

---

# Фотометрическое приближение (Луч света)



Будак Владимир Павлович,  
Национальный исследовательский  
университет «МЭИ»  
кафедра светотехники

---

☐: +7 (095) 763-5239

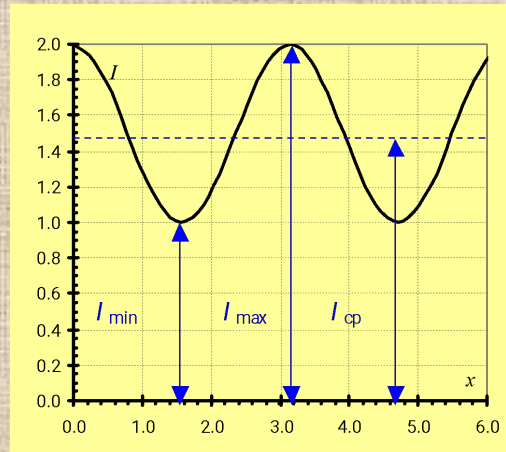
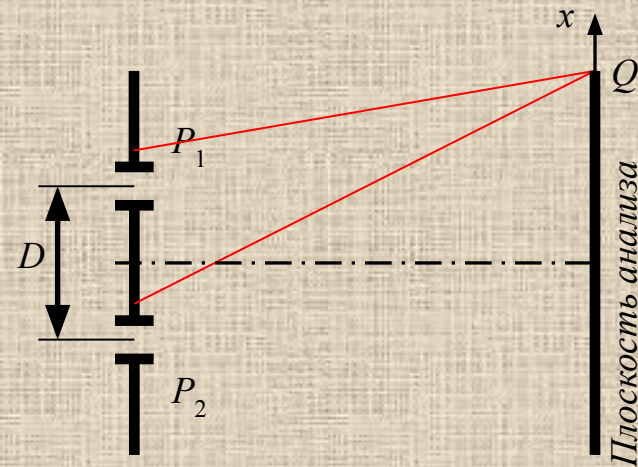
[BudakVP@mpei.ru](mailto:BudakVP@mpei.ru)



# Интерференция света

- При практических расчетах используется простая модель приближения ГО
- В основе фотометрии лежат представления о световом поле как совокупности лучей всевозможных направлений, по которым протекает световая энергия
- Модель аддитивного сложения энергии при наложении лучей выполняется не всегда – интерференция: опыт Юнга (Thomas Young; 13.06.1773, Милвертон – 10.05.1829, Лондон)

$$I(Q) = \langle U(Q)U^*(Q) \rangle, \quad U(Q) = U_1 + U_2$$



$$I(Q) = \langle (U_1 + U_2^*)(U_1^* + U_2) \rangle$$

$$= I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}$$

$$I_1 = \langle U_1 U_1^* \rangle, \quad I_2 = \langle U_2 U_2^* \rangle,$$

$$\Gamma_{12} = \langle U_1 U_2^* \rangle$$

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\Delta I}{I_{\text{ср}}}$$

*Такой закон сложения энергии есть результат измерения энергии волны оптическим приемником:  $\tau \gg T, l \gg \lambda$*

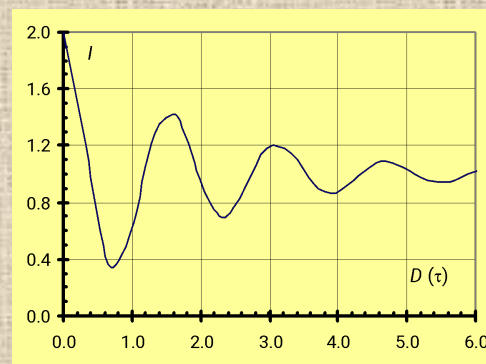
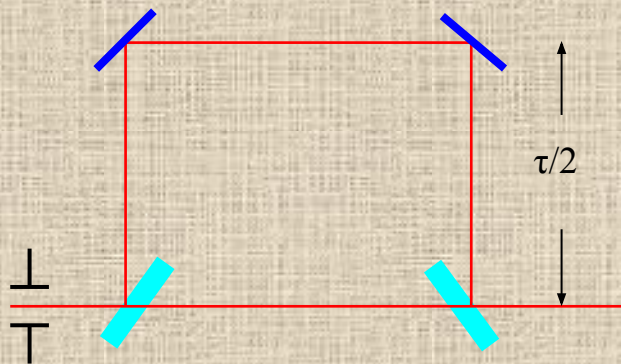
# Когерентность света

Корреляционную функцию поля (*функция когерентности*) можно представить в виде:

$$\gamma_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}} = |\gamma_{12}| \exp\{i\alpha_{12}\} - \text{степень когерентности} \quad I(Q) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| \cos \alpha_{12}$$

$$V = \frac{(I_1 + I_2 + 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1 I_2}) - (I_1 + I_2 - 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1 I_2})}{(I_1 + I_2 + 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1 I_2}) + (I_1 + I_2 - 2|\gamma_{12}|\sqrt{I_1 I_2})} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}| \quad I_1 = I_2 \Rightarrow V = |\gamma_{12}|$$

$$I(Q) = |\gamma_{12}| \{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha_{12}\} + (1 - |\gamma_{12}|)(I_1 + I_2): \frac{I_{\text{КОГ}}}{I_{\text{ПОЛН}}} = |\gamma_{12}|$$



*Любое излучение является частично-когерентным: можно ввести по уровню время  $\tau$  и пространство когерентности  $l$*

# Распределение энергии в изображении

Корреляционная функция поля в изображении

$$\Gamma_i(\rho'_i, \rho''_i) = \left\langle \int U_o(\rho'_o) P(\rho'_o \rightarrow \rho'_i) d^2 \rho'_o \int U_o^*(\rho''_o) P^*(\rho''_o \rightarrow \rho''_i) d^2 \rho''_o \right\rangle$$
$$= \iint \Gamma_o(\rho'_o, \rho''_o) P(\rho'_o \rightarrow \rho'_i) P^*(\rho''_o \rightarrow \rho''_i) d^2 \rho'_o d^2 \rho''_o$$

или для интенсивности поля

$$I_i(\rho_i) = \Gamma_i(\rho_i, \rho_i) = \iint \Gamma_o(\rho'_o, \rho''_o) P(\rho'_o \rightarrow \rho_i) P^*(\rho''_o \rightarrow \rho_i) d^2 \rho'_o d^2 \rho''_o$$

Введем характерные размеры изменения подынтегральной функций:  $l_0$  – длина когерентности излучения и  $\delta$  – разрешение ОС

1)  $l_0 \gg \delta$  – когерентность излучения существенно превышает разрешение системы

$$I_i(\rho_i) = \iint \Gamma_o(\rho'_o, \rho''_o) P(\rho'_o \rightarrow \rho_i) P^*(\rho''_o \rightarrow \rho_i) d^2 \rho'_o d^2 \rho''_o$$
$$= \iint \langle U_o(\rho'_o) U_o^*(\rho''_o) \rangle P(\rho'_o \rightarrow \rho_i) P^*(\rho''_o \rightarrow \rho_i) d^2 \rho'_o d^2 \rho''_o$$
$$\approx \left\langle \int U_o(\rho_o) P(\rho_o \rightarrow \rho_i) d^2 \rho_o \int U_o^*(\rho_o) P^*(\rho_o \rightarrow \rho_i) d^2 \rho_o \right\rangle = \left\langle \left| \int U_o^*(\rho_o) P^*(\rho_o \rightarrow \rho_i) d^2 \rho_o \right|^2 \right\rangle$$

*При когерентном освещении ОС линейна относительно комплексной амплитуды*

# Некогерентное освещение

2)  $\delta \gg l_0$  – разрешение системы существенно превышает когерентность излучения

$$\Gamma_o(\rho_o', \rho_o'') = I_o(\rho_o') \delta(\rho_o' - \rho_o'')$$

что приводит к выражению

$$\begin{aligned} I_i(\rho_i) &= \iint \Gamma_o(\rho_o', \rho_o'') P(\rho_o' \rightarrow \rho_i) P^*(\rho_o'' \rightarrow \rho_i) d^2 \rho_o' d^2 \rho_o'' \\ &\approx \iint I_o(\rho_o') \delta(\rho_o' - \rho_o'') P(\rho_o' \rightarrow \rho_i) P^*(\rho_o'' \rightarrow \rho_i) d^2 \rho_o' d^2 \rho_o'' \\ &= \int I_o(\rho_o') P(\rho_o' \rightarrow \rho_i) P^*(\rho_o' \rightarrow \rho_i) d^2 \rho_o' = \int I_o(\rho_o') |P(\rho_o' \rightarrow \rho_i)|^2 d^2 \rho_o' \end{aligned}$$

ФРТ некогерентного и когерентного освещений связаны

$$h(\rho_o \rightarrow \rho_i) = |P(\rho_o \rightarrow \rho_i)|^2$$

*При некогерентном освещении ОС линейна относительно интенсивности излучения*

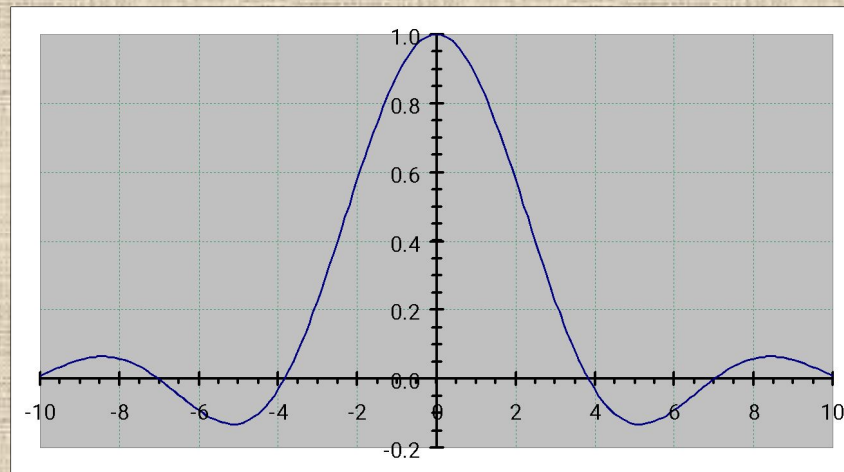
# ФРТ ОС при когерентном освещении

При круглом входном зрачке радиуса  $a$ :

$$P(\rho) = \frac{A}{\beta} \int \Theta(\lambda \mathbf{w}) \exp\{-i2\pi \mathbf{w} \rho\} d^2 w = \frac{A}{\beta} \int_0^{a/\lambda} \int_0^{2\pi} \exp\{-i2\pi w \rho \cos \varphi\} d\varphi w dw$$

$$= 2\pi \frac{A}{\beta} \int_0^{a/\lambda} J_0(2\pi w \rho) w dw = 2\pi \frac{A}{\beta} \frac{1}{(2\pi \rho)^2} J_1(2\pi w \rho) 2\pi w \Big|_0^{a/\lambda} = \pi a^2 \frac{A}{\beta \lambda^2} \frac{2 J_1(k \rho a)}{k \rho a}$$

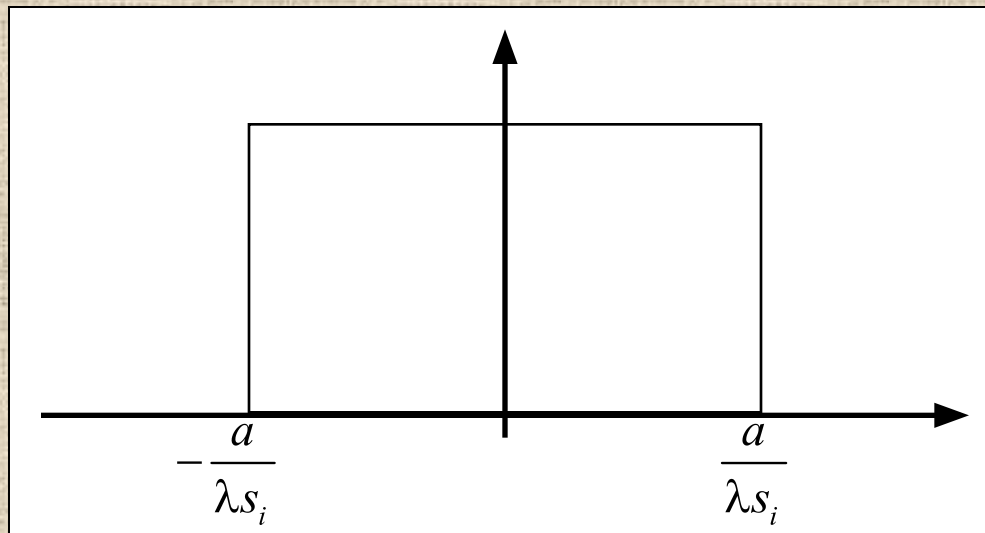
$$\rho = \frac{\rho_i}{s_i} = \text{tg } \alpha \approx \alpha$$



ФРТ ОС при когерентном освещении  
есть кружок рассеяния Airy

# ОПФ ОС при когерентном освещении

$$\begin{aligned} H(\mathbf{v}) &= \int \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}) e^{i2\pi\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}} d^2\rho = \frac{1}{2\pi} \int e^{i2\pi\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}} \int \Theta(\boldsymbol{\rho}') \exp\left[-i2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}'}{\lambda s_i}\right] d^2\rho' d^2\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \Theta(\boldsymbol{\rho}') \int \exp\left[i2\pi\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{v} - \frac{\boldsymbol{\rho}'}{\lambda s_i}\right)\right] d^2\rho d^2\rho' = \int \Theta(\boldsymbol{\rho}') \delta\left(\mathbf{v} - \frac{\boldsymbol{\rho}'}{\lambda s_i}\right) d^2\rho' = \Theta(\mathbf{v}\lambda s_i) \end{aligned}$$

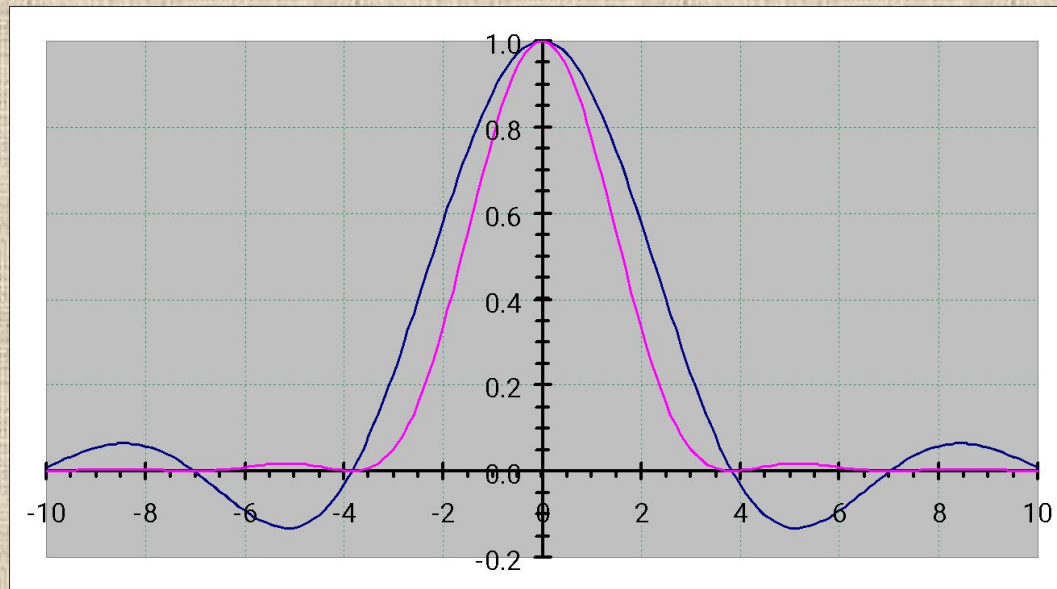


*ОПФ ОС при когерентном освещении аналогична  
идеальному радиоприемнику*

# ФРТ ОС при некогерентном освещении

$$h(\rho) = |P(\rho)|^2 \boxtimes \left( \frac{2J_1(ka\alpha)}{ka\alpha} \right)^2, \quad \frac{2\pi}{\lambda} a\alpha = 3.83 \Rightarrow \alpha_{\text{пр}} = 0.61 \frac{\lambda}{a}$$

- предельное разрешение ОС – дифракционное ограничение



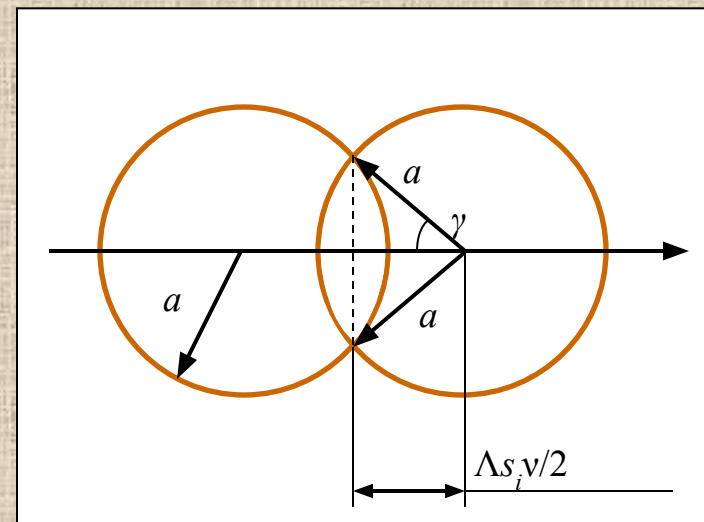
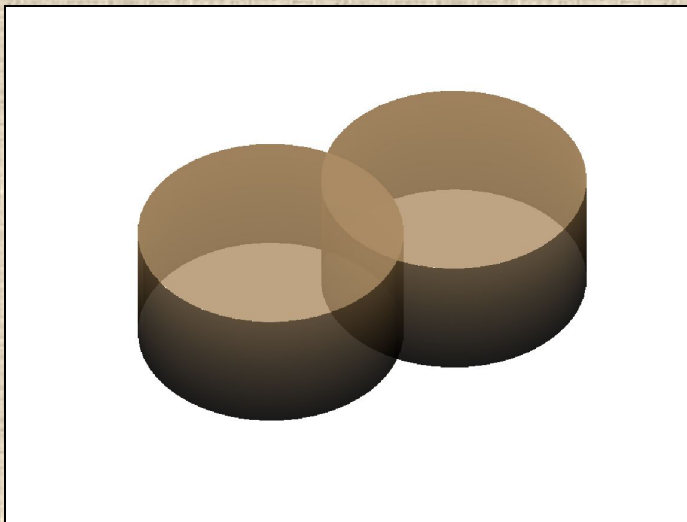
*Сущность построения изображения ОС – дифракция на выходном зрачке, а ОС - наблюдать на конечном расстоянии*



# ОПФ ОС при когерентном освещении

$$h(\rho) = |P(\rho)|^2 \Rightarrow H(\mathbf{v}) = H(\mathbf{v}) * H(\mathbf{v}) = \int \Theta(\lambda s_i(\mathbf{v} + \mathbf{w})) \Theta(\lambda s_i \mathbf{w}) d^2 w$$

Свертка геометрически есть объем пересечения двух цилиндров 1 высоты:



$$H(\mathbf{v}) = 4(S_{\text{сек}} - S_{\boxtimes}), \quad S_{\text{сек}} = \pi a^2 \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{\gamma a^2}{2}, \quad S_{\boxtimes} = \frac{1}{2} a \cdot 0.5 \lambda s_i v \sin \gamma = \frac{\lambda s_i a v}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda s_i v}{2a}\right)^2}$$

*Расчет объема при 1 высоте можно заменить вычислением площади пересечения*

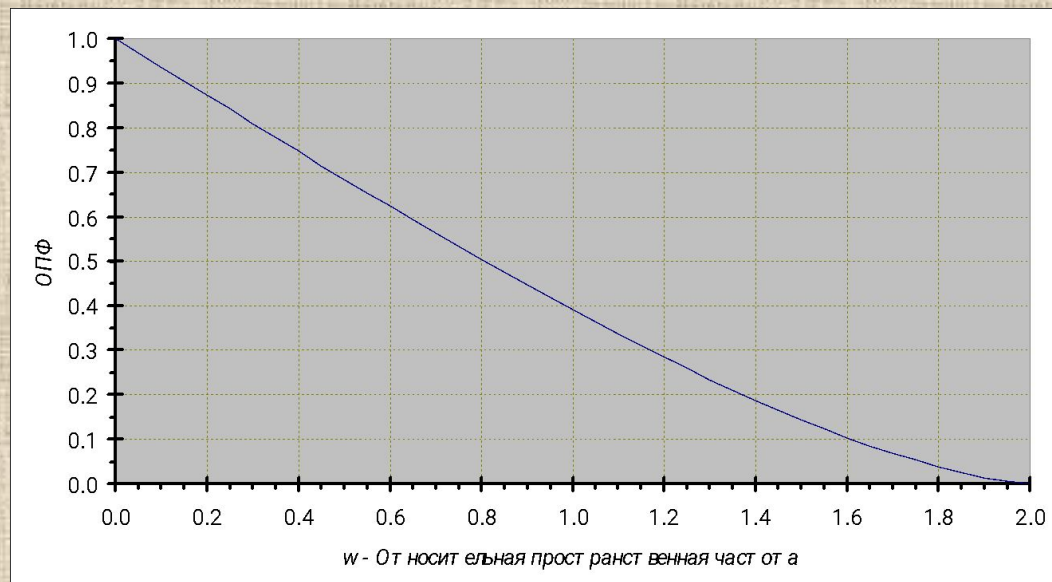
# ОПФ ОС

$$H(v) = 4 \left( \frac{a^2}{2} \arccos \frac{\lambda s_i v}{2a} - \frac{\lambda s_i a v}{4} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda s_i v}{2a} \right)^2} \right) = 2a^2 \left( \arccos \frac{\lambda s_i v}{2a} - \frac{\lambda s_i v}{2a} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda s_i v}{2a} \right)^2} \right)$$

$$H(w) = 2a^2 \left( \arccos \frac{w}{2} - \frac{w}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{w}{2} \right)^2} \right),$$

$$w = \frac{\lambda s_i v}{2a}, \quad H(0) = \pi a^2,$$

$$T(w) = \frac{2}{\pi} \left( \arccos \frac{w}{2} - \frac{w}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{w}{2} \right)^2} \right)$$



*Такую ОПФ можно реализовать в системах ничего не имеющих общего с оптикой: камера-обскура или непрозрачный шар*

# Распространение функции когерентности

Интенсивность в произвольной точке :

$$I(\mathbf{r}) = \langle U(\mathbf{r})U^*(\mathbf{r}) \rangle \equiv \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) + \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) + 2\text{Re}\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

Функция когерентности двухточечная характеристика:

$$\begin{cases} \Delta_1 U_1 + k^2 U_1 = 0, \\ \Delta_2 U_2 + k^2 U_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} U_2^* \\ U_1^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 \Gamma_{12} + k^2 \Gamma_{12} = 0, \\ \Delta_2 \Gamma_{12} + k^2 \Gamma_{12} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma_{12} = 0, \\ \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) \Gamma_{12} + k^2 \Gamma_{12} = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2;$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho},$$

$$\nabla_1 = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{R}} + \nabla_{\boldsymbol{\rho}}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{4}\Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\boldsymbol{\rho}} + \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}},$$

$$\nabla_2 = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{R}} - \nabla_{\boldsymbol{\rho}}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{4}\Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\boldsymbol{\rho}} - \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}};$$

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = 0, \\ \left( \frac{1}{4}\Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\boldsymbol{\rho}} + k^2 \right) \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = 0; \end{cases}$$

*Распространение функции когерентности описывает не одно уравнение, а система уравнений*

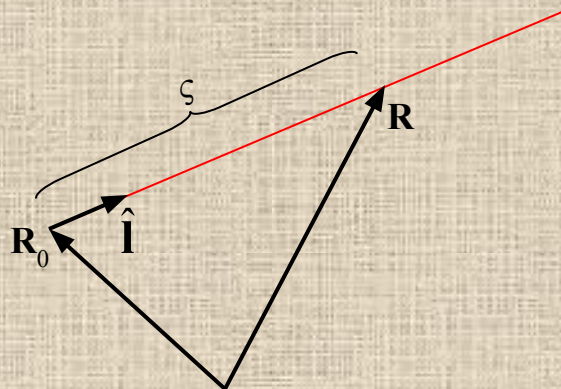
# Спектр Wigner

( Юджин Вигнер, Wigner Jenő Pál; 17.11.1902, Будапешт – 01.01.1995, Принстон, США)

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = 0, \\ \left( \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\boldsymbol{\rho}} + k^2 \right) \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = 0; \end{cases}$$

Введем Фурье-трансформанту:  $\Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} d^3\boldsymbol{\kappa}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\kappa} \nabla_{\mathbf{R}} F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) = 0, \\ \left( \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\kappa}^2 + k^2 \right) F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) = 0; \end{cases}$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \quad \hat{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\kappa} / \kappa \quad \frac{d}{d\zeta} F(\mathbf{R}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$$

$$F(\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\kappa}) = F(\mathbf{R}_0 + \zeta \hat{\mathbf{l}}, \boldsymbol{\kappa})$$

*функция когерентности вдоль луча не меняется*

*Луч распространения функции когерентности и луч приближения ГО в общем случае не совпадают*

# Квазиоднородные волны

$$\left( \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} + \Delta_{\mathbf{p}} + k^2 \right) \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} F + (k^2 - \kappa^2) F = 0$$

Определим характерный масштаб  $L_{\mathbf{R}}$  изменения  $F$  по  $\mathbf{R}$ :  $\Delta_{\mathbf{R}} F \approx \frac{F}{L_{\mathbf{R}}^2}$

$$\frac{1}{L_{\mathbf{R}}^2} \approx k^2 - \kappa^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{L_{\mathbf{R}}^2} \approx (k - \kappa)(k + \kappa)$$

$$\kappa \approx k: \frac{1}{L_{\mathbf{R}}^2} \approx k \Delta k \Rightarrow \frac{1}{k^2 L_{\mathbf{R}}^2} \approx \frac{\Delta k}{k}, \quad \Delta k = k - \kappa: \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{L_{\mathbf{R}}^2} \approx \frac{\Delta k}{k}$$

Допустим, что характерный размер неоднородности волны много больше длины волны:

$$L_{\mathbf{R}} \approx \lambda \Rightarrow (k^2 - \kappa^2) F \gg \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} F \quad \left| \nabla_{\mathbf{R}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) \right| \ll \left| \nabla_{\mathbf{p}} \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) \right|$$

*Условие квазиоднородности близко условию применимости приближения ГО*

*Можно выделить область пространства, где квазиоднородная волна подобна плоской волне*

# Обобщенная яркость

Для квазиоднородной волны уравнение:  $\frac{1}{4}\Delta_{\mathbf{R}}F + (k^2 - \kappa^2)F = 0 \Rightarrow (k^2 - \kappa^2)F = 0$

решение которого имеет вид:  $F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}})}{k^2} \delta(k - \kappa)$

$$\Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} d^3\boldsymbol{\kappa} = \int_0^\infty \frac{L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}})}{k^2} \delta(k - \kappa) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} k^2 d\boldsymbol{\kappa} d\hat{\mathbf{l}} \quad \Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) e^{i\boldsymbol{\rho}\hat{\mathbf{l}}} d\hat{\mathbf{l}}$$

$$\boldsymbol{\kappa}\nabla_{\mathbf{R}}F(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \Rightarrow (\hat{\mathbf{l}}, \nabla)L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) = 0 \Rightarrow L(\mathbf{R} + \zeta\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}) = L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}})$$

По корреляционной функции можно определить дисперсию – плотность мощности и поток мощности:

$$I(\mathbf{r}) = \Gamma_{12}(\mathbf{R} = \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} = 0) = \int L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}} \equiv E_0(\mathbf{r}) \quad \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{ik} \nabla \Gamma_{12}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} = 0) = \int L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) \hat{\mathbf{l}} d\hat{\mathbf{l}} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

*Спектр Wigner не всегда является положительной величиной как неполное Fourier преобразование – обобщенная яркость*

# Световое поле

---

$$\Gamma_{12}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{i}}) e^{ik\rho\hat{\mathbf{i}}} d\hat{\mathbf{i}} \quad L(\mathbf{R}_\perp, \hat{\mathbf{i}}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int \Gamma_{12}(\mathbf{R}_\perp, \boldsymbol{\rho}_\perp) \exp(-ik\hat{\mathbf{i}}\boldsymbol{\rho}_\perp) d^2\rho_\perp$$

1. Электромагнитное поле представляется совокупностью лучей – приближение геометрической оптики
2. Лучи приходящие с различных направлений некогерентны между собой
3. Постоянная времени и характерный размер квадратичного оптического приемника существенно превышают период и длину волны – применимость для исследований выводов статистической теории
4. Поле эргодично: усреднение по реализации соответствует усреднениям по ансамблю реализаций – соответствие теории с практическими измерениями

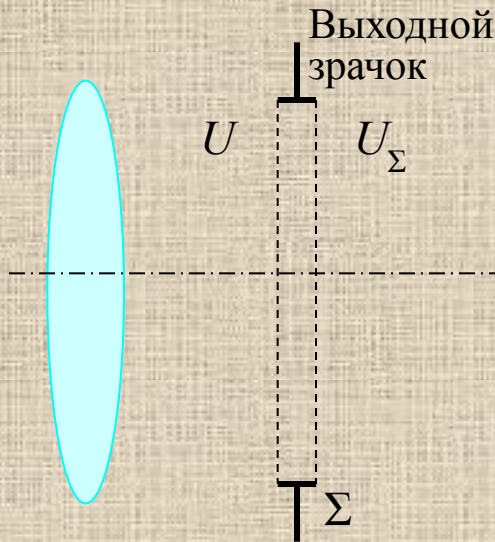
$$(\hat{\mathbf{i}}, \nabla)L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{i}}) = 0 \Rightarrow L(\mathbf{R} + \zeta\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}) = L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{i}})$$

---

*Отрицательные значения обобщенной яркости несут информацию о фазе волны и корреляции точек*

# Дифракция на диафрагмах в ОС

- Формирование изображения в ОС описывается приближением *дифракции Фраунгофера*
- Волновое поле в этом приближении является *квазиоднородным*
- Описывается в *лучевом приближении*



Принцип Abbe (Abbe Ernst, 1840–1905): структуру оптического изображения можно исследовать в приближении ГО с привлечением дифракции на выходном зрачке

$$\left. \begin{aligned} U_{\Sigma}(\mathbf{r}) &= \Theta(\mathbf{r})U(\mathbf{r}) \\ \Gamma_{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \langle U_{\Sigma}(\mathbf{r}_1)U_{\Sigma}^*(\mathbf{r}_2) \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma_{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_o(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\Theta(\mathbf{r}_1)\Theta(\mathbf{r}_2)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \Rightarrow \Gamma_{\Sigma}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \Gamma_o(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})\Theta\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)\Theta\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)$$

$$\Gamma_o(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}})e^{-ik\hat{\mathbf{l}}\boldsymbol{\rho}} d\hat{\mathbf{l}}, \quad L(\mathbf{R}, \mathbf{l}'_{\perp}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 l_z \int \Gamma_{\Sigma}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})e^{ik\mathbf{l}'_{\perp}\boldsymbol{\rho}} d^2\rho$$

*В системах формирования изображения дифракция на выходном зрачке описывается в лучевом приближении*



# Дифракция на диафрагмах в ОС

$$L(\mathbf{R}, \mathbf{l}'_{\perp}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 l_z \int \oint L_o(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) e^{-ik\hat{\mathbf{l}}\boldsymbol{\rho}} d\hat{\mathbf{l}} \Theta\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \Theta\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) e^{ikl'_{\perp}\boldsymbol{\rho}} d^2\rho$$

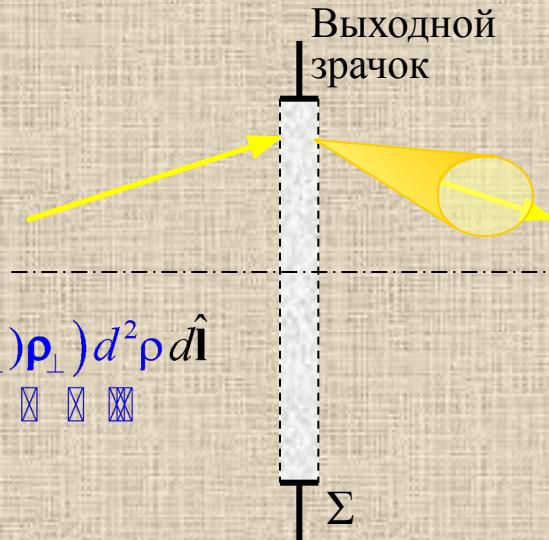
$$L(\mathbf{R}, \mathbf{l}'_{\perp}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 l_z \oint L_o(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) \int \Theta\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \Theta\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \exp(-ik(\mathbf{l}'_{\perp} - \mathbf{l}_{\perp})\boldsymbol{\rho}_{\perp}) d^2\rho d\hat{\mathbf{l}}$$

$h(\mathbf{l}'_{\perp} - \mathbf{l}_{\perp})$

$$L(\mathbf{R}, \mathbf{l}'_{\perp}) = \int L_o(\mathbf{R}, \mathbf{l}_{\perp}) h(\mathbf{l}'_{\perp} - \mathbf{l}_{\perp}) d^2l_{\perp}$$

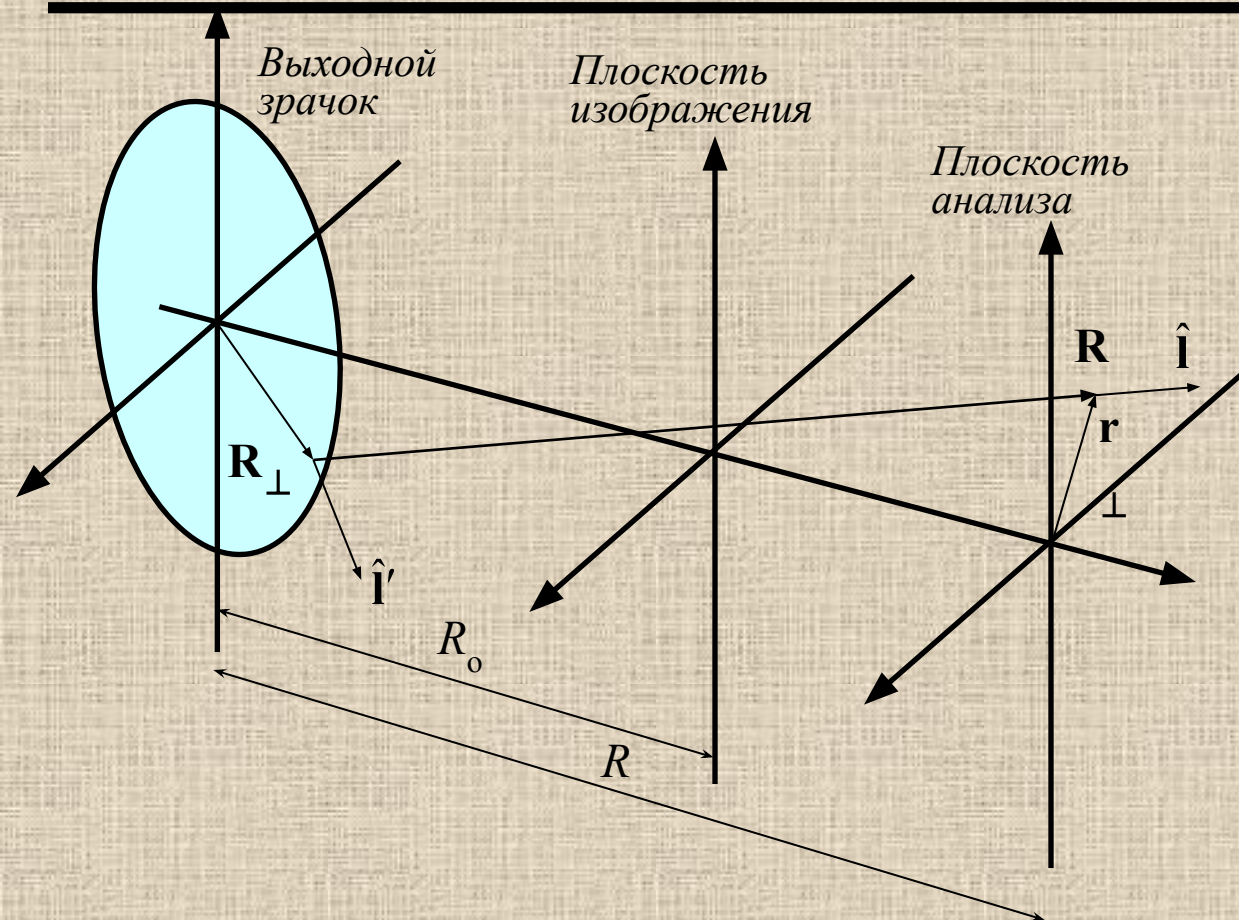
$$h(\mathbf{l}'_{\perp} - \mathbf{l}_{\perp}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{l_z}{l'_z}\right) \int \Theta\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \Theta\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \exp(-ik\boldsymbol{\rho}(\mathbf{l}'_{\perp} - \mathbf{l}_{\perp})) d^2\rho$$

- ФРТ диафрагмы в угловых переменных



*Дифракция в лучевом приближении эквивалентна рассеянию излучения на молочном стекле*

# Расфокусировка в безабберационной ОС

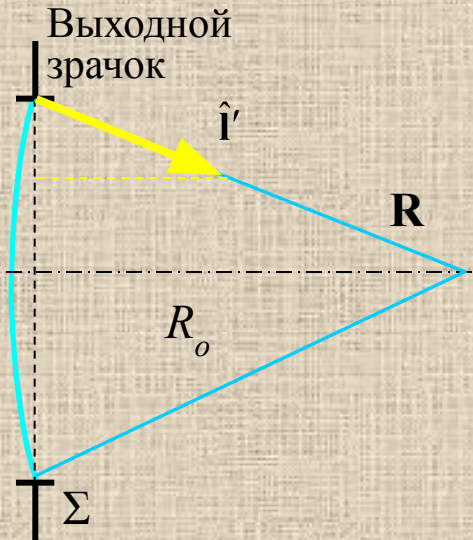


$$\hat{i} = \frac{\mathbf{r}_{\perp} - (\mathbf{R}_{\perp} + R\hat{z})}{\sqrt{(\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{R}_{\perp})^2 + R^2}}$$

В безабберационной ОС формирование изображения определяется дифракцией, описание которой невозможно в рамках классической фотометрии

*Точка на оптической оси определяет ФРТ и ОПФ ОС, являющихся основным методом анализа изображения*

# Облученность в изображении



$$L_o(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{l}'_\perp) = I_o \delta\left(\mathbf{l}'_\perp + \frac{\mathbf{R}_\perp}{R_o}\right)$$

$$L_\Sigma(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{l}_\perp) = I_o \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{l_z}{l'_z}\right) \int \Theta\left(\mathbf{R}_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \Theta\left(\mathbf{R}_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \exp\left\{ik\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{l}_\perp + \frac{\mathbf{R}_\perp}{R_o}\right)\right\} d^2\rho$$

$\approx 1$

$$E(\mathbf{r}_\perp) = \int_{(\Omega_+)} L_a(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{l}_\perp) l_z d\hat{\mathbf{l}} = \int_{(\Omega_+)} L_a(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{l}_\perp) l_z d^2l$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \frac{\mathbf{r}_\perp - (\mathbf{R}_\perp + R\hat{\mathbf{z}})}{\sqrt{(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_\perp)^2 + R^2}} \Rightarrow \mathbf{l}_\perp \approx \frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_\perp}{R}, \quad \mathbf{l}_\perp + \frac{\mathbf{R}_\perp}{R_o} = \frac{\mathbf{r}_\perp}{R} + \beta \frac{\mathbf{R}_\perp}{R}, \quad \beta = \frac{R - R_o}{R_o}, \quad d^2l_\perp \approx \frac{d^2R}{R^2}$$

$$E(\mathbf{r}_\perp) = \frac{I_o}{R^2} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int \Theta\left(\mathbf{R}_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \Theta\left(\mathbf{R}_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \exp\left\{ik\boldsymbol{\rho}\left(\frac{\mathbf{r}_\perp}{R} + \beta \frac{\mathbf{R}_\perp}{R}\right)\right\} d^2\rho d^2R_\perp$$

ОПФ ОС является Фурье преобразованием от распределения облученности в плоскости анализа

# ОПФ ОС

$$H(\mathbf{v}) = \int E(\mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{r}_\perp} d^2r_\perp = \frac{I_0}{R^2} \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \Theta \left( \mathbf{R}_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \Theta \left( \mathbf{R}_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \exp \left\{ ik\boldsymbol{\rho} \left( \frac{\mathbf{r}_\perp}{R} + \beta \frac{\mathbf{R}_\perp}{R} \right) - i\mathbf{v}\mathbf{r}_\perp \right\} d^2r_\perp d^2\rho d^2R_\perp$$

$$H(\mathbf{v}) = \frac{I_0}{R^2} \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \Theta \left( \mathbf{R}_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \Theta \left( \mathbf{R}_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \exp \left\{ ik\beta \frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{R}_\perp}{R} \right\} \int \exp \left\{ i\mathbf{r}_\perp \left( \frac{k\boldsymbol{\rho}}{R} - \mathbf{v} \right) \right\} d^2r_\perp d^2\rho d^2R_\perp$$

$$H(\mathbf{v}) = 2\pi \frac{I_0}{R^2} \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \Theta \left( \mathbf{R}_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \Theta \left( \mathbf{R}_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \exp \left\{ ik\beta \frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{R}_\perp}{R} \right\} \delta \left( \frac{k\boldsymbol{\rho}}{R} - \mathbf{v} \right) d^2\rho d^2R_\perp, \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v} \frac{R}{k} = \mathbf{v}\alpha$$

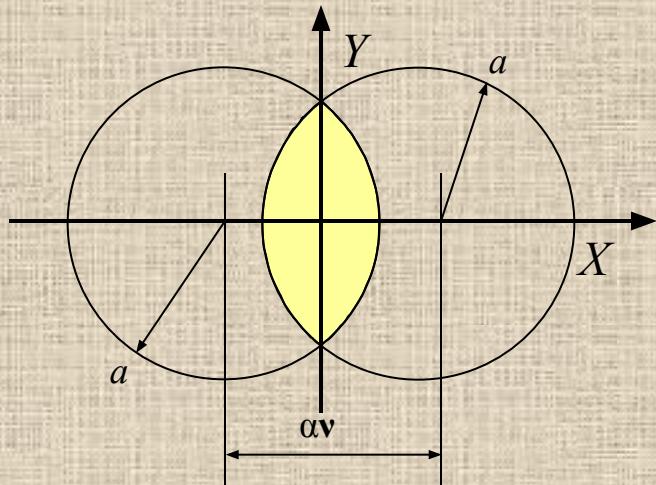
$$H(\mathbf{v}) = \left( \frac{2\pi R}{k} \right)^2 \frac{I_0}{R^2} \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \Theta \left( \mathbf{R}_\perp + \frac{\alpha\mathbf{v}}{2} \right) \Theta \left( \mathbf{R}_\perp - \frac{\alpha\mathbf{v}}{2} \right) \exp(i\beta\mathbf{v}\mathbf{R}_\perp) d^2R_\perp$$

$$H(\mathbf{v}) = I_0 \int \Theta \left( \mathbf{R}_\perp + \frac{\alpha\mathbf{v}}{2} \right) \Theta \left( \mathbf{R}_\perp - \frac{\alpha\mathbf{v}}{2} \right) \exp(i\beta\mathbf{v}\mathbf{R}_\perp) d^2R_\perp \quad H(0) = I_0 \int \Theta(\mathbf{R}_\perp) d^2R_\perp = \pi a^2 I_0$$

$$T(\mathbf{v}) = \frac{H(\mathbf{v})}{H(0)} = \frac{1}{\pi a^2} \int \Theta \left( \mathbf{R}_\perp + \frac{\alpha\mathbf{v}}{2} \right) \Theta \left( \mathbf{R}_\perp - \frac{\alpha\mathbf{v}}{2} \right) \exp(i\beta\mathbf{v}\mathbf{R}_\perp) d^2R_\perp$$

При  $\beta \rightarrow 0$  выражение переходит в ОПФ для ОС, ограниченной дифракцией

# Преобразования интегрального выражения



$$\left(x - \frac{\alpha v}{2}\right)^2 + y^2 = a^2 :$$

$$x_1 = \frac{\alpha v}{2} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad x_2 = -\frac{\alpha v}{2} + \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y_{12} = \pm \sqrt{a^2 - \frac{\alpha^2 v^2}{4}}$$

$$T(\mathbf{v}) = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^{\sqrt{a^2 - \left(\frac{\alpha v}{2}\right)^2}} \int_{\frac{\alpha v}{2} - \sqrt{a^2 - y^2}}^{-\frac{\alpha v}{2} + \sqrt{a^2 - y^2}} e^{i\beta v x} dx dy$$

$$T(\mathbf{v}) = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^{\sqrt{a^2 - \left(\frac{\alpha v}{2}\right)^2}} \sin \left[ \beta v \left( \sqrt{a^2 - y^2} - \frac{\alpha v}{2} \right) \right] dy \Rightarrow T(w) = \frac{4}{\pi \gamma w} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{w^2}{4}}} \sin \left[ \gamma w \left( \sqrt{1 - t^2} - \frac{w}{2} \right) \right] dt$$

$$w = \frac{\alpha v}{a} = \frac{Rv}{ak} = \frac{Rv}{\delta}, \quad t = \frac{y}{a}, \quad \gamma = \frac{\beta a^2}{\alpha} = \frac{\beta k a^2}{R} = \beta \delta \frac{a}{R}, \quad \delta = ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$$

*Полученный интеграл при произвольной расфокусировке через элементарные функции не выражается*

# Влияние расфокусировок на ОПФ ОС

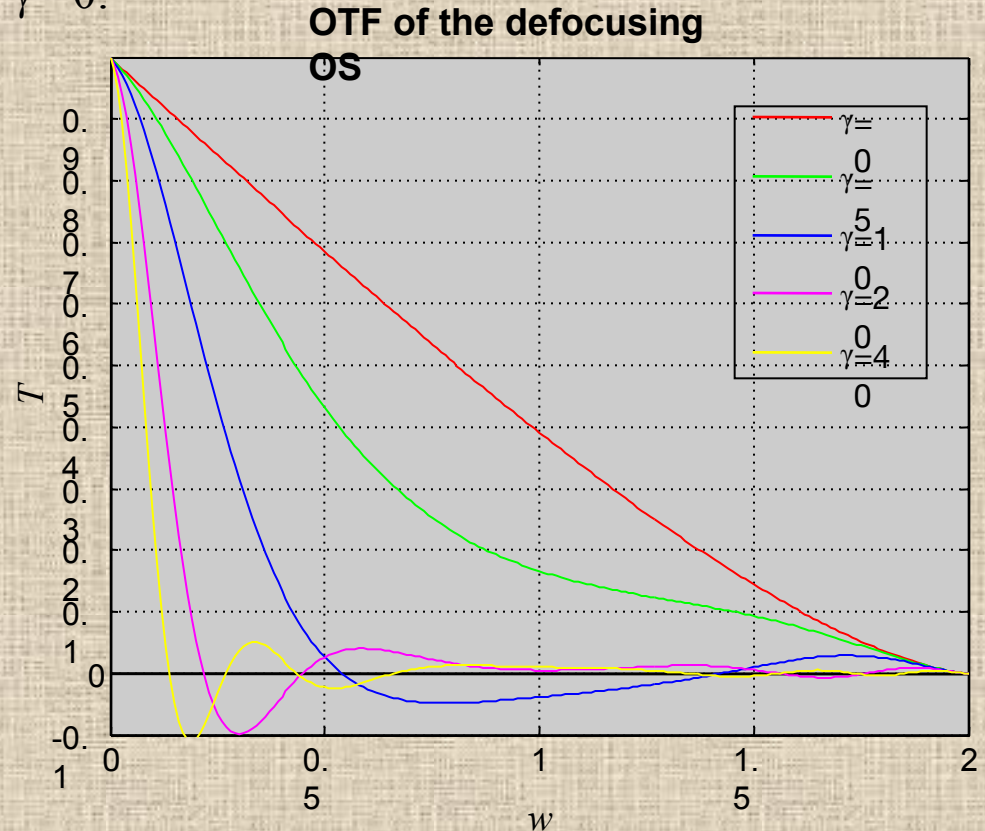
При отсутствии расфокусировки  $\beta=0 \Rightarrow \gamma=0$ :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{4 \sin \gamma w x}{\pi \gamma w} = \frac{4x}{\pi}$$

$$T(w) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{2}\right)^2}} \left( \sqrt{1 - t^2} - \frac{w}{2} t \right) dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \arccos t - t \sqrt{1 - t^2} - \frac{w}{2} t \right]_0^{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \arccos \frac{w}{2} - \frac{w}{2} \sqrt{1 - \frac{w^2}{4}} \right]$$



*ОПФ при больших расфокусировках стремится к функции Бесселя 1 порядка на свой аргумент*