

Лекция 16

Термодинамика излучения.
Начала молекулярно-
кинетической теории.

Термодинамика излучения

- Излучение находится в центре внимания физики.
- Квантовая теория излучения представляет излучение как поток фотонов – элементарных частиц.
- Свойства фотонов
 - 1 . Скорость фотонов равна скорости света.
 - 2. Энергия фотона $E = h\nu$.
- $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка,
- ν - частота излучения.

Термодинамика излучения

- Одним из видов излучения является излучение нагретых тел.
- «Нагретое тело» имеет любую температуру, кроме 0 K .
- Электромагнитное излучение, находящееся в равновесии с окружающими телами, называется тепловым, или равновесным.



Термодинамика излучения

- Так как это излучение не выходит наружу, оно называется излучением абсолютно черного тела.
- Равновесное излучение в полости можно рассматривать как термодинамическую систему, обладающую
 - температурой (температура стенок), объемом (объем полости)
 - давлением
- Излучение можно рассматривать как фотонный газ.



Термодинамика излучения

- Обозначим через u плотность энергии излучения, т.е. количество такой энергии в единице объема пространства.

$$• u = \int_0^{\infty} u_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} u_{\lambda} d\lambda.$$

- $u_{\nu} d\nu$ и $u_{\lambda} d\lambda$ - объемная плотность энергии излучения, приходящейся на интервал частот $\nu, \nu + d\nu$ или интервал длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$



Термодинамика излучения

- Функции u_ν и u_λ зависят только от частоты ν (или длины волны λ) и от температуры излучения T , но не зависят от формы и материала стенок полости.

- Формулы Планка.

- $u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$

- $u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right)}$

Термодинамика излучения

- Зависимость спектральной плотности излучения от длины волны.

- $\lambda_m = b/T$

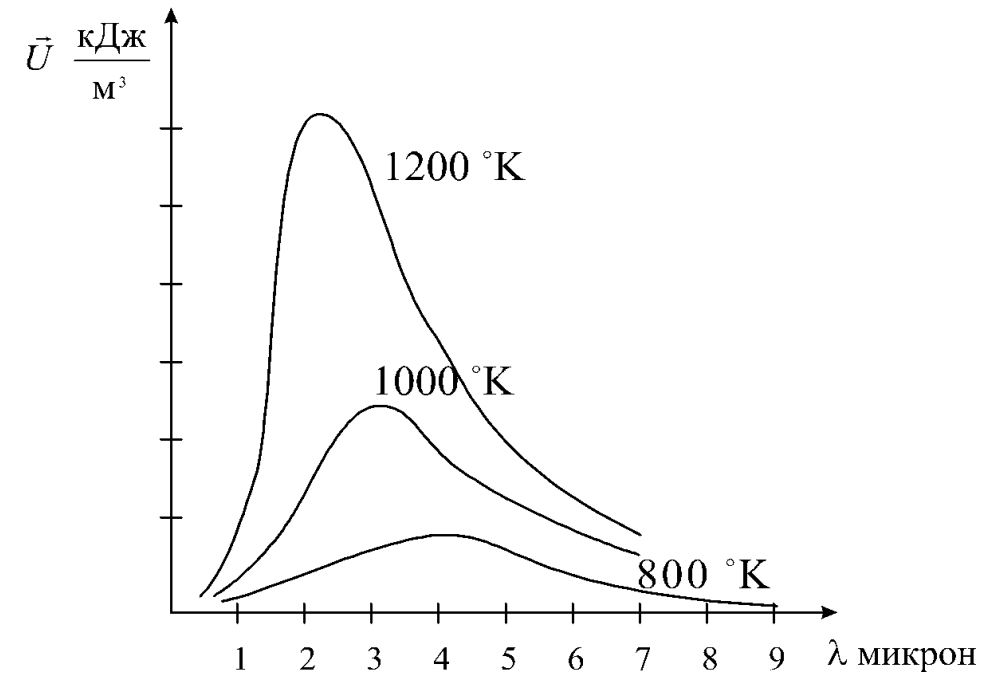
- $b = const = 2898 \text{ мкм}\cdot\text{К}$

- Для солнца

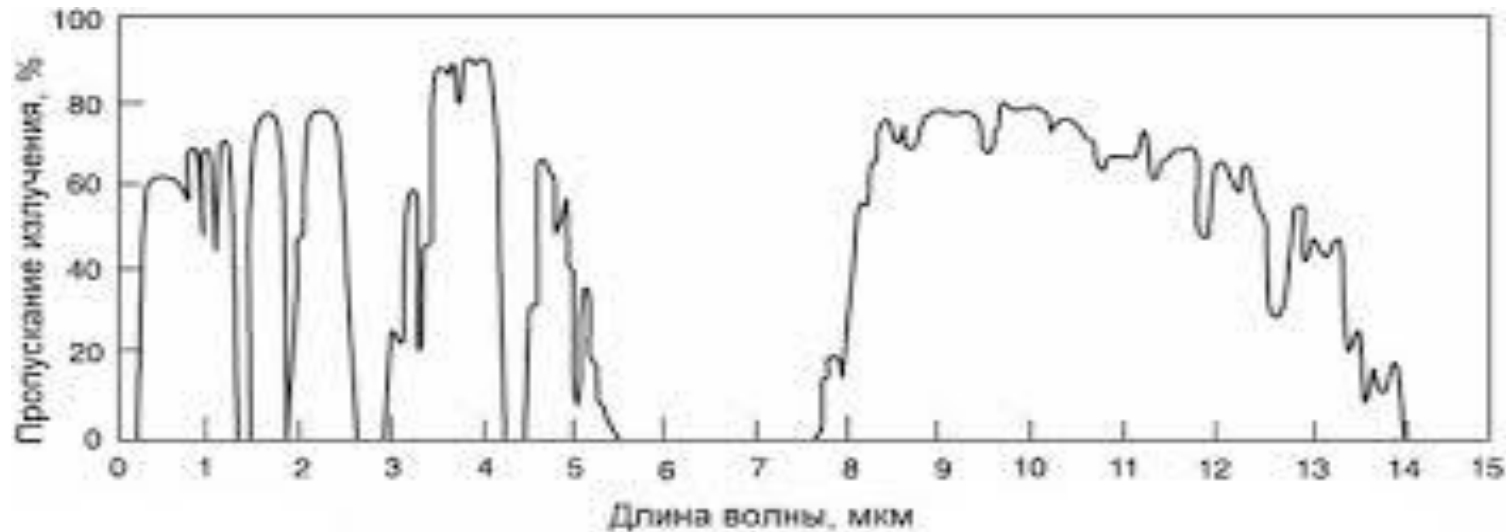
- $\lambda_m = 0,48 \text{ мкм}$

- Для человека

- $\lambda_m \approx 9 \text{ мкм}$



Термодинамика излучения



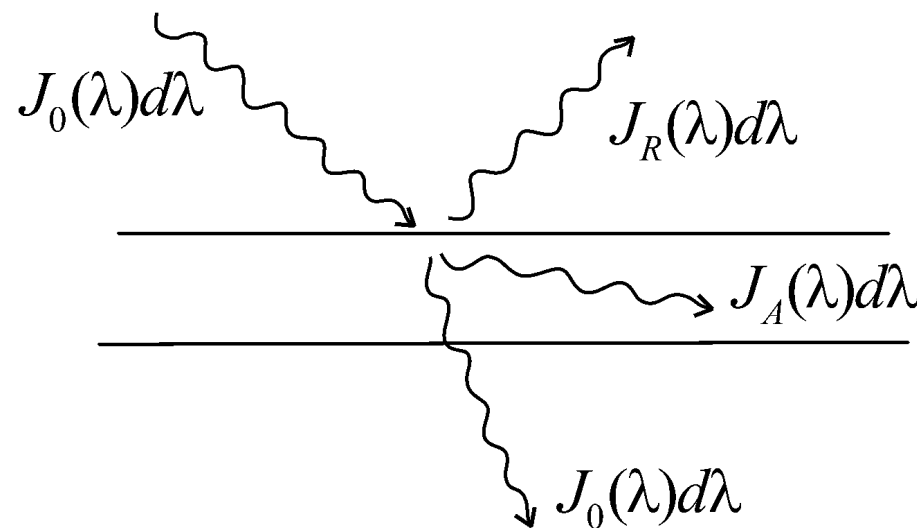
- Прозрачность атмосферы

Взаимодействие излучения с веществом

- На пластинку падает поток излучения
- Энергия, переносимая этим потоком, называется его интенсивностью J .

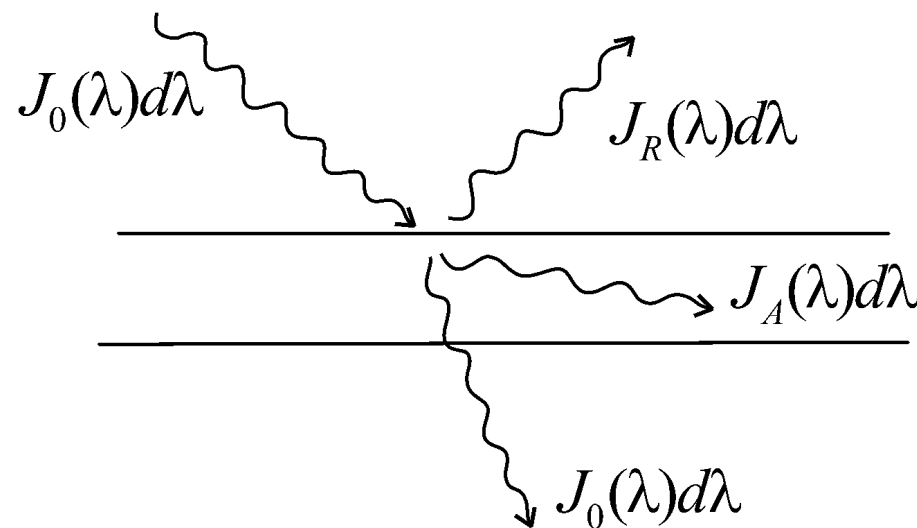
- $J = \int_0^{\infty} J(\lambda) d\lambda$.

- Величина $J(\lambda) d\lambda$ имеют смысл интенсивности излучения, приходящейся на интервал длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$.



Взаимодействие излучения с веществом

- $J_0(\lambda)d\lambda$ интенсивность излучения в диапазоне волн $\lambda, \lambda + d\lambda$, падающего на пластинку из некоторого материала.
- Часть излучения $J_R(\lambda)d\lambda$ отразится от поверхности,
- часть $J_D(\lambda)d\lambda$ пройдёт сквозь пластинку,
- часть $J_A(\lambda)d\lambda$ поглотится в пластинке



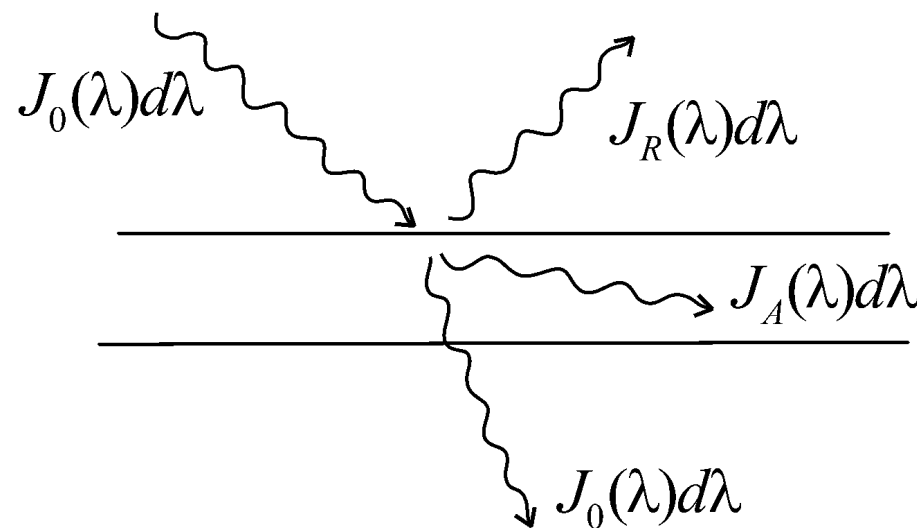
Взаимодействие излучения с веществом

- Сумма этих слагаемых будет равна интенсивности падающего потока света.

- $J_0(\lambda)d\lambda = J_R(\lambda)d\lambda + J_D(\lambda)d\lambda + J_A(\lambda)d\lambda.$

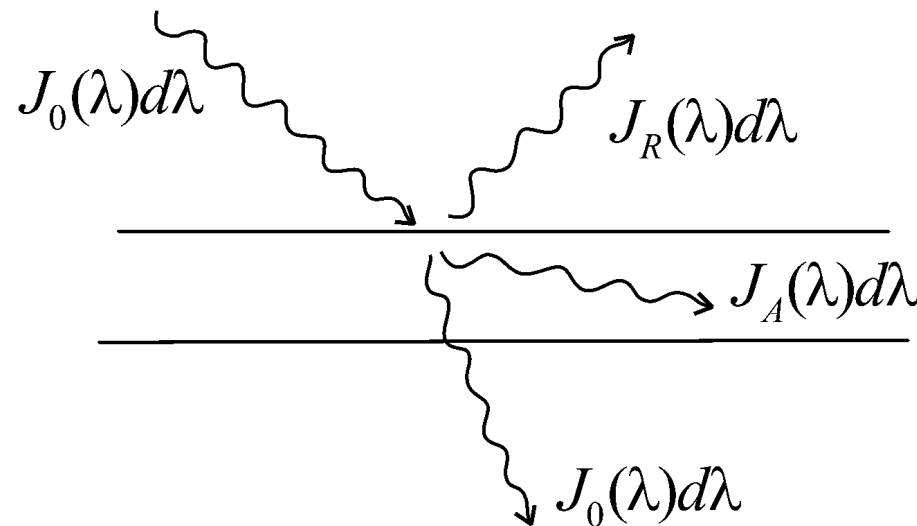
- Поделив на $J_0(\lambda)d\lambda$ получим

- $\frac{J_R(\lambda)}{J_0(\lambda)} + \frac{J_D(\lambda)}{J_0(\lambda)} + \frac{J_A(\lambda)}{J_0(\lambda)} = 1.$



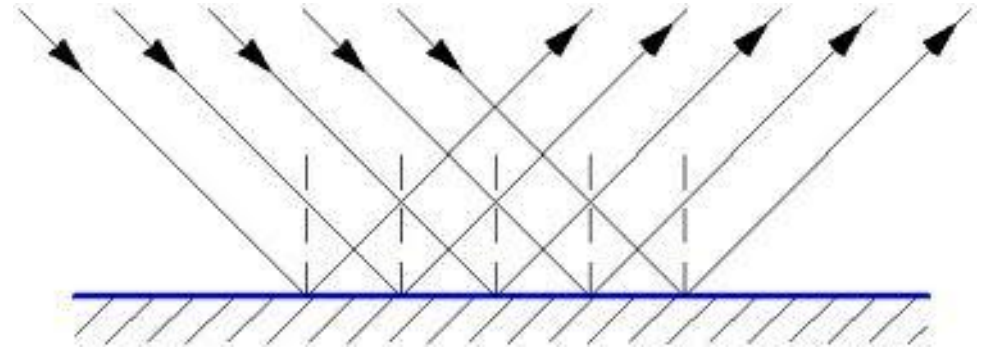
Взаимодействие излучения с веществом

- Величину $R(\lambda) = \frac{J_R}{J_0}$ называют отражательной способностью вещества. Величина $D(\lambda) = \frac{J_D}{J_0}$ называется прозрачностью,
- величина $A(\lambda) = \frac{J_A}{J_0}$ – поглощательной способностью.
- Их сумма равна единице



Взаимодействие излучения с веществом

- Если $R(\lambda) = 1$,
- то $D(\lambda) = A(\lambda) = 0$,
- все падающее на тело излучение
- зеркально отражается от него



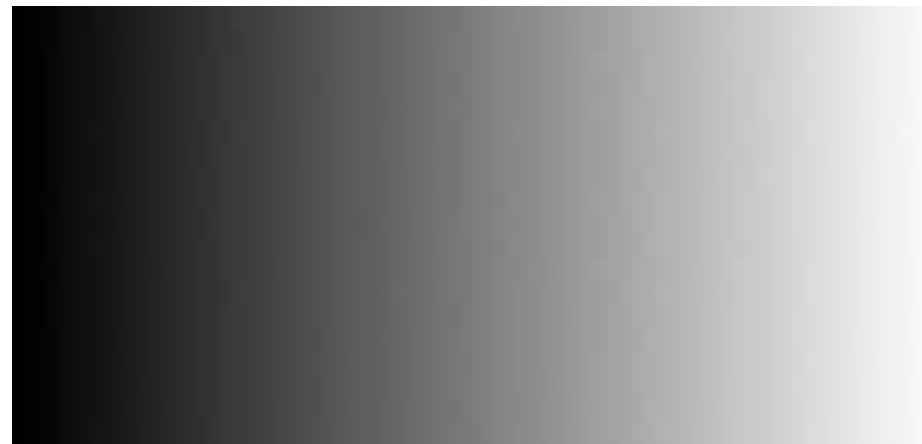
Взаимодействие излучения с веществом

- Если $A(\lambda) = 1$, то все упавшее на тело излучение поглощается им. Такое тело называется *абсолютно черным телом*.



Взаимодействие излучения с веществом

- Серым телом называют тело, которое поглощает только часть падающего излучения.
- Мы будем обозначать его поглощательную способность A_c .
- Естественно что, $A_c < 1$.
- Поглощательную способность абсолютно черного тела мы будем обозначать $A_{\text{ч}} = 1$.



Взаимодействие излучения с веществом

- Излучательные способности
 - Серого тела ε_c
 - Черного тела $\varepsilon_{\text{ч}}$
- Величина $\varepsilon(\lambda)d\lambda$ – равна интенсивности излучения тела в диапазоне $\lambda, \lambda + d\lambda$.



Взаимодействие излучения с веществом

- Поместим в полость, стенки которой имеют температуру T , серое и черное тела.
- При равновесии $T_{\text{ч}} = T_{\text{с}} = T_{\text{излучения}} = T_{\text{стенок}}$, а количество поглощаемой каждым телом энергии равно количеству излучаемой.
- Плотность энергии излучения при равновесии везде будет одинакова
- На единицу поверхности падает одинаковый поток излучения $J_0(\lambda)d\lambda$.

Взаимодействие излучения с веществом

- При равновесии поток поглощенной энергии должен быть равен потоку энергии излучения
- Для черного тела
 - $A_{\text{ч}}J_0(\lambda)d\lambda = \varepsilon_{\text{ч}}d\lambda$ и
- Для серого тела
 - $A_{\text{с}}J_0(\lambda)d\lambda = \varepsilon_{\text{с}}d\lambda.$
- Поделив последнее выражение на предыдущее, получим
 - $\frac{A_{\text{с}}}{A_{\text{ч}}} = \frac{\varepsilon_{\text{с}}}{\varepsilon_{\text{ч}}}.$
- Поскольку $A_{\text{ч}} = 1$, то
 - $\frac{\varepsilon_{\text{с}}}{A_{\text{с}}} = \varepsilon_{\text{ч}}.$

Взаимодействие излучения с веществом

- Закон Кирхгофа
 - *Отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела, а зависит от излучательной способности абсолютно черного тела, являющейся функцией частоты и температуры*

$$\bullet \frac{\varepsilon_c}{A_c} = \varepsilon_{\text{ч}}.$$

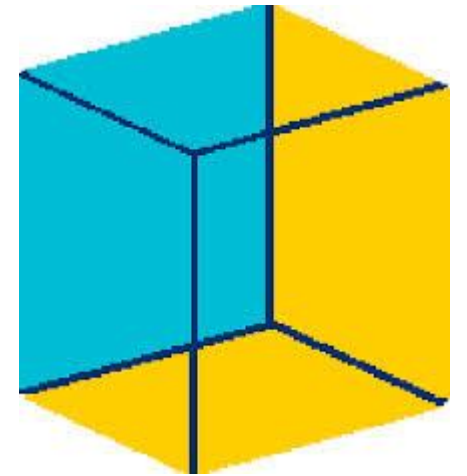
Закон Стефана-Больцмана

- Фотон поглощается стенкой.
- Он передает стенке импульс, равный E/c , где E – энергия фотона.
- По принципу детального равновесия стенка должна испустить такой же фотон в том же направлении.
- При этом она получит импульс отдачи также равный E/c .
- Суммарный импульс, получаемый стенкой в результате взаимодействия с фотонным газом равен $2 E/c$.

Закон Стефана-Больцмана

- Концентрация фотонов равна n .
- В сторону стенки в каждый момент времени летит $1/6$ часть фотонов.
- До площадки S на стенке в единицу времени долетит объем cS , содержащий ncS фотонов.
- Импульс, полученный площадкой S , а значит действующая на нее сила F равна

$$\bullet F = \frac{2EncS}{6c} = \frac{1}{3}EnS = \frac{1}{3}uS,$$



Закон Стефана-Больцмана

- u – плотность энергии фотонного газа (излучения).
- Давление фотонного газа P
 - $P = \frac{1}{3}u.$
- Внутренняя энергия фотонного газа U , заключенного в полость объемом V равна
 - $U = uV.$
-

Закон Стефана-Больцмана

- Воспользуемся формулой из Лекции 13, выражающую связь между внутренней энергией термодинамической системы и давлением

- $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P.$

- Для фотонного газа

- $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = u$

- $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{3} \frac{du}{dT}$

Закон Стефана-Больцмана

- Получаем дифференциальное уравнение

- $u = \frac{1}{3} \frac{dU}{dT} T - \frac{1}{3} u,$

- или

- $4u = T \frac{du}{dT}.$

- Его решением является выражение

-

- $\ln u = 4 \ln T + \text{const}.$

Закон Стефана-Больцмана

- - $u = \sigma T^4$.
 -
- Закон Стефана-Больцмана:
- *Плотность энергии излучения пропорциональна четвертой степени температуры.*
- Коэффициент пропорциональности $\sigma = 7,64 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\text{К}}$ определен экспериментально.

Закон Стефана-Больцмана

- Можно также показать, что плотность потока излучения абсолютно черного тела определяется формулой

$$• j = \frac{1}{4} \sigma T^4.$$

- Такая сильная зависимость от температуры приводит к тому, что в обычных условиях при температурах выше 400-500 °С теплообмен осуществляется за счет излучения.
- Например, Солнце, имея температуру 6000 °К, излучает огромную энергию, так что на орбите Земли поток этого излучения составляет около 1600 Вт/м².
- Если считать Солнце и Землю абсолютно черными телами, для равновесной температуры Земли мы получим температуру около 0 °С

Начала молекулярно-кинетической теории

- Экспериментальный материал термодинамику обобщает и систематизирует молекулярно-кинетическая теория.
- Теория поддерживает атомистическое мировоззрение,
- Теория связывает воедино механику и термодинамику
- Теория рассматривает обширный класс явлений, который невозможно ни объяснить, ни описать другими способами

Начала молекулярно-кинетической теории

- Мы будем опираться на модель идеального газа – простейшую из известных молекулярных моделей.
- Уравнение состояния идеального газа
 - $PV = \frac{M}{\mu} RT.$
- Идеальный газ – это газ хаотически движущихся материальных точек.
- «Точки» не имеют размера и единственным видом их взаимодействия друг с другом и со стенками является обмен импульсами.

Начала молекулярно-кинетической теории

- Молекулярно-кинетическая теория опирается на законы механики – в первую очередь на законы сохранения энергии и импульса.
- В основе ее математического аппарата лежит теория вероятностей.

Элементы теории вероятностей

- Событиями будем называть явления, которые в результате некоторого опыта могут произойти или не произойти.
- Если в данном опыте событие обязательно происходит, его называют достоверным, если оно не может произойти, его называют невозможным.



Элементы теории вероятностей

- Вероятностью события это отношение опытов, в котором это событие произошло к общему количеству опытов.
- Подбросим вращающуюся монетку.
- Равновозможных случая два или выпадение «орла» или «решки», и событие выпадения «орла» одно из равновозможных. Соответственно вероятность выпадения «орла» равна $1/2$.
- Таким образом вероятность выпадения «орла» дважды подряд, равна $1/4$, а вероятность выпадения хотя бы одного «орла» при двух бросаниях будет равна $3/4$.



Элементы теории вероятностей

- Пусть в коробке находится 35 красных, 40 зелёных и 25 белых шаров, всего их 100
- Вероятность вынуть красный шар равна $35/100$,
- белый шар $1/4$,
- зелёный $4/10$.
- Лишь при достаточно большом числе испытаний получаемые результаты будут стремиться к указанным выше.



Элементы теории вероятностей

- Суммой событий A и B , мы назовем событие состоящее в появлении или A или B и обозначим $A + B$. Соответствующая вероятность будет $P(A + B) = P(A) + P(B)$
- Вероятность вытащить при первой попытке цветной шар будет $\frac{35}{100} + \frac{4}{10} = 0,75$.
- Произведением событий A и B назовем событие, состоящее в появлении и A и B .
- Если события независимы, т.е. вероятность появления B не зависит от появления A то соответствующая вероятность будет обозначаться $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Элементы теории вероятностей

- Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно, какое именно.
- Случайные величины бывают дискретными. Примером может служить число попаданий в мишень неподготовленным стрелком при десяти выстрелах.
- Примером непрерывной случайной величины может служить расстояние от центра мишени при выстрелах.



Элементы теории вероятностей

- Тот факт, что в результате опыта случайная величина приняла некоторое значение есть событие, которое может характеризоваться вероятностью P .
- Это – вероятность возможных значений дискретной случайной величины (для краткости говоря «вероятность величины X).
- Сумма вероятностей всех значений дискретной случайной величины равна 1.

Элементы теории вероятностей

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,05	0,1	0,13	0,15	0,17	0,15	0,1	0,07	0,04	0,02

- Законом распределения (или просто – распределением) случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.
- Законом распределения дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

Элементы теории вероятностей

- Тот факт, что в результате проведения опытов непрерывная случайная величина приняла значения, лежащие в интервале $[x, x+dx]$ есть событие, характеризуемое элементом вероятности dW . Это – вероятность того, что возможные значения случайной величины окажутся в этом интервале.



Элементы теории вероятностей

- Плотностью вероятности случайной величины X называется функция $f(x)$, такая, что $dW = f(x)dx$.
- Физики называют эту функцию функцией распределения.
 - $\int f(x)dx = 1$

в случае, когда интегрирование ведется по всей области возможных значений X .



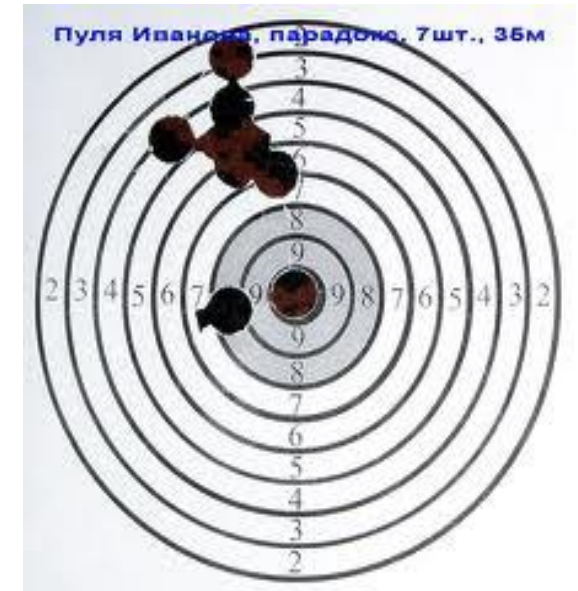
Средние значения случайной величины

- Вычисление средних по большому числу молекул значений различных величин: скорости, энергии и т.д. является одной из задач молекулярно-кинетической теории.
- Эта задача решается методами теории вероятностей.
- Средние значения мы будем обозначать скобками - $\langle X \rangle$.

Средние значения случайной величины

- Предположим, что вы сделали 100 выстрелов по мишени и решили подсчитать среднее значение своих результатов.
- Вы можете сделать это просто путем вычисления среднего арифметического

- $$\langle X \rangle = \frac{3+5+8+10+\dots+7}{100}.$$



Средние значения случайной величины

- Другой способ вычисления среднего, использующий умножение.
- Предположим, что в единицу вы попали 5 раз, в двойку – 10, в тройку – 13,, в десятку 2 раза попали.
- Тогда ту же среднюю величину $\langle X \rangle$ вы будете считать иначе

- $$\langle X \rangle = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 13 + \dots + 10 \cdot 2}{100} = 1 \cdot \frac{5}{100} + 2 \cdot \frac{10}{100} + \dots + 10 \cdot \frac{2}{100}.$$



Средние значения случайной величины

- Обратим внимание на то, что дроби в этой сумме как раз и представляют собой вероятности каждой из этих величин.
- В итоге мы можем записать формулу для вычисления среднего значения дискретной случайной величины

$$\bullet \langle X \rangle = \sum_i x_i p_i,$$

- Здесь x_i – возможные значения случайной величины, p_i – соответствующие им вероятности.
- Суммирование ведется по всем возможным значениям случайной величины.



Средние значения случайной величины

- Среднее значение непрерывной случайной величины можно вычислить аналогичным образом, заменив суммирование интегрированием

-

$$\bullet \langle X \rangle = \int x dW(x) = \int x f(x) dx,$$

-

- где интеграл берется по всей области возможных значений случайной величины.

Идеальный газ с молекулярно-кинетической точки зрения

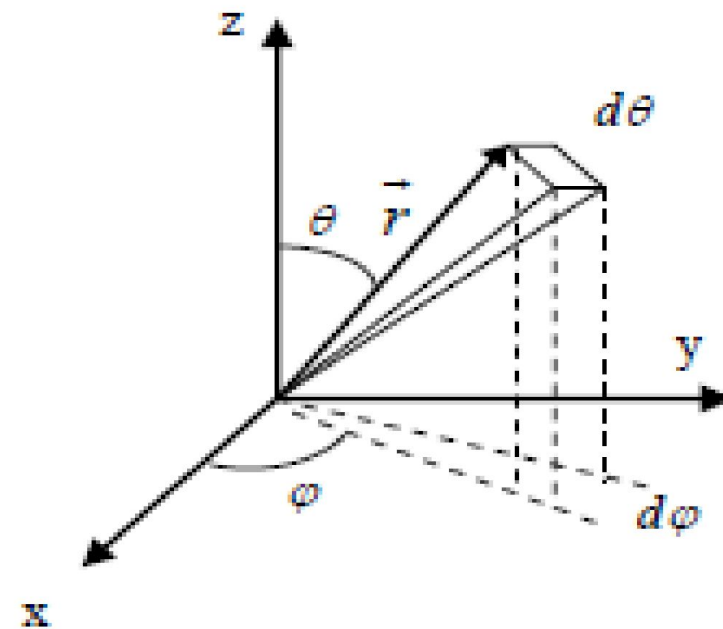
- С точки зрения молекулярной теории идеальный газ – это теоретическая модель газа, в которой пренебрегается взаимодействием между молекулами (за исключением взаимодействий в краткие моменты столкновений).
- В воздухе, например, среднее расстояние между молекулами примерно в 10^3 больше их размера, поэтому очевидно, что при рассмотрении многих явлений взаимодействием молекул можно пренебречь.

Идеальный газ с молекулярно-кинетической точки зрения

- Молекулы идеального газа находятся в основном в состоянии равномерного и прямолинейного движения.
- Все направления движения в отсутствие внешнего поля равновероятны.
- Движение имеет хаотический характер, так как после каждого столкновения скорости и направления движения существенно образом меняются.

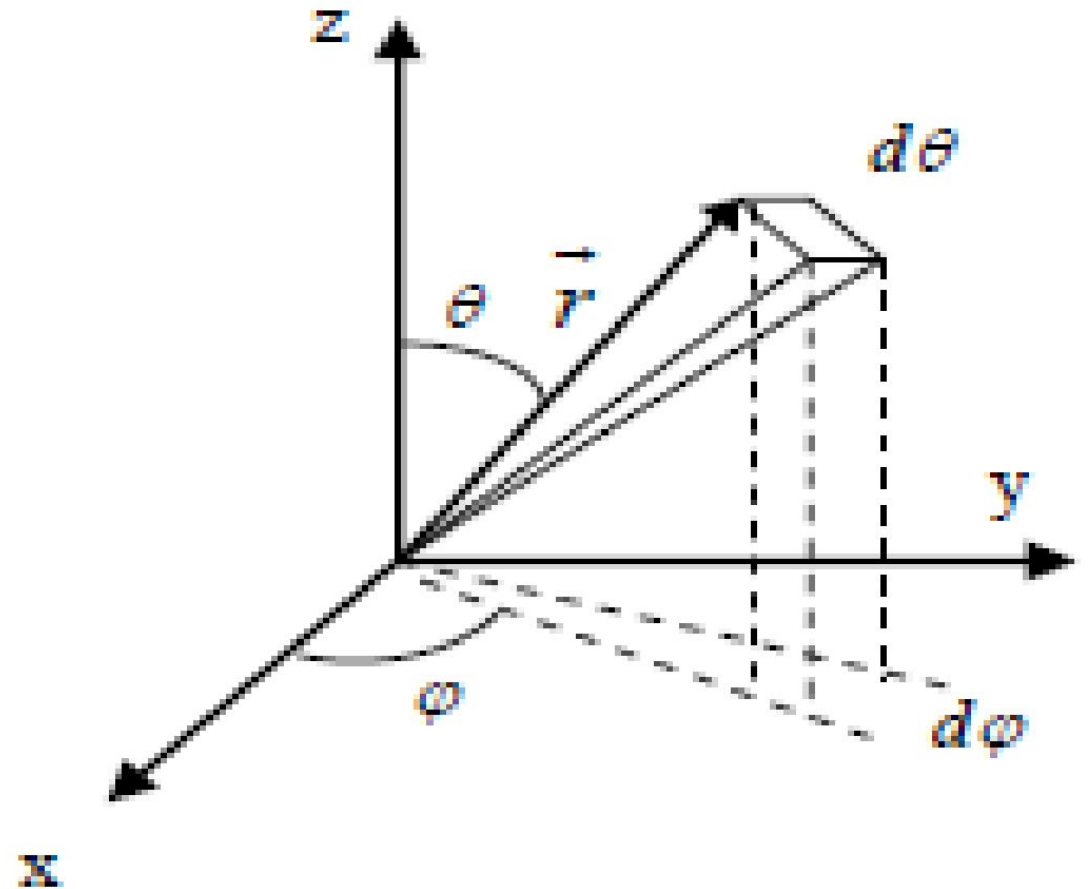
Направления движения молекул

- Выберем некоторое направление, характеризуемое углами θ и ϕ сферической системы координат
- Нас интересует доля молекул, движущихся именно в этом направлении
- Можно говорить только о вероятности иметь направление в малых интервалах углов от θ до $\theta + d\theta$ и от ϕ до $\phi + d\phi$. Эти углы задают в пространстве 4 направления



Направления движения молекул

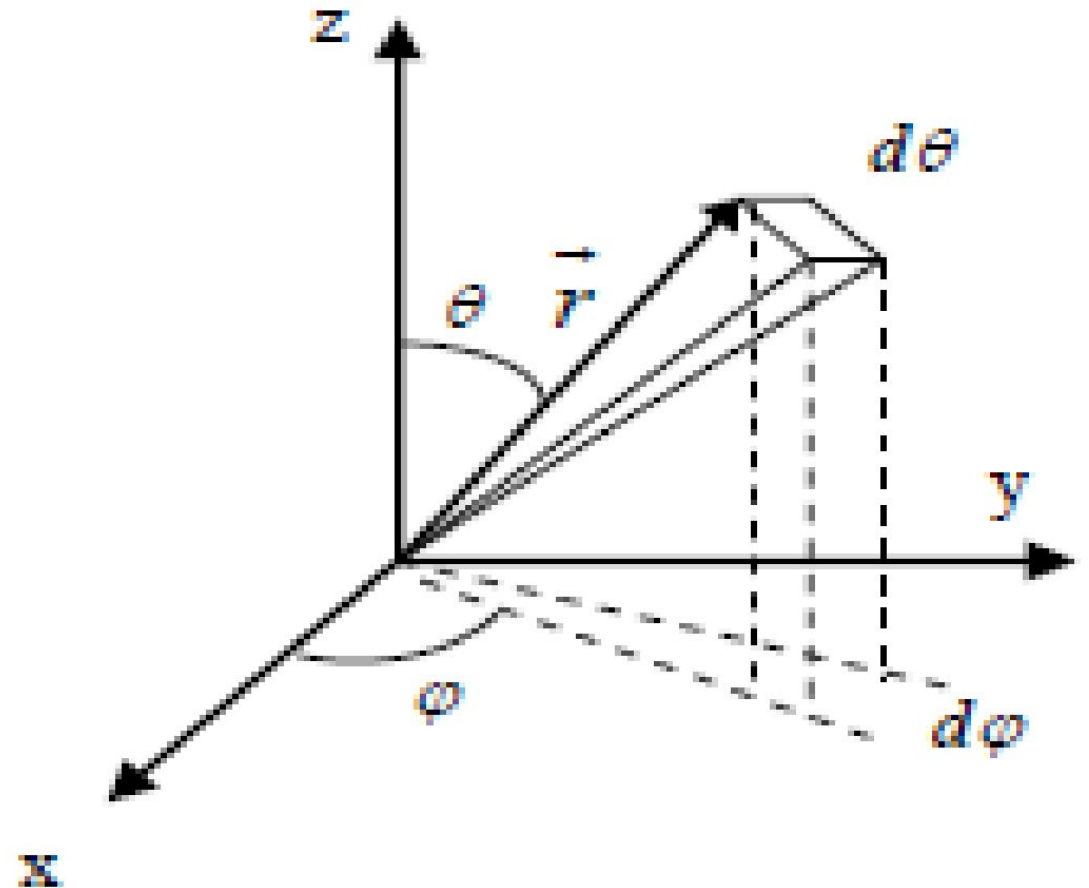
- На единичной сфере задаваемые этими направлениями линии задают вершины криволинейного четырехугольника малой площади
- $dS = \sin\theta d\theta d\phi = d\Omega$,
- где $d\Omega$ – элемент так называемого телесного угла.



Направления движения молекул

- Вероятность попадания единичного вектора, направленного вдоль движения молекулы, именно в данный элемент поверхности есть отношение этой площади к полной площади поверхности единичной сферы (равной 4π):

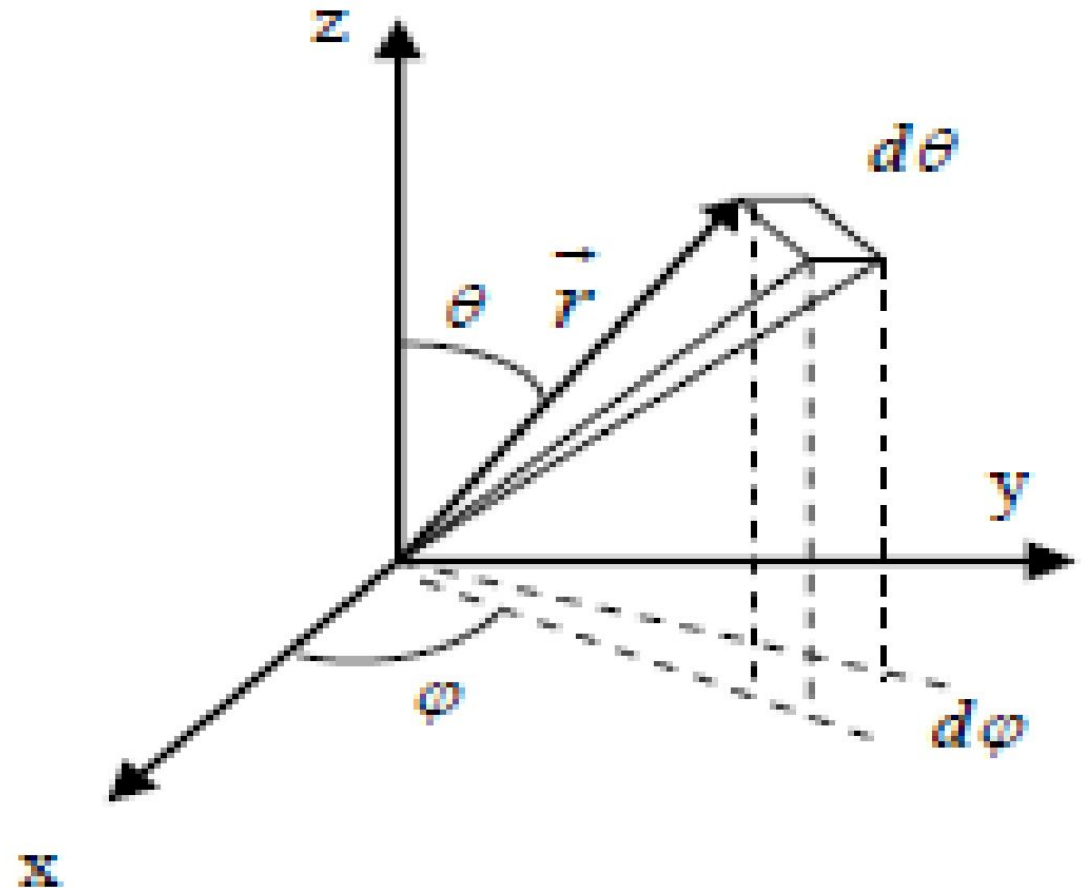
- $$dW(\theta, \varphi) = \frac{dS}{4\pi} = \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}.$$



Направления движения молекул

- При аксиальной симметрии от угла φ ничего не зависит. Вероятность тогда можно проинтегрировать по углам φ и получить $dW(\theta) = \frac{\sin \theta d\theta}{2}$. При полном же интегрировании по всей единичной сфере суммарная вероятность иметь все возможные направления равна единице:

- $$\int dW(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 1$$



Вероятность значения скорости

- Абсолютная величина скорости меняется от нуля до бесконечности.
- Будем говорить о вероятности $dW(v)$ иметь модуль скорости в интервале от v до $v + dv$. Суммарная вероятность иметь всевозможные скорости, как и вероятность двигаться по всем направлениям, равна единице

-

$$\int_0^{\infty} dW(v) = 1$$

Среднее значение скорости

- Среднее значение модуля скорости выражается формулой

-

$$\bullet \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v dW(v).$$

-

- Найти среднее значение квадрата скорости можно аналогичным способом

-

$$\bullet \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 dW(v).$$

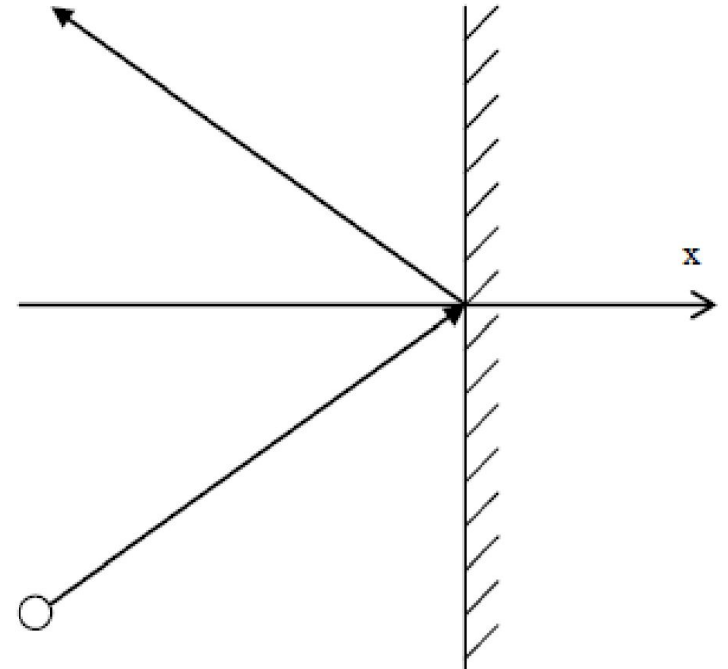
Среднее значение скорости

- Вероятность $dW(v_x)$ иметь скорость v_x вдоль направления x ,
Вероятность $dW(v_y)$ иметь скорость v_y вдоль направления y ,
Вероятности $dW(v_z)$ иметь скорость v_z вдоль направления z .
- Эти проекции скоростей могут быть как положительными, так и отрицательными, и меняются в бесконечных пределах
- Например, среднеквадратичная скорость $\langle v_x^2 \rangle$ дается выражением

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_0^{\infty} v_x^2 dW(v_x).$$

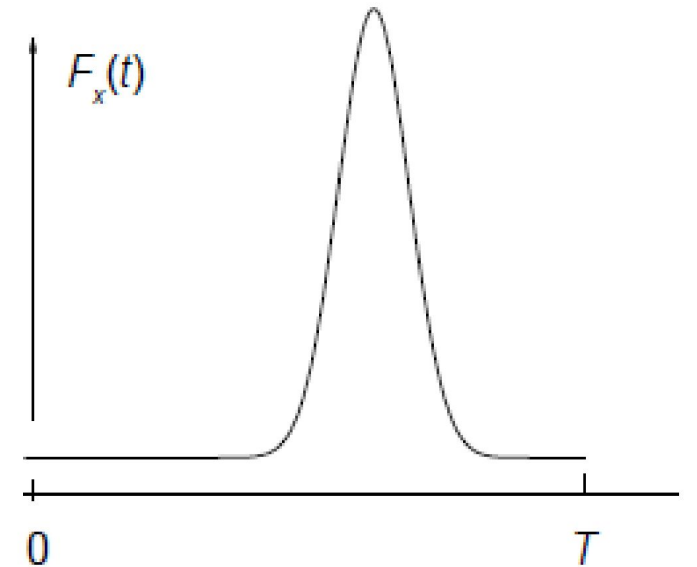
Давление идеального газа

- Давление в сосуде с газом создается ударами молекул о его стенку.
- Будем считать удары абсолютно упругими.
- Сначала рассмотрим удар одной молекулы.
- Ось, перпендикулярную стенке, обозначим за x .



Давление идеального газа

- При соударении стенка со стороны молекулы испытывает зависящую от времени силу в направлении оси x ,
 - $F_x(t)$,
- которая изменяется от нуля до некоторой максимальной величины в момент наиболее сильного контакта со стенкой и спадает опять до нуля после столкновения



Давление идеального газа

- Выберем некоторый интервал времени T , который существенно превышает длительность столкновения и рассчитаем среднюю действующую в интервале от 0 до T силу. Эта средняя сила определяется интегралом

- $$\langle F_x \rangle = \frac{\int_0^T F_x(t) dt}{T}$$

- Записав второй закон Ньютона в виде

- $$\vec{F}(t) dt = d\vec{p}(t),$$

- можно выразить $\langle F_x \rangle$ следующим образом

- $$\langle F_x \rangle = \frac{\int_0^T F_x(t) dt}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T dp_x = \frac{1}{T} (p_x(\text{до удара}) - p_x(\text{после удара})) = 2 \frac{mv_x}{T}.$$

Давление идеального газа

- Выберем теперь на стенке сосуда некоторую площадку S и учтем, что в единицу времени о площадку ударяется много молекул. Найдем суммарный импульс, который получает стенка

-

$$\bullet \langle F_x \rangle = \frac{2m}{T} \sum_i v_{ix}.$$

- Значения компонент скоростей
- Целесообразно разбить молекулы на группы, обладающие близкими значениями проекций скорости v_x .
- Такие молекулы передают стенке одинаковый импульс.
-

Давление идеального газа

- Из всех молекул, налетающих за время T на площадь S , выберем только те, которые имеют скорость в интервале от v_x до $v_x + dv_x$.
- Число таких молекул обозначим за $dN(v_x, T, S)$.
- Так как молекулы данной группы подлетают к стенке из примыкающего к ней объема величины $v_x TS$, то для $dN(v_x, T, S)$
-

$$dN(v_x, T, S) = v_x TS dW(v_x)$$

Давление идеального газа

- Разбиение на группы позволяет рассматривать v_x как

- $\langle F_x \rangle = \frac{2m}{T} STn \int_0^\infty v_x^2 dW(v_x).$

-
- Интеграл в этом выражении есть не что иное, как $\langle v_x^2 \rangle$.
- Поскольку только половина молекул в объеме летит в сторону стенки, то следует принять $n = n/2$. В итоге получаем

- $\langle F_x \rangle = mSn \langle v_x^2 \rangle.$

Давление идеального газа

Из теоремы Пифагора следует

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

Из условия равной вероятности всех направлений получаем

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

то

$$P = \frac{2n}{3} \frac{\langle mv^2 \rangle}{2}.$$

Таким образом, мы установили, что давление пропорционально средней кинетической энергии молекул.

Температура

- Вопрос о связи температуры средней энергии молекул газа мы обсуждали в лекции 12.
- «Если два тела с разной температурой привести в контакт, то рано или поздно их температуры станут равными.
- Ровно то же самое произойдет со средней двух систем хаотически движущихся частиц, если так или иначе позволить им обмениваться энергией: средние энергии будут выравниваться.
- Это наблюдение позволило высказать гипотезу о том, что температура пропорциональна средней кинетической энергии молекул.»

Температура

- Для одноатомного газа установлено следующее соотношение

-

- $\frac{3}{2}kT = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}$.

- Средние кинетические энергии движения вдоль декартовых осей равны

-

$$\frac{m\langle v_x^2 \rangle}{2} = \frac{m\langle v_y^2 \rangle}{2} = \frac{m\langle v_z^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$

Уравнение идеального газа

- $P = nkT$
-
- Это уравнение идеального газа, которое мы теперь получили не как обобщение экспериментальных данных, а в результате расчета, основанного на молекулярно-кинетической модели.

До следующей лекции

