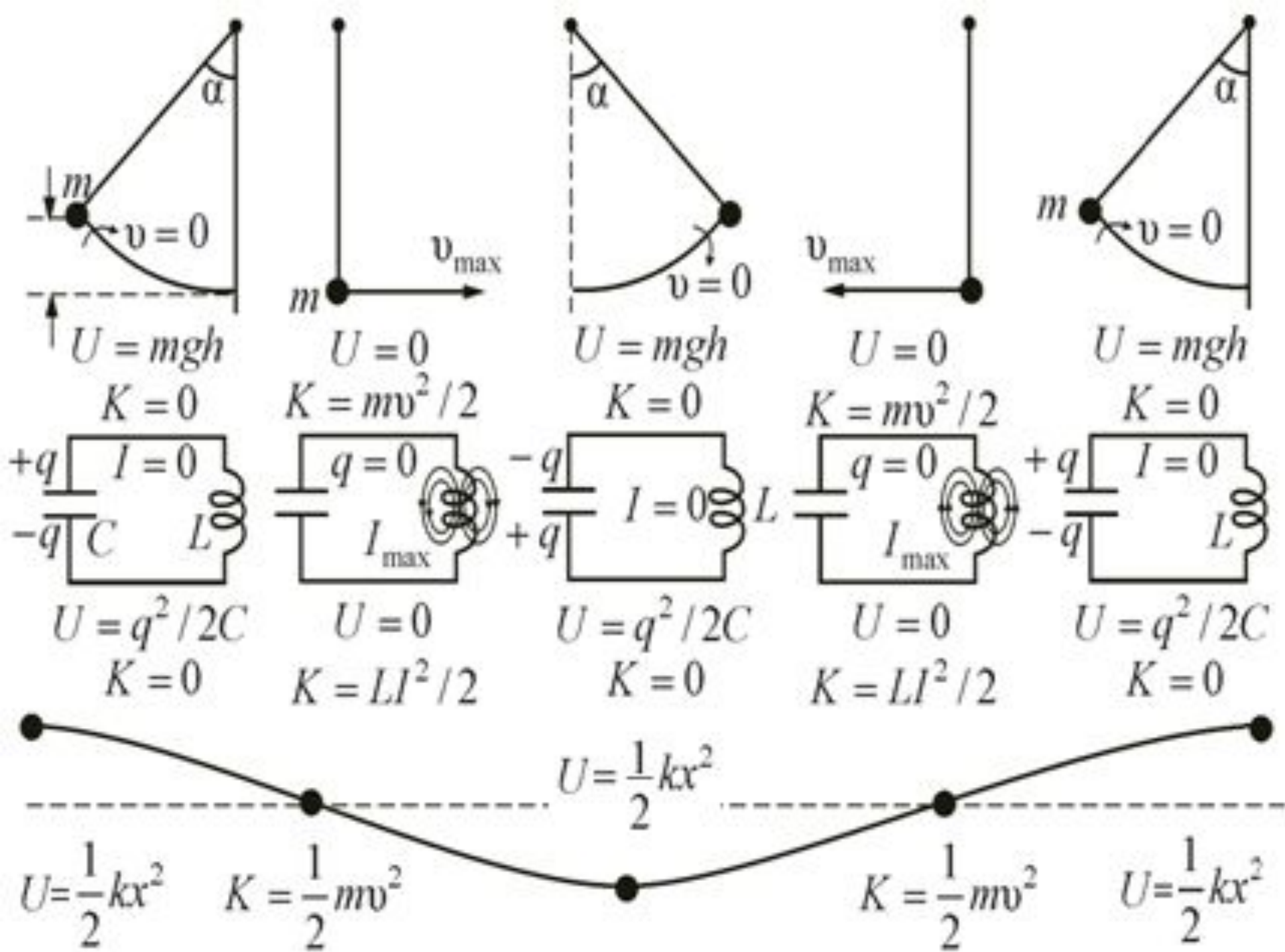
$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

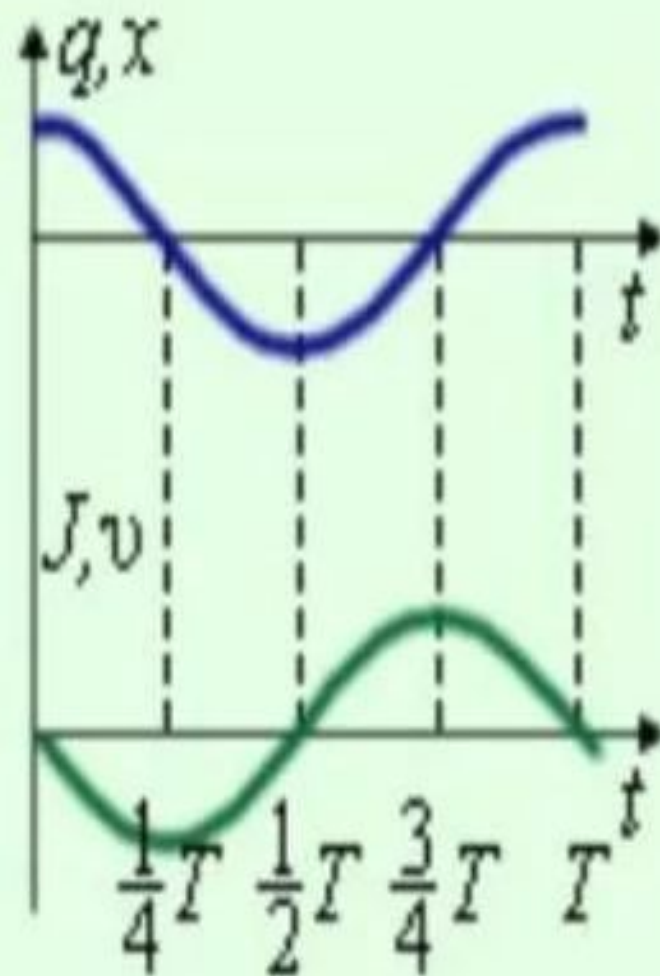
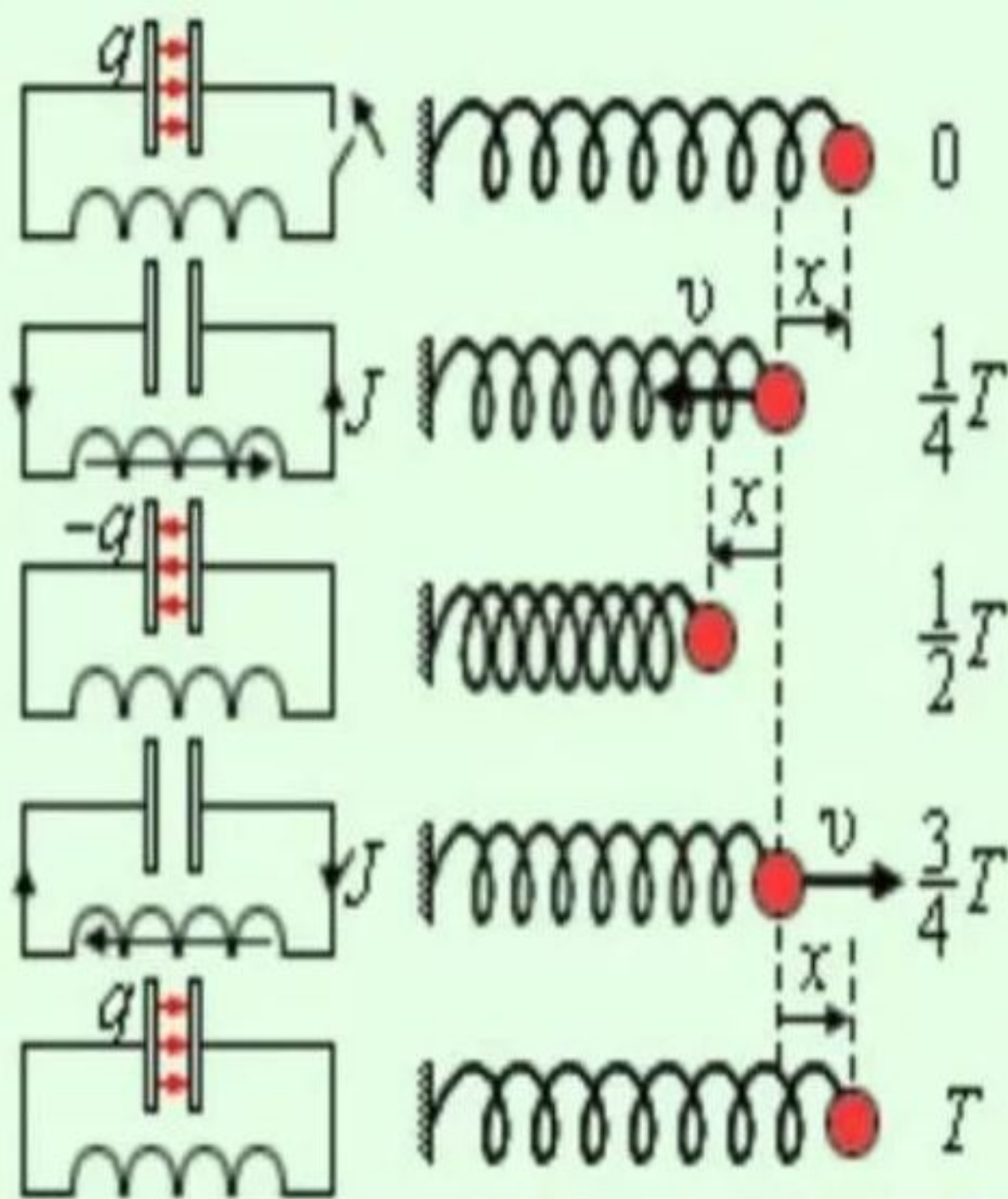
$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



Колебания заряда и тока.







ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

**Если энергия конденсатора
(потенциальная энергия)**

равна нулю,

**то энергия магнитного поля
(кинетическая) максимальна
и наоборот...**

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что:

*энергия электрического поля
аналогична потенциальной
энергии упругой деформации*

$$U = \frac{q^2}{2C};$$

*энергия магнитного поля
аналогична кинетической энергии;*

Индуктивность L играет роль массы m ;

$1/C$ – роль коэффициента жесткости k ;

Заряду q соответствует смещение маятника x ;

Силе тока $I \sim$ скорость v ;

Напряжению $U \sim$ ускорение a .

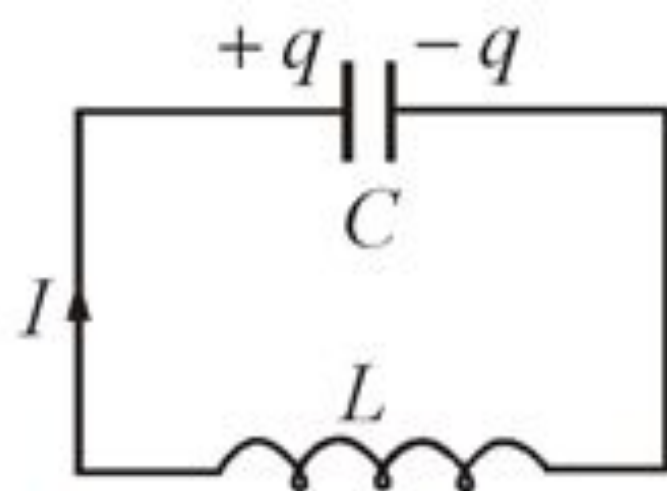
В соответствии с законом Кирхгофа и законом сохранения энергии $\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}$

$$R=0, I=\frac{dq}{dt}, \mathcal{E}=-L \frac{dI}{dt}, \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Вновь получили *дифференциальное уравнение второго порядка*:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \begin{array}{l} \text{Собственная} \\ \text{частота} \\ \text{контура} \end{array}$$

Решение уравнения - гармоническая функция: $q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$



$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора **изменяется** по гармоническому закону с частотой ω_0 – **собственная частота контура**. **Период** колебаний определяется по **формуле Томсона**:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Напряжение на конденсаторе $- U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \left| \quad \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ — волновое сопротивление. [ОМ].} \right.$$

Закон Ома для контура

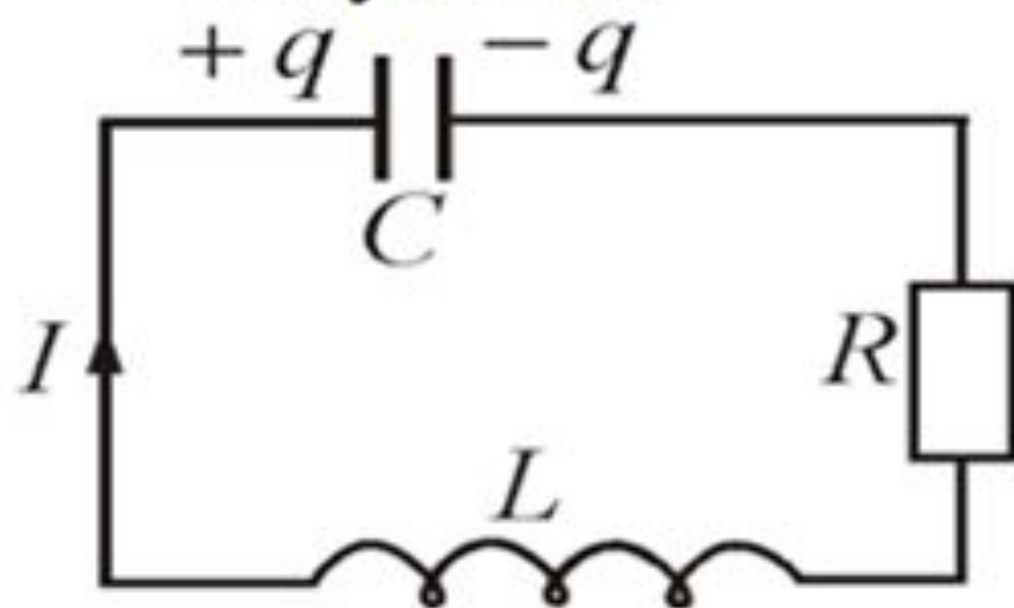
Ток в цепи: $I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$$I_m = \omega_0 q_m \text{ — Амплитуда тока}$$

На емкости ток опережает напряжение на $\pi/2$. На индуктивности наоборот напряжение опережает ток на $\pi/2$.

Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает *активным сопротивлением r* . Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.



По второму закону Кирхгофа $IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Уравнение свободных
затухающих колебаний
в контуре R, L и C

решение этого уравнения имеет вид:

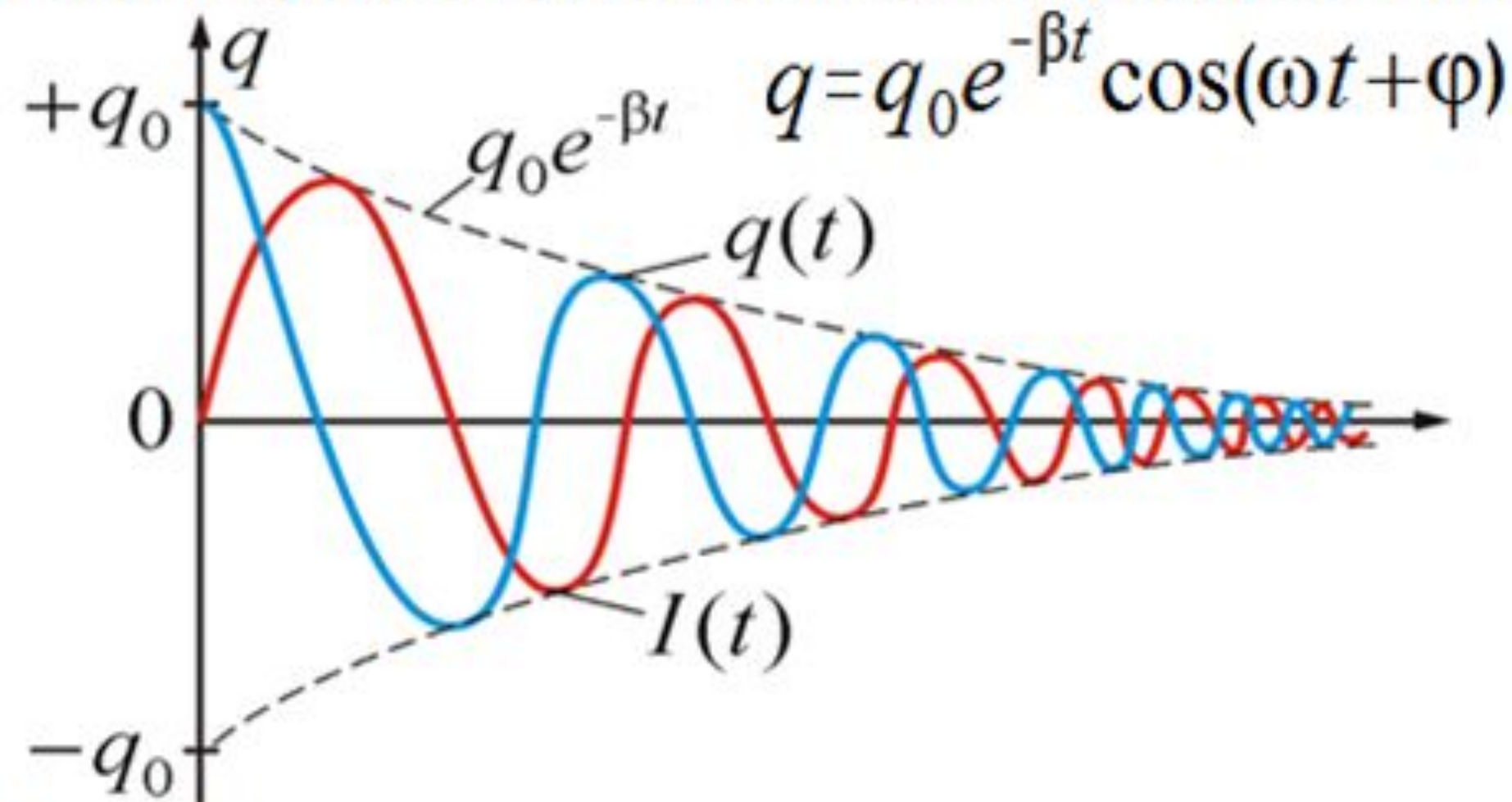
$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$\beta = R/2L$, - коэффициент затухания

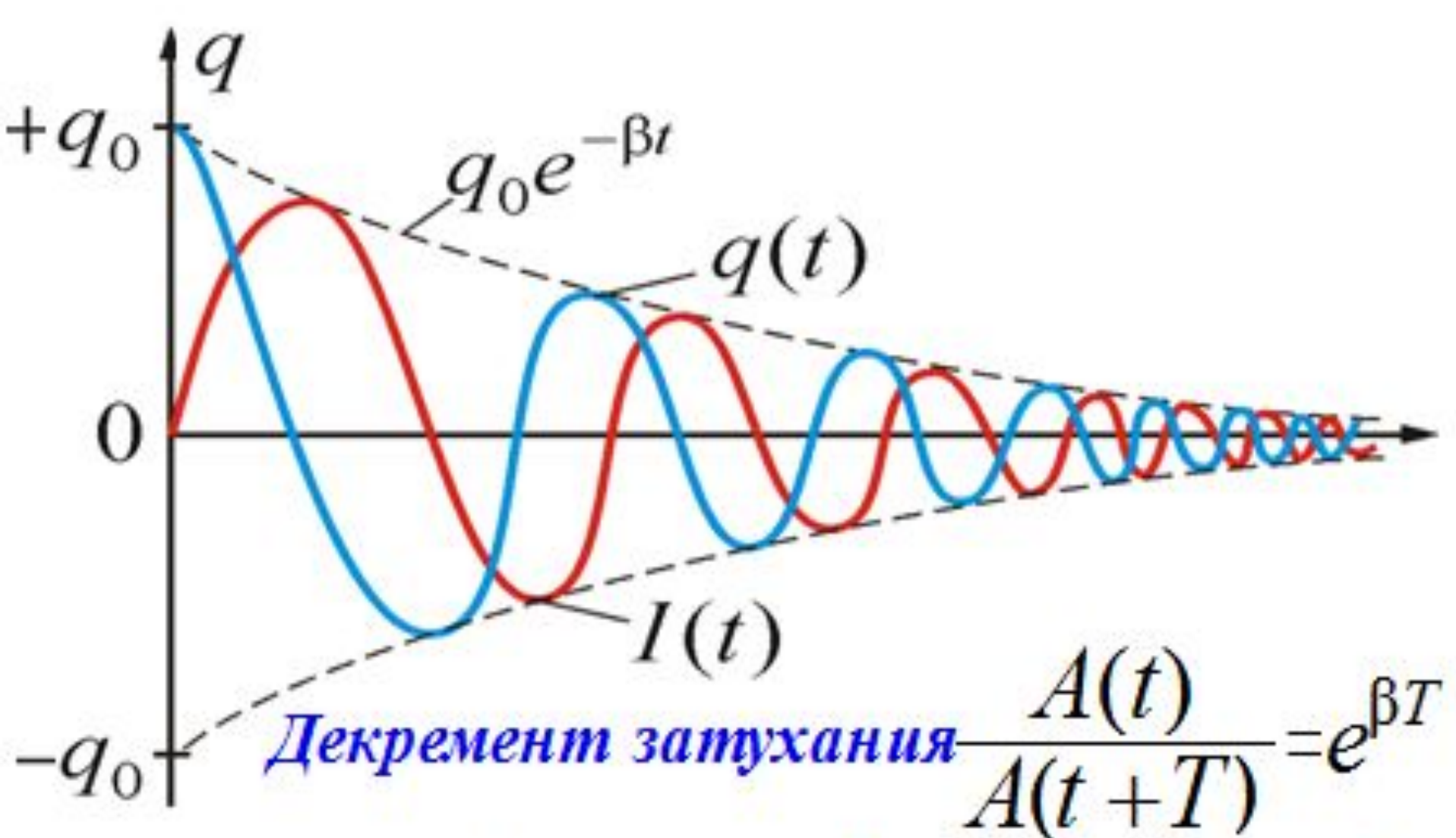
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота контура

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ или $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ Частота
затухающих
колебаний

Вид затухающих колебаний заряда q и тока I :



Колебаниям q соответствует x -смещение маятника из положения равновесия, силе тока I – скорость v .



$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

Логарифмический
декремент
затухания

$\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания

Период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\text{Тогда } \chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega};$$

R, L, ω – определяются параметрами контура, следовательно, и χ является характеристикой контура.

Если затухание невелико $\beta^2 \ll \omega_0^2$,

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \chi = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Добротность колебательного контура Q

определяется как величина обратно пропорциональная χ . **Чем меньше затухание, тем выше добротность.**

$$Q = \frac{\pi}{\chi}$$

$\tau = \frac{1}{\beta}$ **Время затухания** - время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз

$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$ **Число колебаний** совершаемых за время затухания

$$\chi = \frac{1}{N_e}, \text{ то } Q = \pi N_e$$

$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$ - W - энергия контура в данный момент, ΔW - убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

При $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т.е. при $R^2 / 4L^2 \geq 1 / LC$ ($T \rightarrow \infty$):



Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется критическим сопротивлением:

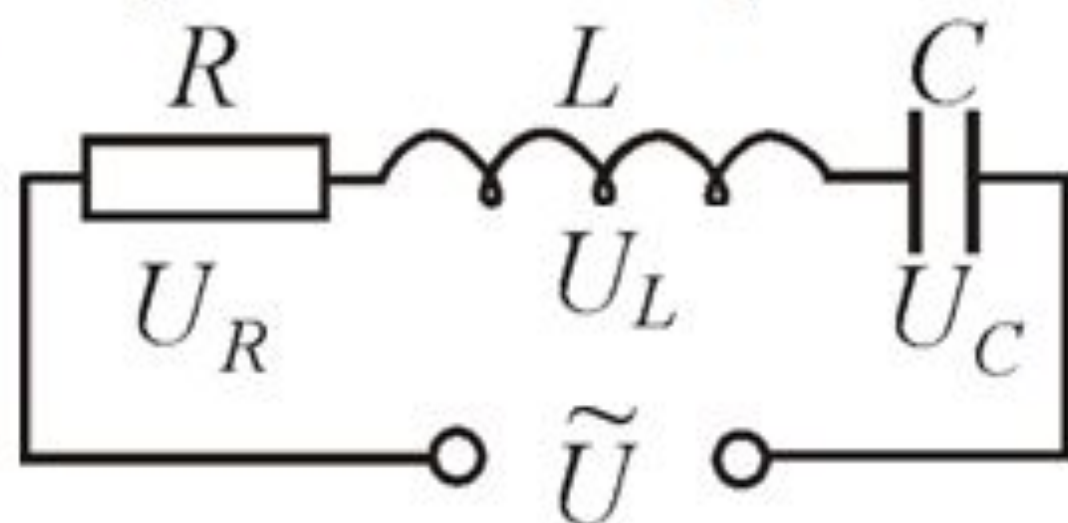
$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}, R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{волн}}$$

Критическое сопротивление

ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

К контуру подано переменное напряжение:

$$U = U_m \cos \omega t.$$



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

уравнение вынужденных электрических колебаний совпадает с вынужденными механическими колебаниями.

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний. *Решение* уравнения при больших t :

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Здесь амплитуда колебаний заряда:

$$\begin{aligned} q_m &= U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \\ &= U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \end{aligned}$$

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ называется **полным сопротивлением цепи (импеданс)**,

а величина

$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — **реактивным сопротивлением.**

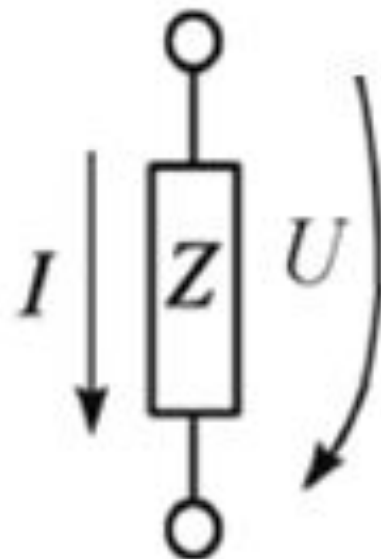
R — активное сопротивление

отвечает за потерю
мощности в цепи.

X — реактивное сопротивление,

определяет величину энергии
пульсирующей в цепи
с частотой 2ω .

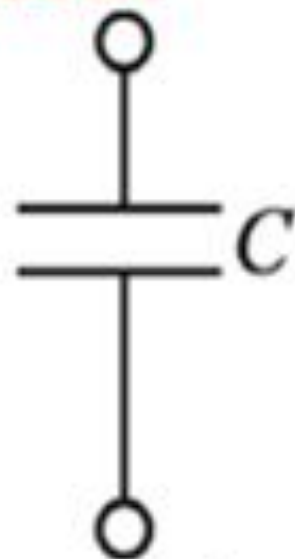
**элементы цепи и соответствующие им
импедансы:**



$$U = IZ$$



$$Z_L = i\omega L$$



$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$



$$Z_R = R$$

Импеданс соединений:

$$Z = \sum_k Z_k - \text{последовательного}$$

$$\frac{1}{Z} = \sum_k \frac{1}{Z_k} - \text{параллельного}$$

**Закон Ома в
комплексной форме**

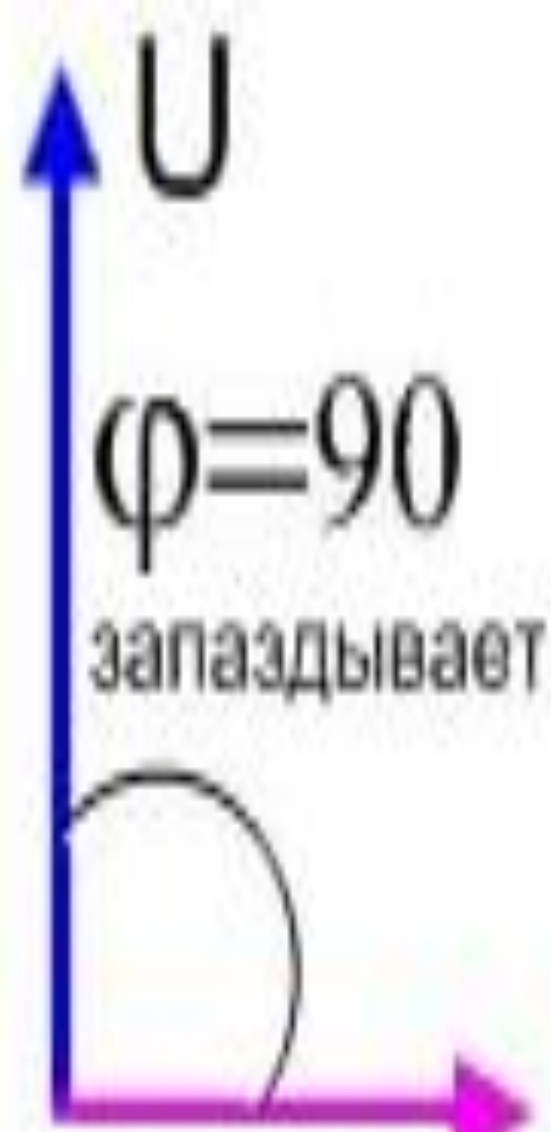
$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{\mathcal{E}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Полное сопротивление

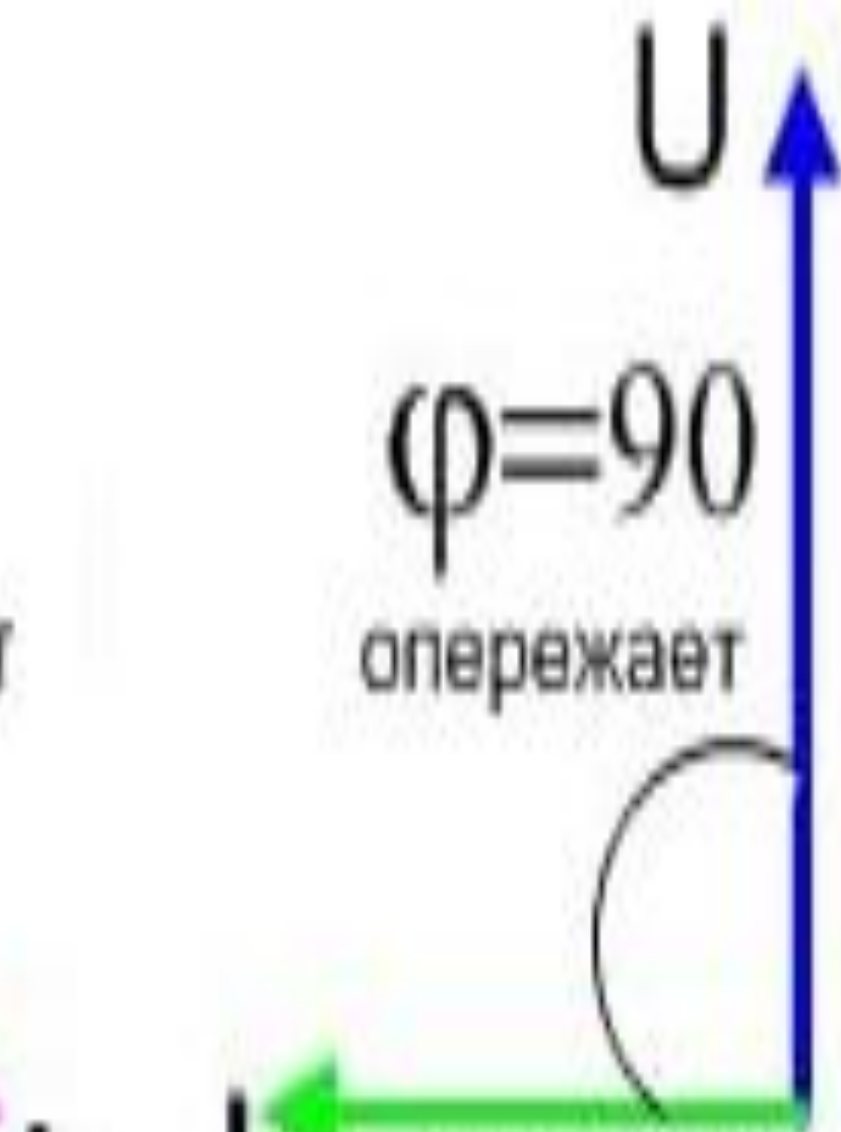
$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \\ = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$



Активная
нагрузка



Индуктивная
нагрузка



Емкостная
нагрузка

U

I_r

Ток отстает от
напряжения

Ток опережает
напряжение

I_c

90°

90°

I_L

U

напряжение

I_r

активный ток

U

I_r

I_L

I_c

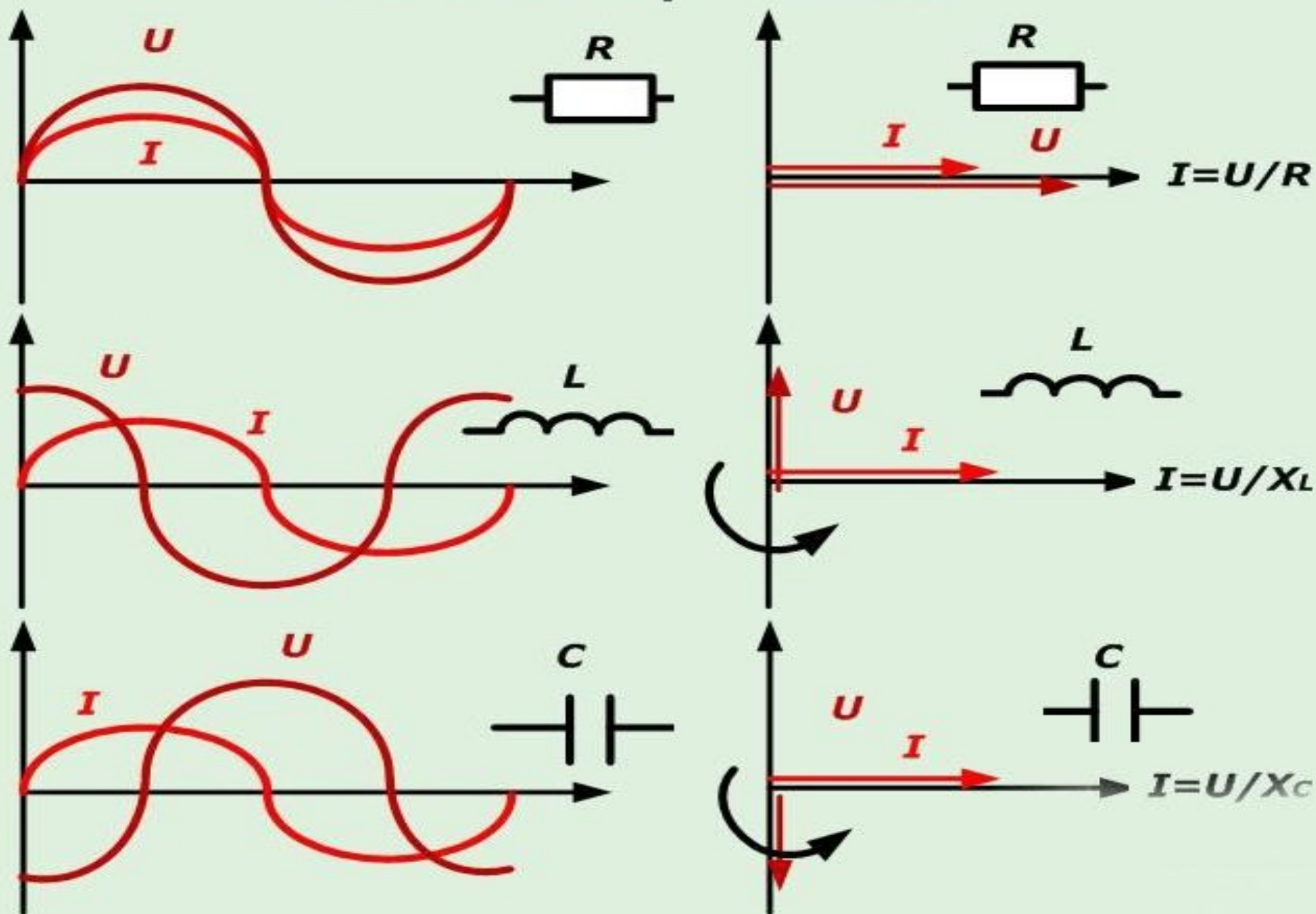
I_c

реактивный ток (емкостной)

I_L

реактивный ток (индуктивный)

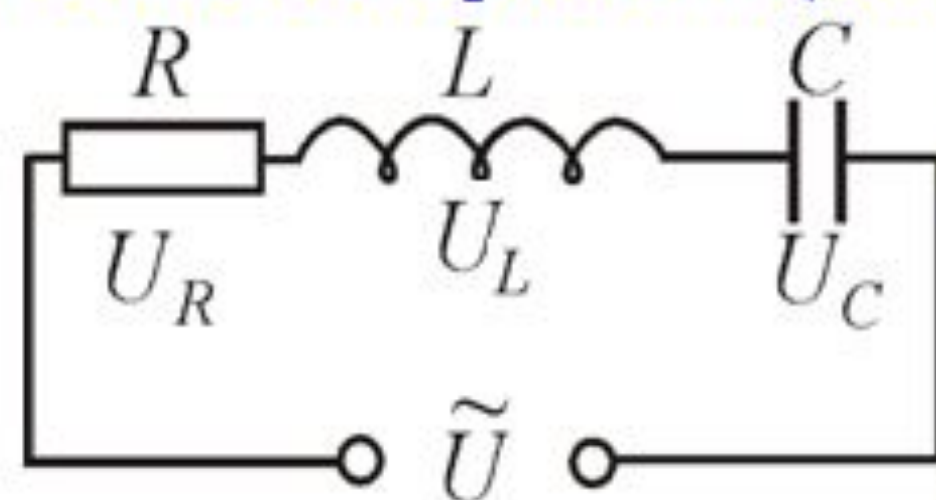
Электрические соотношения между током и напряжением



Резонанс в электрической цепи.

Резонанс в электрической цепи – явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний тока при приближении частоты внешнего напряжения (эдс) и собственной частоты колебательного контура.

Резонанс напряжений (последовательный резонанс)



При последовательном соединении R , L , C , при

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

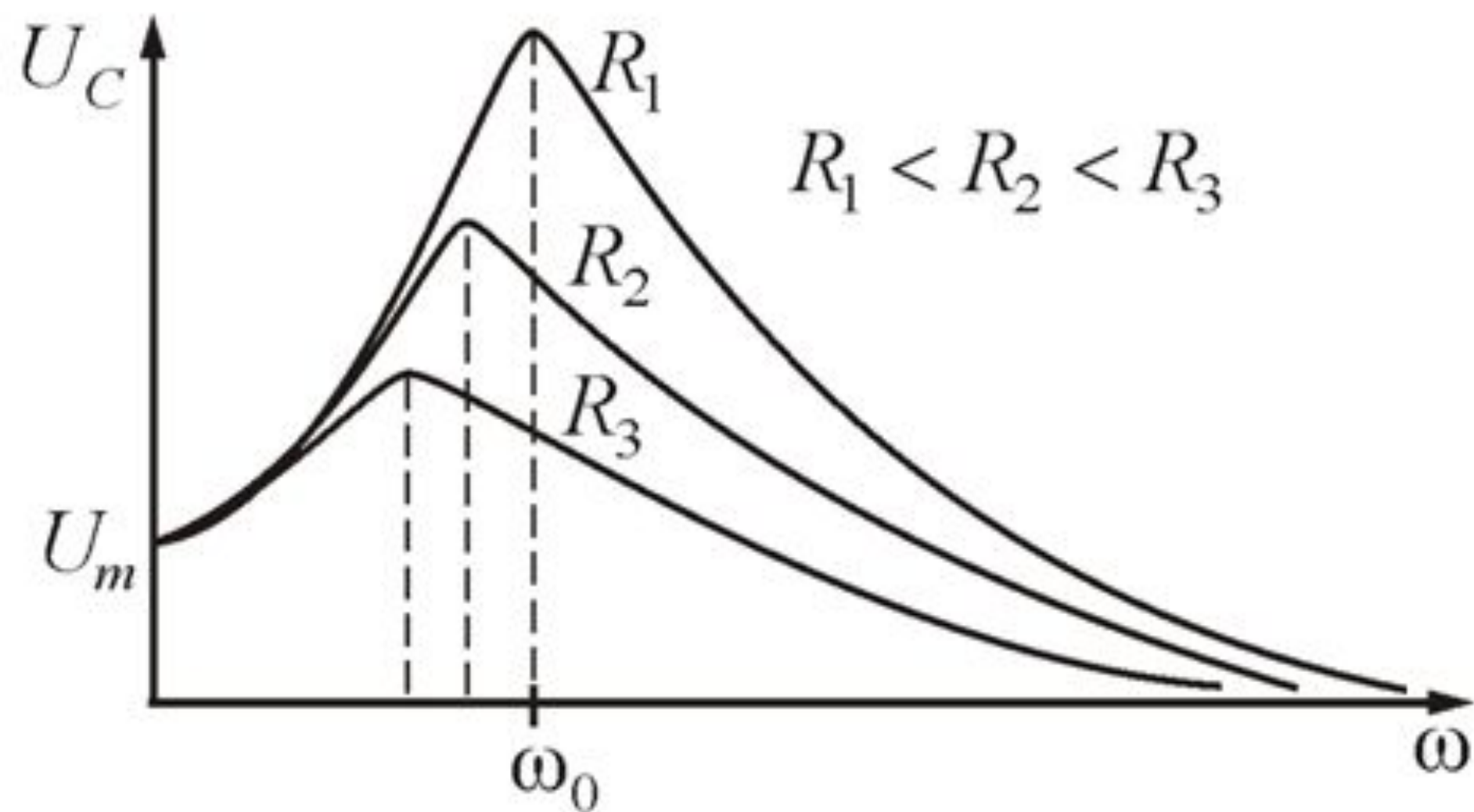
—наблюдается **резонанс**.

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

При этом угол φ сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ($\varphi = 0$)

$$\text{и } Z = R$$

Тогда $U = U_R$, а U_C и U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется **резонансом напряжения** или **последовательным резонансом**.



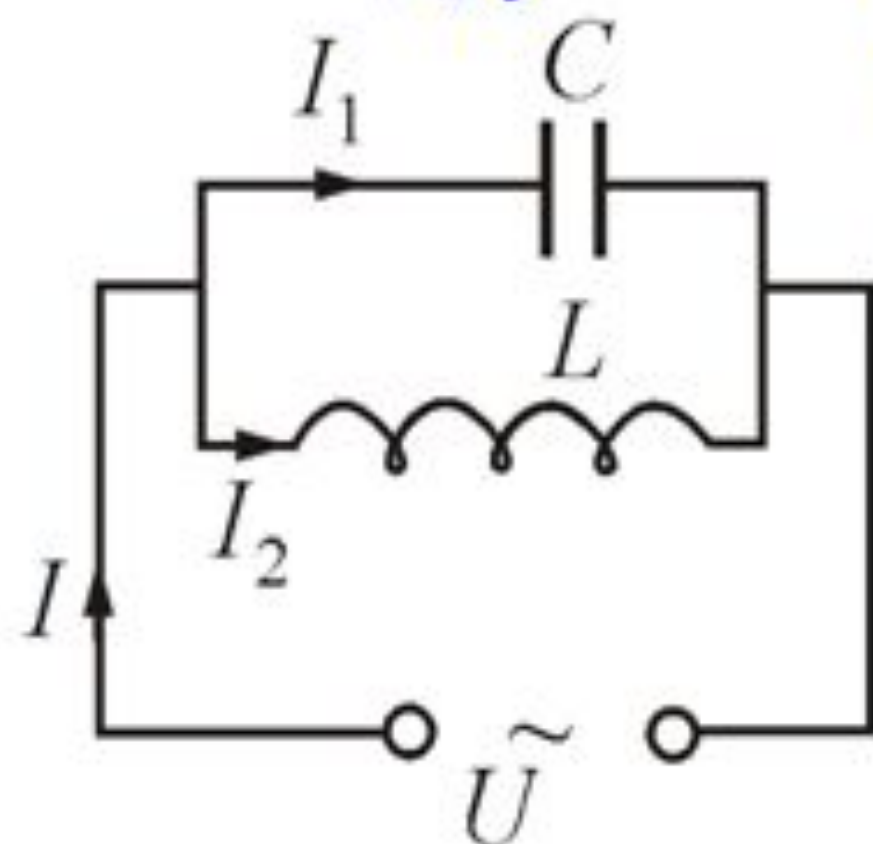
$$U_{L_{\text{рез}}} = U_{C_{\text{рез}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = Q U_m$$

Таким образом, *при последовательном резонансе*, на ёмкости можно получить напряжение с амплитудой $QU \gg U$ в узком диапазоне частот.

Этот эффект *широко используется в различных усилительных устройствах.*

Резонансом токов (параллельный резонанс).

В цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность, наблюдается другой тип резонанса:



$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1),$$

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2).$$

$$\omega \rightarrow \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi,$$

$$I_m \rightarrow 0, I_{mL} \rightarrow \infty.$$

При $R = 0, L = 0$: $I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1)$

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C} \quad \text{тг } \varphi_1 = -\infty, \text{ т.к. } \varphi_1 = (2n + 3/2)\pi, \\ \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично, при $R = 0, C = \infty$:

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2)$$

$$I_{m2} = U/\omega L \quad \text{тг } \varphi_2 = +\infty, \\ \text{т.е. } \varphi_2 = (2n + 1/2)\pi, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$$

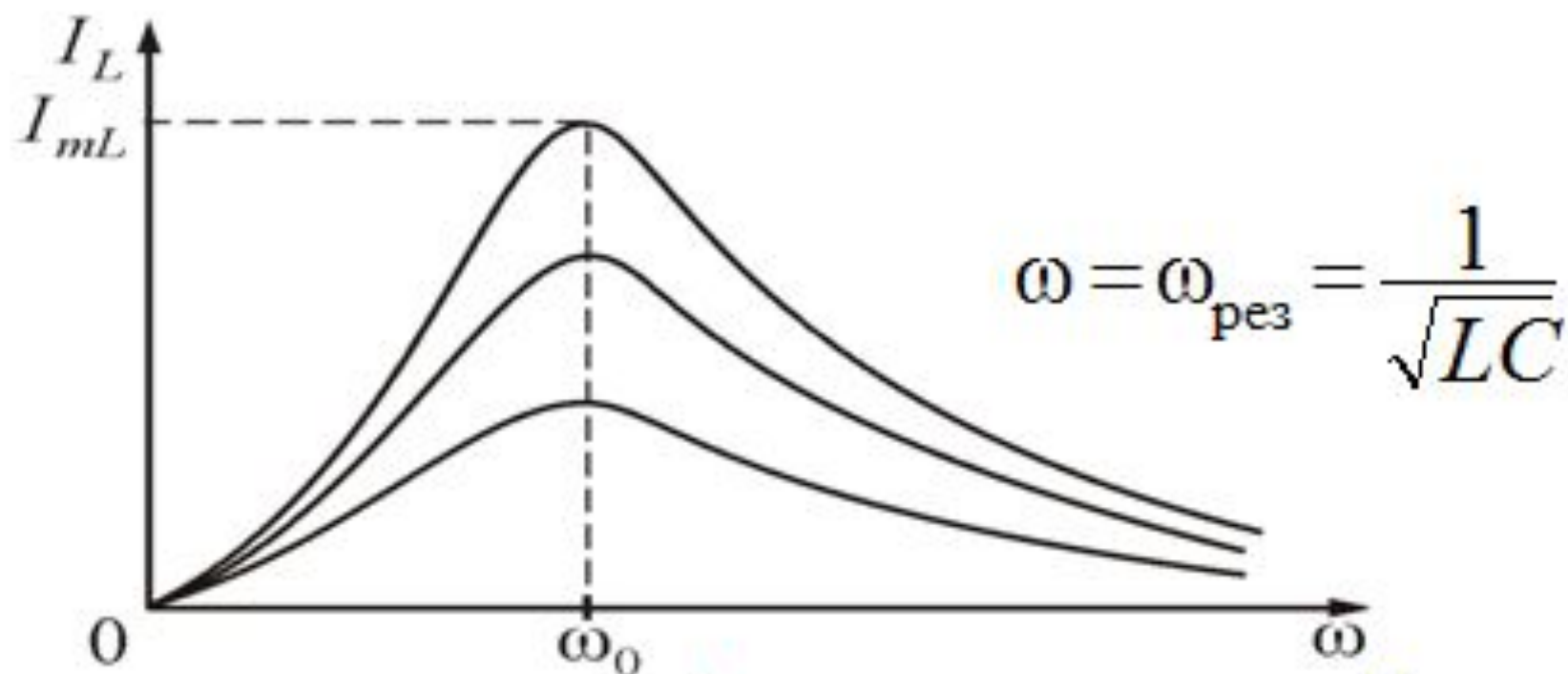
Разность фаз в ветвях цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$,
т.е. токи на индуктивности и емкости,
противоположны по фазе

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ и

$I_m \rightarrow 0$ Ёмкость конденсатора

можно подобрать так, что *в результате резонанса ток в подводящих цепях резко уменьшается, зато ток через индуктивность возрастет*



Уменьшение **амплитуды тока во внешней цепи**
и **резкое** увеличение **тока в катушке**

индуктивности, при приближении частоты

напряжения ω к $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом токов**,

или параллельным резонансом. (Используется в

резонансных усилителях, приемниках, а также в

индукционных печах для разогрева металла).

Работа и мощность переменного тока

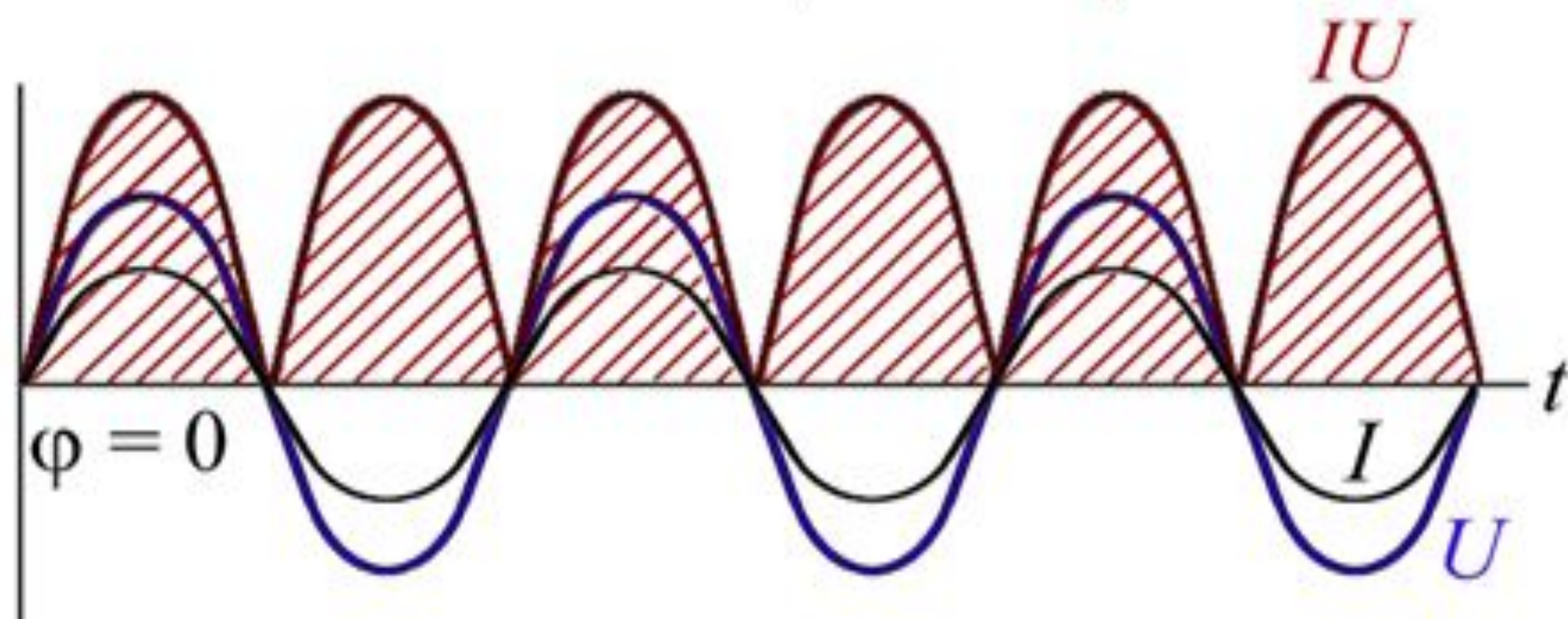
При наличии только активного сопротивления:

(вся работа переходит в тепло):

Напряжение на концах участка цепи: $U = U_0 \sin \omega t$

Переменный ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t$

Мгновенное значение мощности: $P_t = IU = I_0 U_0 \sin^2 \omega t$



Работа переменного тока за dt :

$$A = P_t dt = I_m U_m \sin^2 \omega t dt$$

Работа переменного тока за период T :

$$A = \frac{1}{2} I_m U_m T$$

Средняя мощность $\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m$ или

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2$$

**Действующие (или эффективные)
значения тока и напряжения:**

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

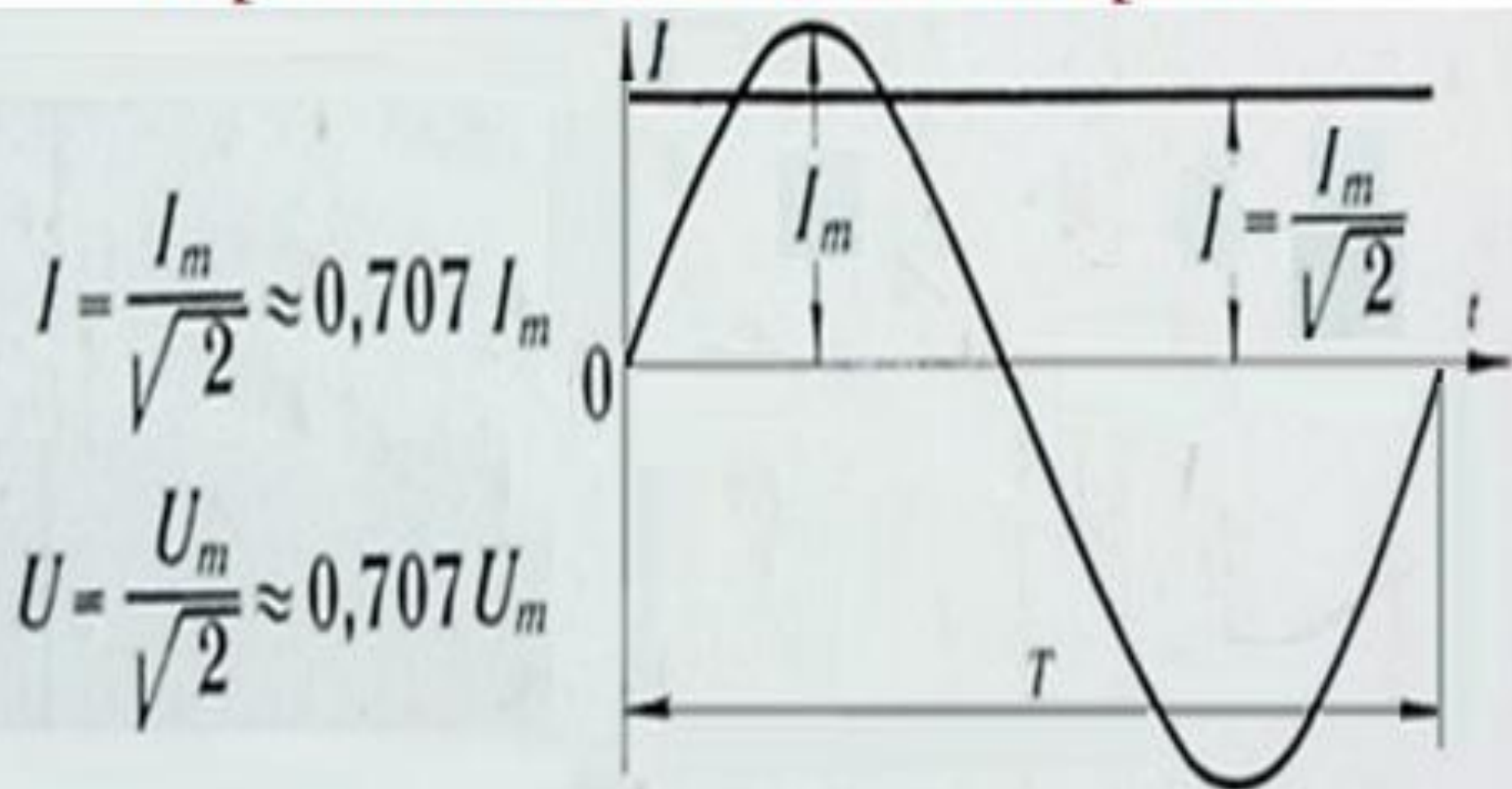
Действующие значения I и U

Мгновенным и амплитудным значениями тока и напряжения на практике пользоваться неудобно. Амперметры и вольтметры в цепи переменного тока измеряют так называемые действующие или эффективные значения переменного тока, которые связаны с амплитудными значениями тока по формулам:

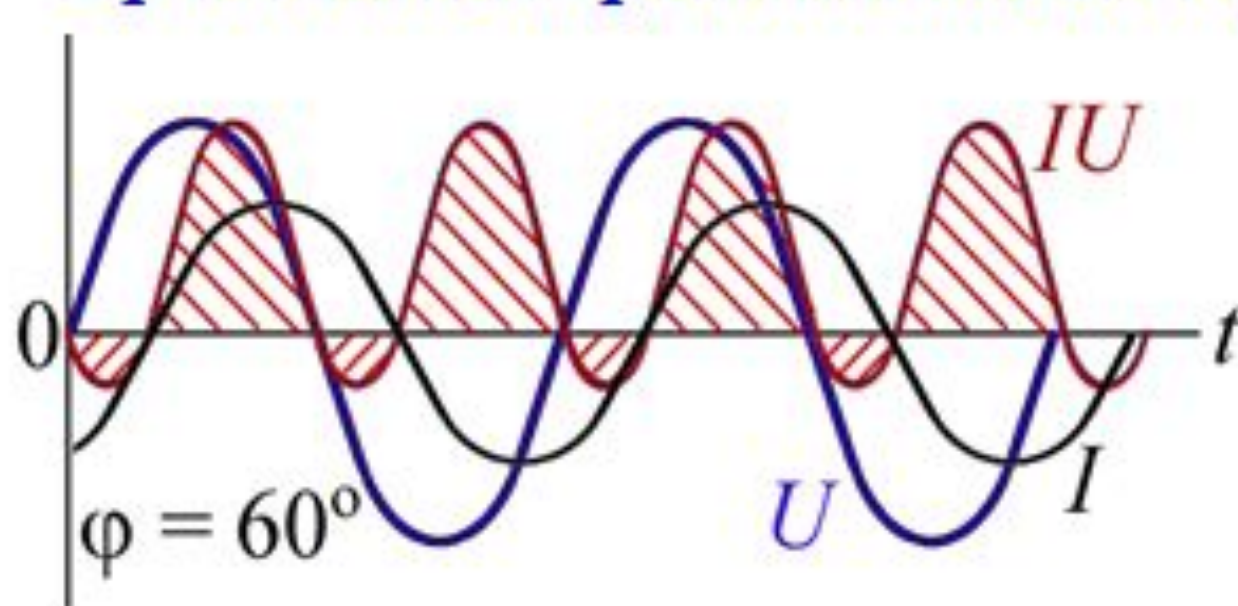
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Действующим значением переменного тока называется такой постоянный ток, который на одинаковом сопротивлении за время, равное одному периоду, выделяет такое же количество тепла, что и данный переменный ток за то же время.



При наличии реактивного сопротивления



*- колебания
мгновенной
мощности с
переменной
знака (средняя
мощность
уменьшается)*

Работа переменного тока за период T :

$$A = \frac{1}{2} I_m U_m T \cos \varphi$$

Средняя мощность: $\langle P \rangle = \frac{A_T}{T} = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi$

$\cos \varphi$ - коэффициент мощности.

При $\cos \varphi = 0$ $P = 0$

Мощности в цепях переменного тока в алгебраической форме

$$S = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi$$

(ВА – вольт-ампер)

Активная мощность: Реактивная мощность:

$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

Вт – ватт

ВАр – вольт-ампер реактивный

активная мощность

$$P = UI \cos \varphi$$

реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi$$

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Треугольник мощностей

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$





Передача электроэнергии.

Потери энергии на нагрев проводов

$$\underline{Q=I^2R\Delta t} \quad \underline{\text{Закон Джоуля-Ленца}}$$

Q- кол-во теплоты R- сопротивление проводов

I –сила тока Δt - время

$$\underline{Q \approx I^2}$$

для уменьшения потерь надо уменьшить силу тока.

Чтобы при уменьшении тока в линии не уменьшалась передаваемая мощность $\underline{P=IU}$ U-напряжение,

следует увеличить U во столько же раз,
во сколько раз уменьшают силу тока.

КОМПЕНСИРУЙ РЕАКТИВНУЮ МОЩНОСТЬ!

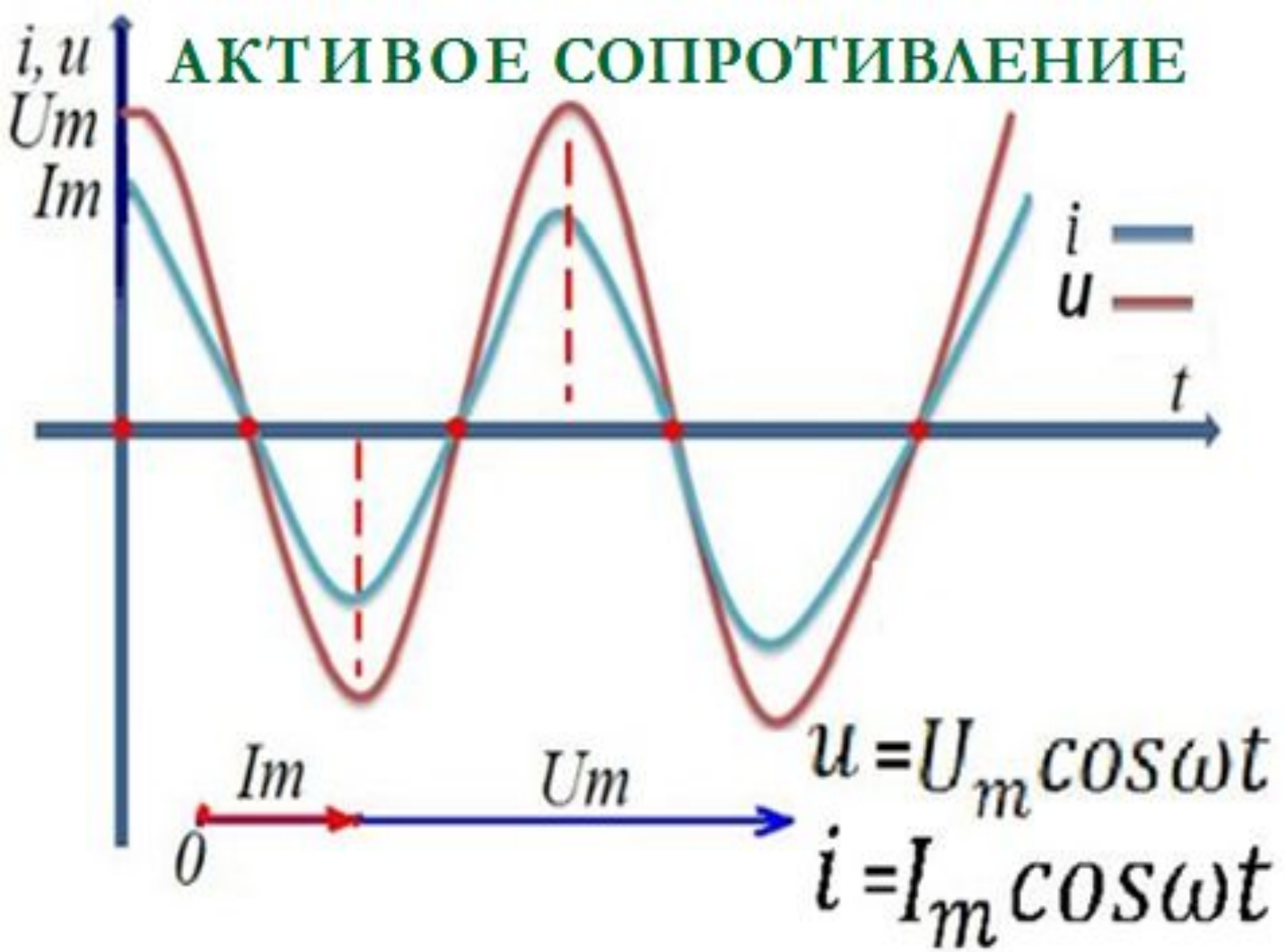


КОЭФФИЦИЕНТ
МОЩНОСТИ = $\frac{\text{АКТИВНАЯ МОЩНОСТЬ}}{\text{ПОЛНАЯ МОЩНОСТЬ}}$

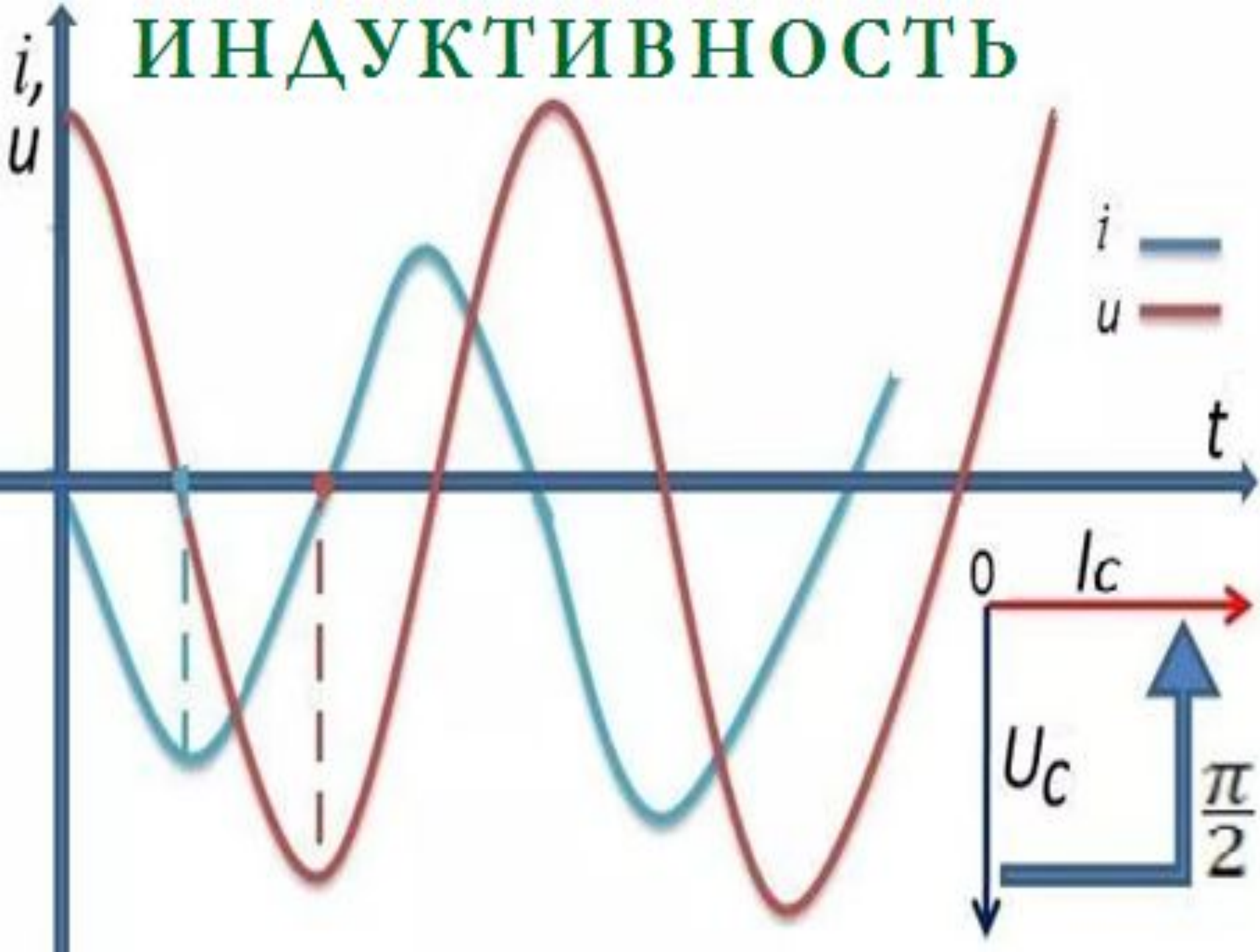
$$\cos \varphi = \frac{P [Вт]}{A [ВА]}$$

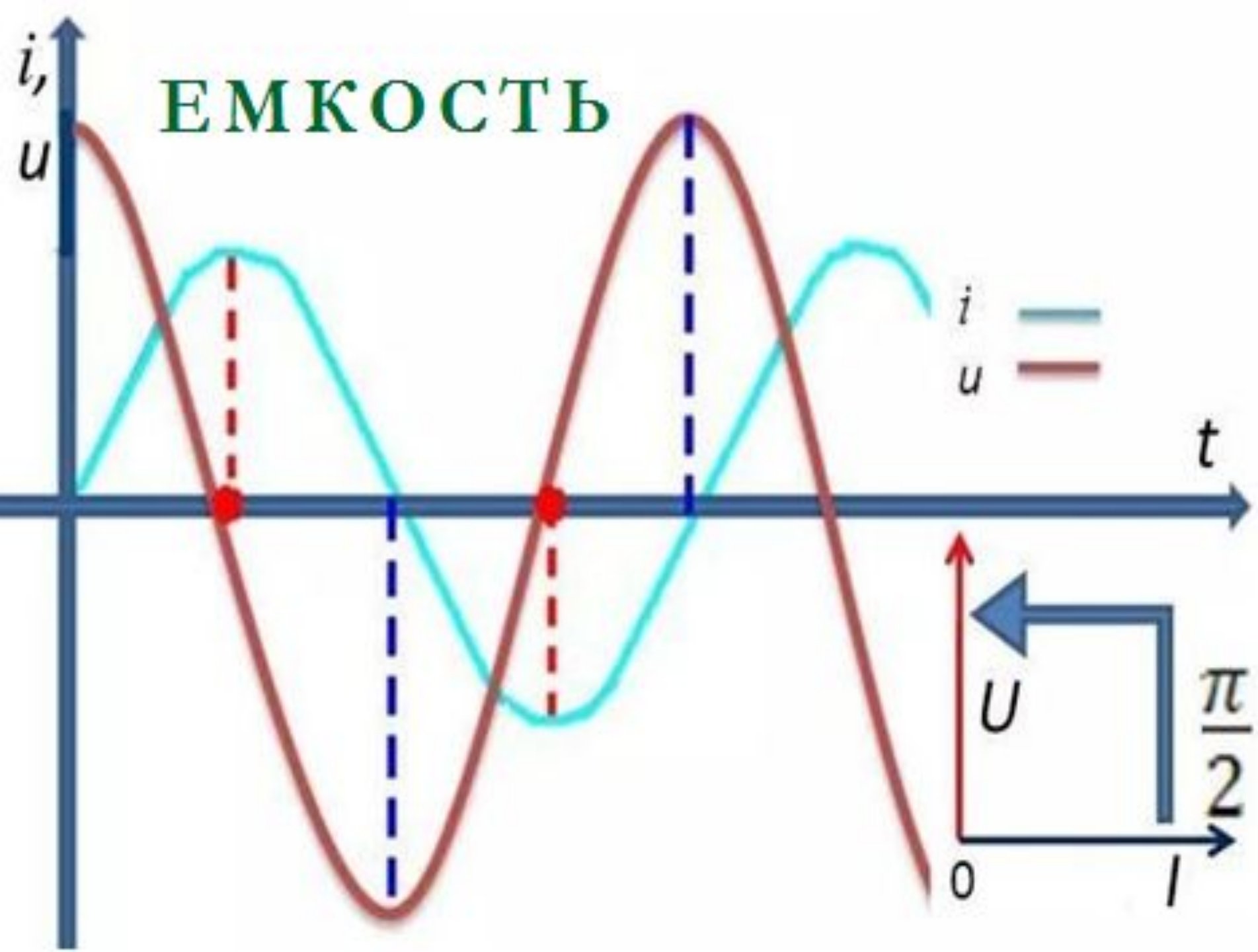


АКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

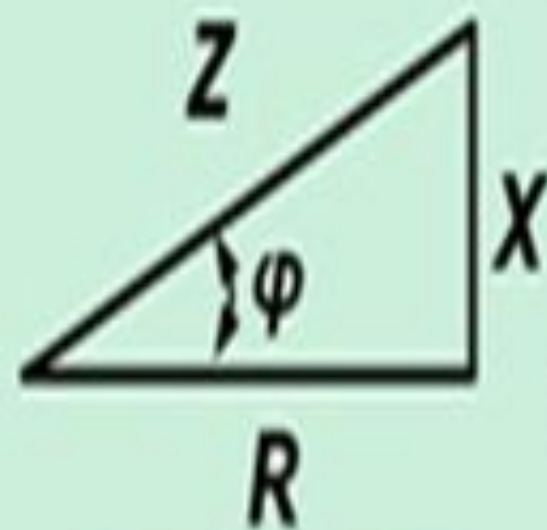


ИНДУКТИВНОСТЬ

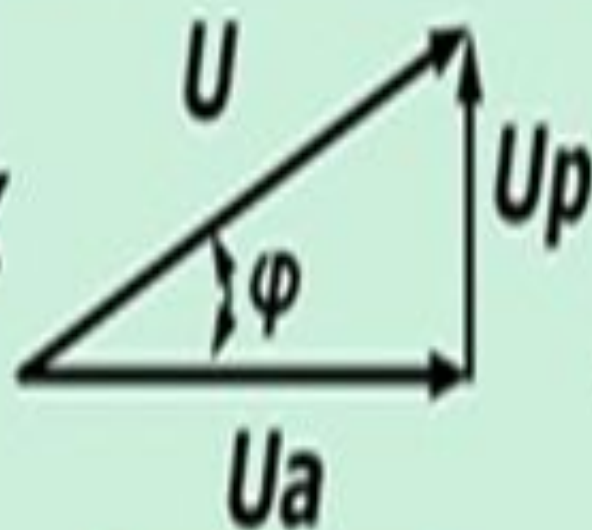




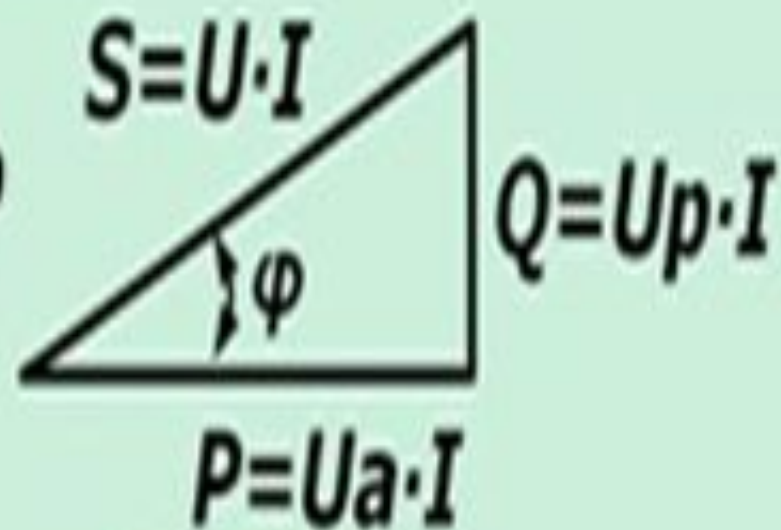
Выражения соотношений мощности через вектора тока и напряжения



Треугольник
сопротивлений



Треугольник
напряжений



Треугольник
мощностей

$$P = U_a \cdot I = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad Q = U_p \cdot I = X \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

ЛЕКЦИЯ ОКОНЧЕНА!

