Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе
кафедра прикладной математики
кафедра программирования

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

Дипломная работа студента 401 группы Величанского И.А.

Научный руководитель Санников В. Ф.

Рецензент

1. Введение
2. Постановка задачи
3. Построение решения
4. Результаты

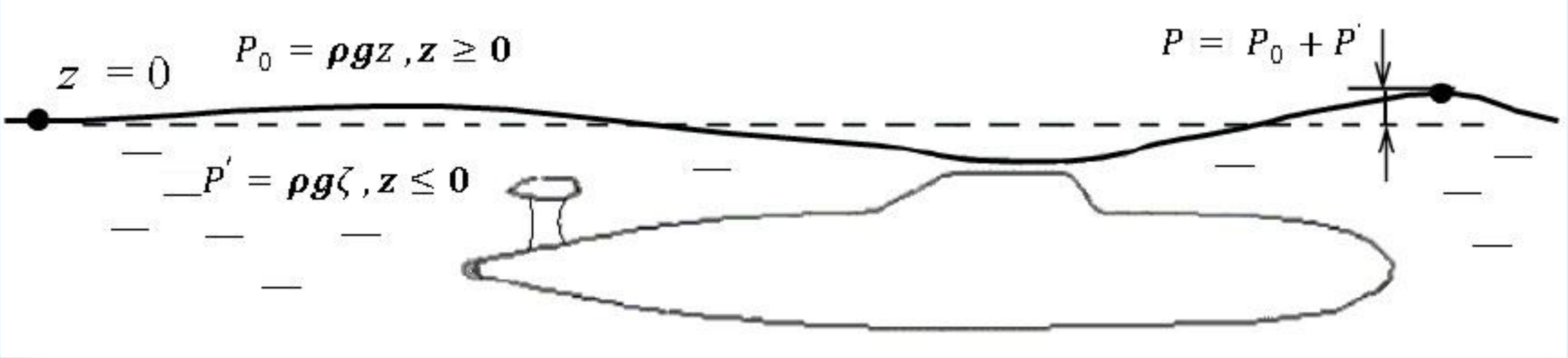
Введение

- Большой интерес в гидродинамике представляет собой задача движения тела под поверхностью жидкости.
- Решение такого рода задач сводится к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных для волновых возмущений.
- Решение может быть весьма трудоёмким и ресурсозатратным.
- Выход: влияние всех этих факторов можно понизить посредством сведения самой математической модели к более простой форме посредством аналитического аппарата
- В данной работе исследуется задача о поверхностных волнах, создаваемых в большом объеме невязкой жидкости, движущейся неравномерно со сдвигом скорости. Целью работы является получение и упрощение решения задачи аналитическим путём.

Зачем это нужно?

- Обнаружение подводных плавающих средств вероятного противника.

- Скрытие подводных плавающих средств союзника.



Что нового?

- Пространственная (трёхмерная) задача.

- Наличие сдвига скорости.

- Двухслойное течение.

- Метод источников - стоков

Таким образом,

Цель : определение физических закономерностей генерации и распространения поверхностных волн

Объект : волновые движения жидкости в течениях

Предмет : поверхностные волны

Метод : нахождение аналитического и численного решений

Постановка задачи:

- Система уравнений гидродинамики в напряжениях.
- Уравнение неразрывности.
- Граничные условия.
- Условия излучения.

Требуется составить физическую модель поверхности водногообъёма, (тоесть получить выражение для функции сдвига поверхностных волн) ипреобразовать её аналитическим путём в простуюформу.

Система уравнений гидродинамики:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t}+\left(U\dfrac{\partial}{\partial x}+V\dfrac{\partial}{\partial y}+W\dfrac{\partial}{\partial z}\right)U=\rho^{-1}\left(\dfrac{\partial \mu q_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mu q_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mu q_{xz}}{\partial z}\right)-\dfrac{1}{\boldsymbol{\rho}}\dfrac{\partial P}{\partial x}+g_x \\
\dfrac{\partial V}{\partial t}+\left(U\dfrac{\partial}{\partial x}+V\dfrac{\partial}{\partial y}+W\dfrac{\partial}{\partial z}\right)V=\rho^{-1}\left(\dfrac{\partial \mu q_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mu q_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mu q_{yz}}{\partial z}\right)-\dfrac{1}{\boldsymbol{\rho}}\dfrac{\partial P}{\partial y}+g_y \\
\dfrac{\partial W}{\partial t}+\left(U\dfrac{\partial}{\partial x}+V\dfrac{\partial}{\partial y}+W\dfrac{\partial}{\partial z}\right)W=\rho^{-1}\left(\dfrac{\partial \mu q_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mu q_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mu q_{zz}}{\partial z}\right)-\dfrac{1}{\boldsymbol{\rho}}\dfrac{\partial P}{\partial z}+g_z
\end{cases}$$

$\bar{V}(U,V,W)$ – скорость сплошной среды (набегающей жидкости);

$U(x,y,z,t), V(x,y,z,t), W(x,y,z,t)$ – проекции на координатные плоскости;

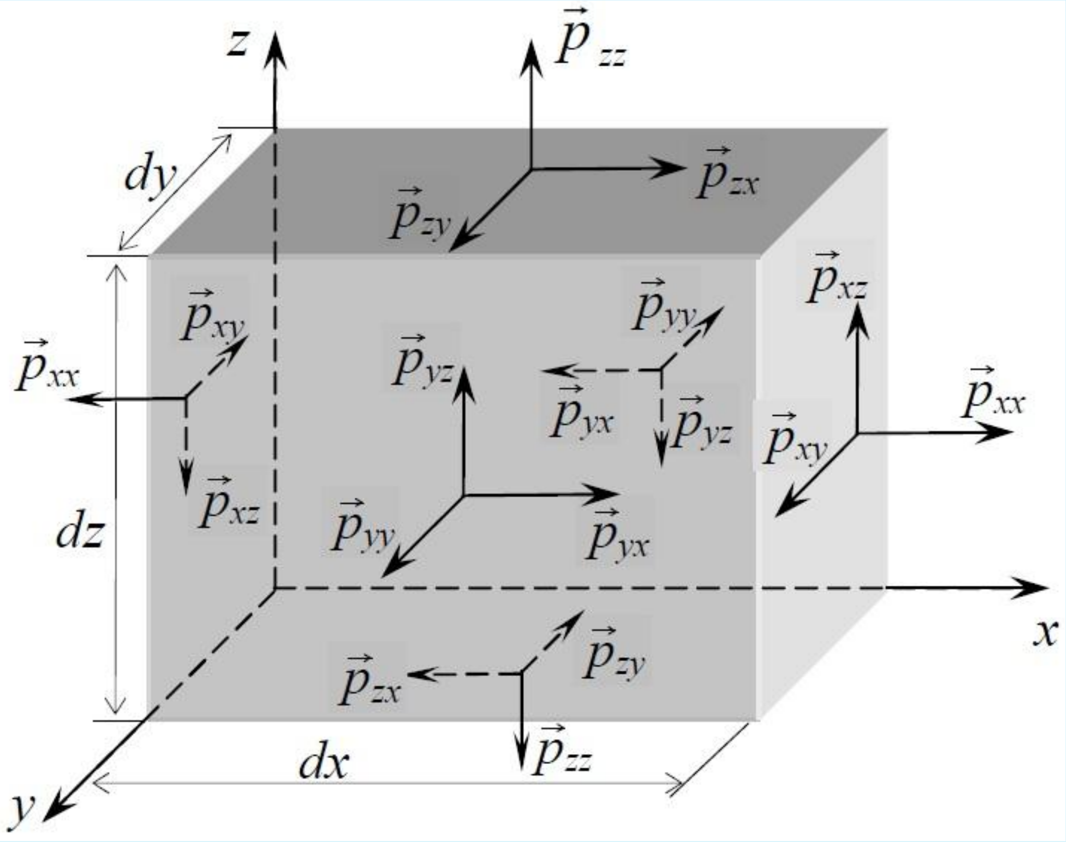
g_x, g_y, g_z – проекции массовых сил;

$P(x,y,z,t)$ – давление;

q_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации;

μ – коэффициент динамической вязкости жидкости

Напряжения в элементарном объёме:



Уравнение неразрывности :

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=\pm q\left(4\pi\sqrt{\left(x+a\right)^{2}+y+\left(z\pm h\right)^{2}}\right)^{-1};$$

$U(x,y,z,t), V(x,y,z,t), W(x,y,z,t)$ – проекции на координатные скости;

$\pm q$ – интенсивность стока и сточника;

x, y, z – пространственные координаты;

h – глубина погружён ного тела;

Источник и сток :

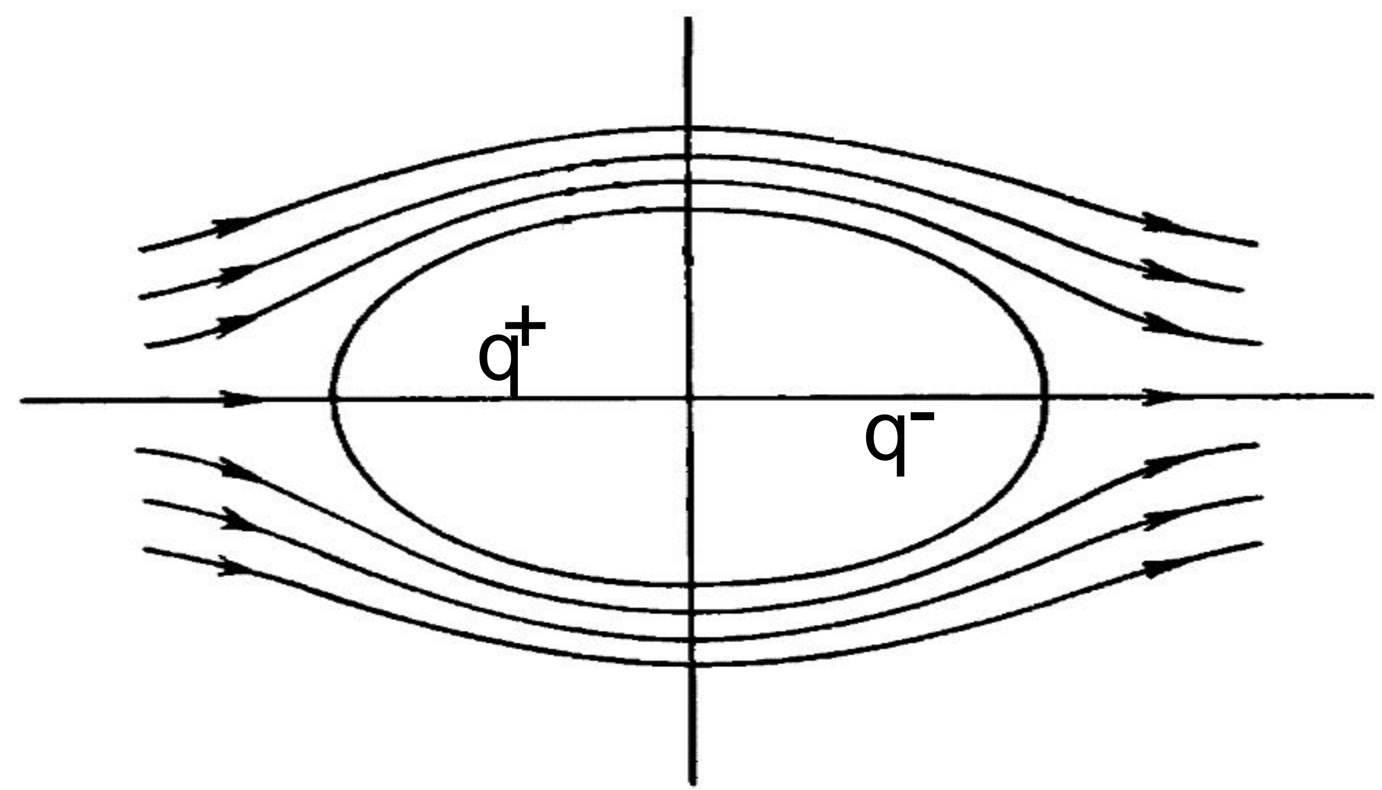


Схема источника и стока.

Граничные условия：

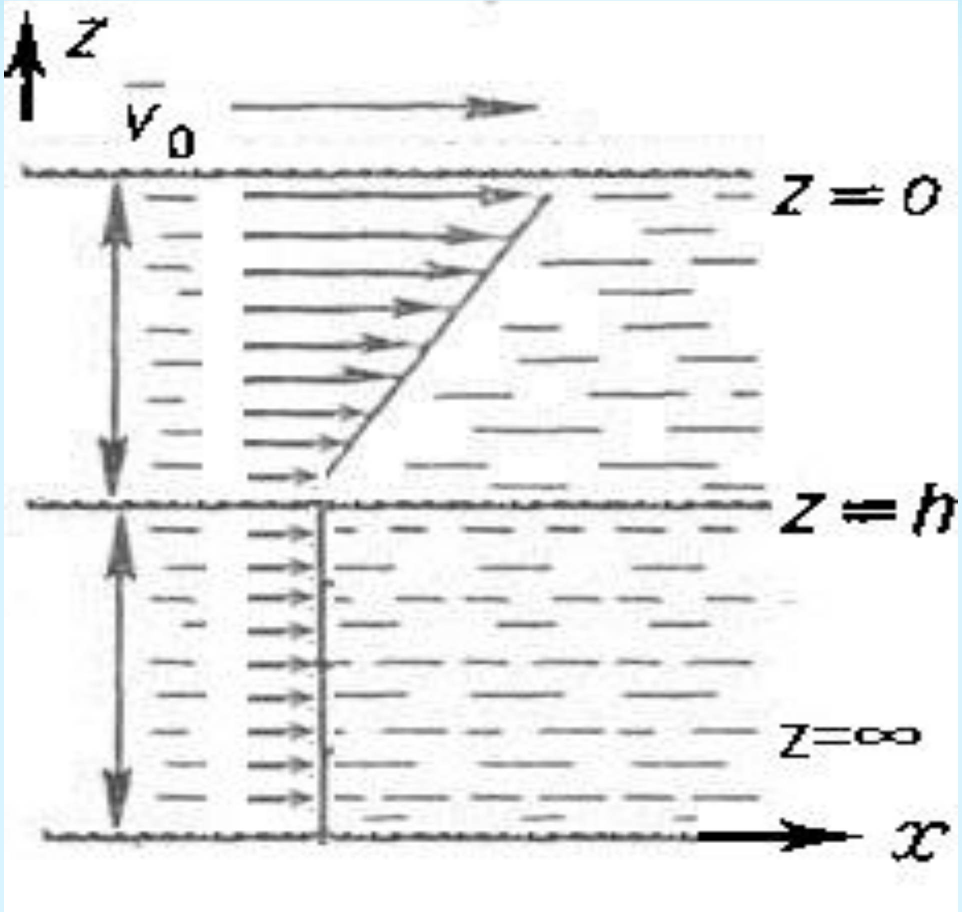
1. *Граница тела и жидкости* (*условие непротекания*): $\vec{V}_n = \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial n} = 0;$

2. *На поверхности* $(z = 0)$: $\begin{cases} U_0 \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + V_0 \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = W & (\textit{кинематическое условие}); \\ P = P_0 - \rho g \zeta & (\textit{динамическе условие}); \end{cases}$

3. *На дне* $(z = -\infty)$: $W = 0;$

4. *На границе раздела* $(z = h_0)$: $\begin{cases} \vec{V}^+ = \vec{V}^- & (\textit{условие неразрывности скорости}); \\ \vec{V}_z^+ = \vec{V}_z^- & (\textit{в силу кусочнолинейного сдвига скорости}); \\ \dfrac{W^+}{(U_0 \dfrac{\partial}{\partial x} + V_0 \dfrac{\partial}{\partial y})^+} = \zeta = \dfrac{W^-}{(U_0 \dfrac{\partial}{\partial x} + V_0 \dfrac{\partial}{\partial y})^-} & (\textit{кинематическое условие}); \\ P^+ = P^- & (\textit{динамическе условие}); \end{cases}$

Сдвиг скорости :



Решение:

- ЛИНЕАРИЗАЦИЯ
- ПРЕОБРАЗОВАНИЕФУРЬЕ
- РЕШЕНИЕОДНОРОДНОГОУРАВНЕНИЯ
- РЕШЕНИЕНЕОДНОРОДНОГОУРАВНЕНИЯ
- РЕШЕНИЕНАГРАНИЦАХ
- ОБРАТНОЕПРЕОБРАЗОВАНИЕФУРЬЕ
- ЧИСЛЕННОЕРЕШЕНИЕ

Решение:

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Переход в систему координат, связанную с телом;

Используется эйлерово приближение;

Представление функцй в виде суммы среднего и возмущения:

$$U = U_0 + U' \qquad (U_0 \gg U')$$

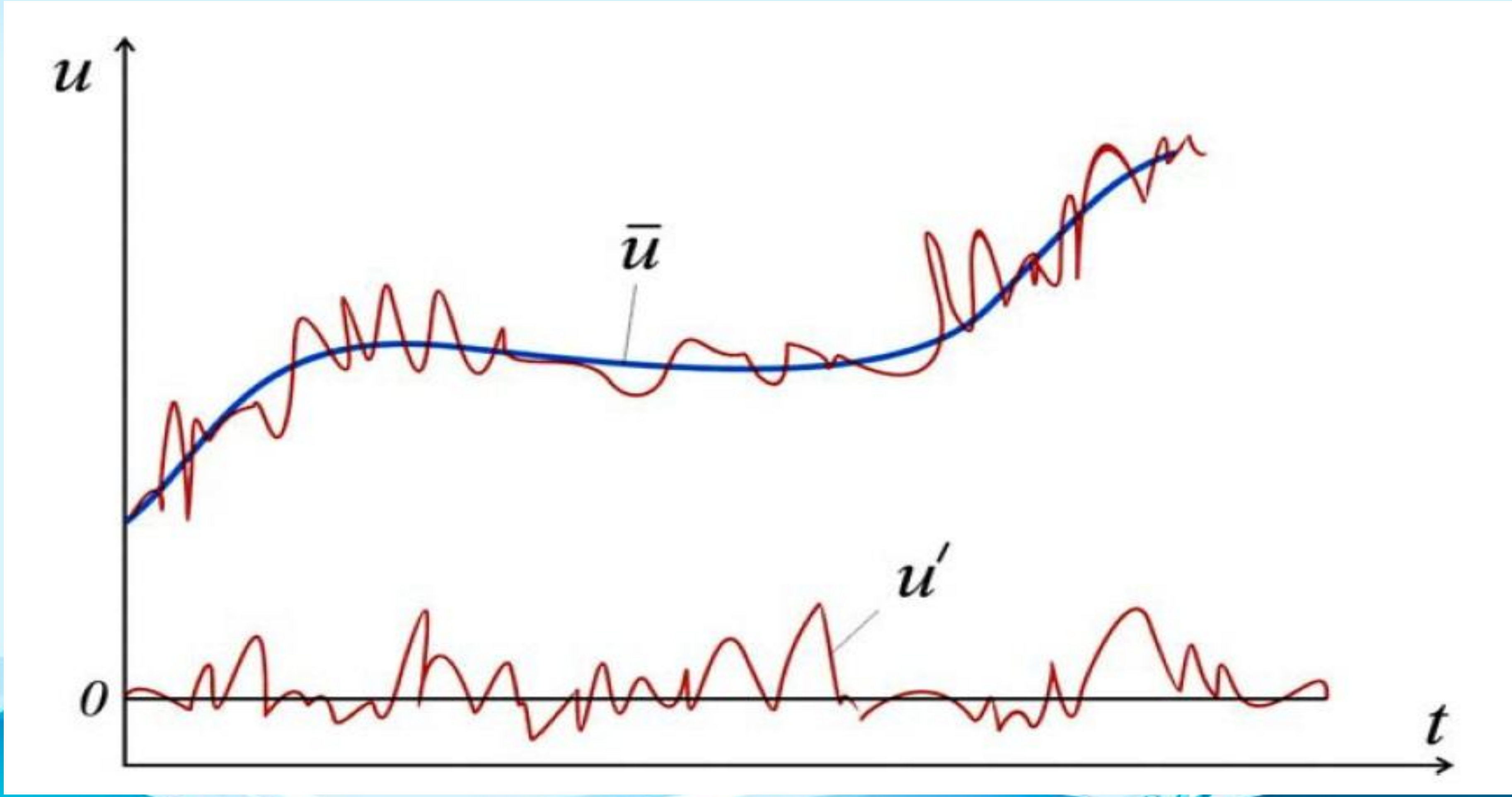
$$V = V_0 + V' \qquad (V_0 \gg V')$$

$$W = W_0 + W' \qquad (W' \gg W_0)$$

$$P = P_0 + P'$$

Решение:

среднее и возмущение



Решение:

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Замена дифференцирования алгебраическим умножением:

$$f(x,y) \to \mathbf{F}(m,n) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \to im\mathbf{F}(m,n)$$

$$\mathbf{F}(m,n)^{-1} \to f(x,y) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \to in\mathbf{F}(m,n)$$

Решение:

РЕШЕНИЕ НА ГРАНИЦАХ:

$$W_{\text{общее нижнего слоя}} = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} + \frac{(-q)}{2} \frac{(z+h)}{|z+h|} e^{-k|z+h|}$$

$$W_{\text{общее верхнего слоя}} = C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz} + \frac{(-q)}{2} \frac{(z+h)}{|z+h|} e^{-k|z+h|}$$

1. *На дне* $(z = -\infty)$: $C_2 = 0$ *из условия ограниченности решения;*
2. *На границе раздела* $(z = h_0)$: *константы* C_3 C_4 *выражаются через* C_1;
3. *На поверхности* $(z = 0)$: *остаётся выразить функцию возмущения;*

Решение:

ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

$$\zeta(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(mx+ny)}\mathrm{Z}(m,n,z,t)\,dmdn$$

Идея – свести к однократному интегралу от действительной функции.

Проблема – интегральная экспонента.

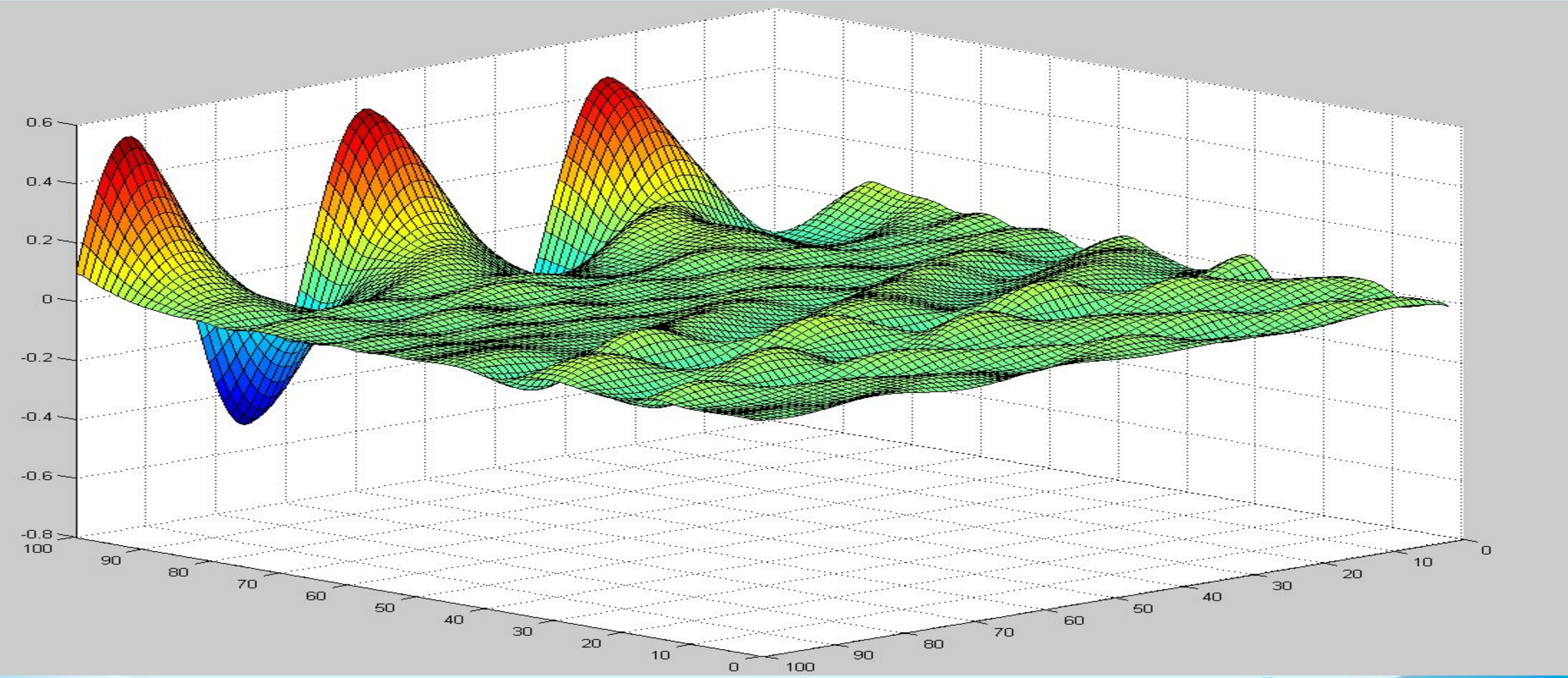
$$Ei=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-Z}}{Z-\lambda k_0}dt$$

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

$$\begin{cases} \zeta = \dfrac{(-2)q}{\pi}\left(\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{hk} cos(kM)\left(\dfrac{(g + AB\cos(\varphi)\cos(\varphi-\beta))}{A^2\cos^2(\varphi)}\right)d\varphi\right) \\ k = -\dfrac{g}{A^2\cos^2(\varphi)} - \dfrac{B\cos(\varphi-\beta)}{A\cos(\varphi)} \\ M = r\cos(\varphi - \theta) = x\,cos(\varphi) + y\,sin(\varphi) \\ A = \sqrt{\mathcal{U}^2(0) + \mathcal{V}^2(0)}\ ; \qquad B = \sqrt{\mathcal{U}_z{}^2(0) + \mathcal{V}_z{}^2(0)} \\ \zeta\text{дип} = \left(\zeta(x-a) - \zeta(x+a)\right) \end{cases}$$

- Метод Гаусса позволяет достичь хорошую алгебраическую точность.

РЕЗУЛЬТАТЫ:



- … И ДО СИХ ПОР ВЫВОДЯТСЯ

Список использованной литературы:

- С.Д. Чижиумов, «Основы гидродинамики»
- А.Б.Мазо, К.А. Поташев, «Гидродинамика»
- Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе, «Теоретическая гидромеханика»
- О.В.Бесов, «Тригонометрические ряды Фурье»
- В.М.Ларионов, С.Е. Филипов «Введение в гидродинамику»
- «Математические модели гидродинамики»
- В.Ф.Санников, «Простое выражение для функции Грина. Задачи о корабельных волнах в глубокой однородной жидкости»
- Simen A. Ellinsgen «Ship waves in the presence of uniform vorticity»

Спасибо за внимание!