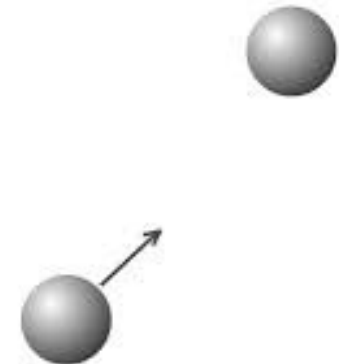


# Лекция 18

## Явления переноса в газах

# Столкновения молекул

- В газовой среде могут иметь место неоднородности концентрации компонентов газовой смеси, скорости перемещения макроскопических масс вещества, температуры.
- Равновесие в газе устанавливается в результате столкновений между молекулами.
- Для этого достаточно, чтобы каждая молекула испытала одно-два столкновения.

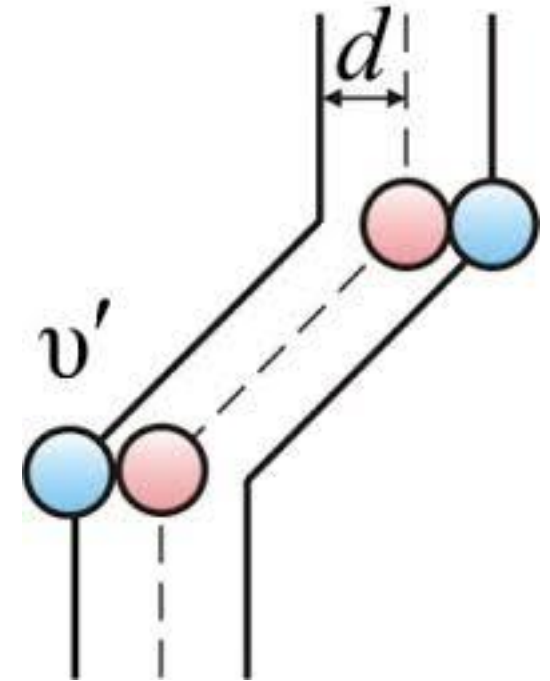


# Столкновения молекул

- Для упрощения расчета предположим, что движется только одна молекула с постоянной скоростью  $v$ , а все остальные молекулы неподвижны.
- Будем называть движущуюся молекулу молекулой  $A$ . Вообразим, что с молекулой  $A$  жестко связана концентрическая с ней твердая сфера  $S$  вдвое большего диаметра.
- Назовем эту сферу сферой ограждения молекулы  $A$ . В момент столкновения расстояние между центрами сталкивающихся молекул равно диаметру молекулы  $d$ .

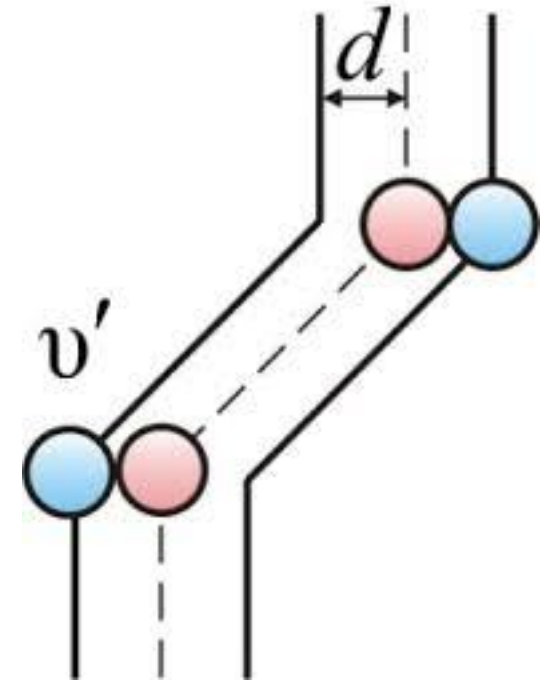
# Столкновения молекул

- Между двумя последовательными столкновениями молекулы А ее сфера ограждения описывает цилиндр, длина которого и есть свободный пробег молекулы А. Из таких цилиндров складывается поверхность, описываемая с течением времени сферой ограждения
- Если центр другой молекулы лежит внутри или на боковой поверхности этого цилиндра, то она столкнется с молекулой А. В противном случае столкновения не произойдет.



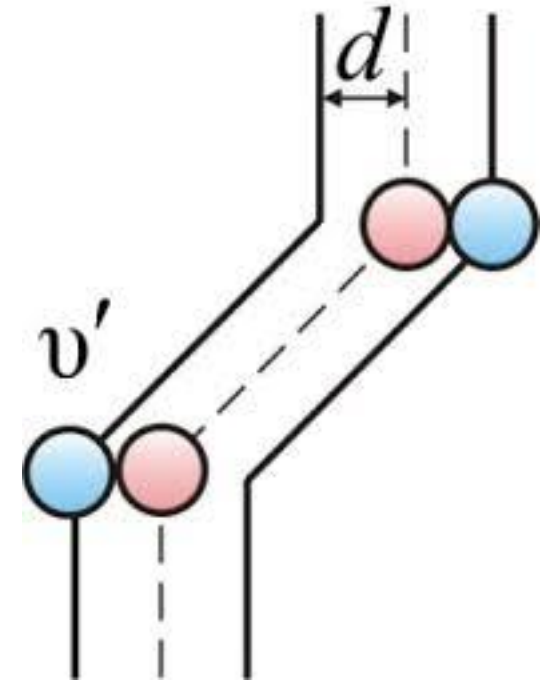
# Столкновения молекул

- Пусть  $V$  – объем ломаного цилиндра, описываемого сферой  $S$  в единицу времени. Среднее число  $z$  столкновений движущейся молекулы с остальными молекулами в единицу времени равно среднему числу последних в объеме  $V$ ,
  - $z = Vn$ ,
- где  $n$  – число молекул в единице объема.



# Столкновения молекул

- Тогда можно пренебречь теми частями объема, которые приходятся на изломы цилиндра,
- При вычислении  $V$  цилиндр можно считать прямым, а его высоту равной относительной скорости молекулы  $\langle v_{\text{отн}} \rangle$ .
- В этом приближении,  $V = \sigma v_{\text{отн}}$  где  $\sigma = \pi d^2$  – площадь поперечного сечения цилиндра.
- Эту величину называют также газокинетическим сечением молекулы.



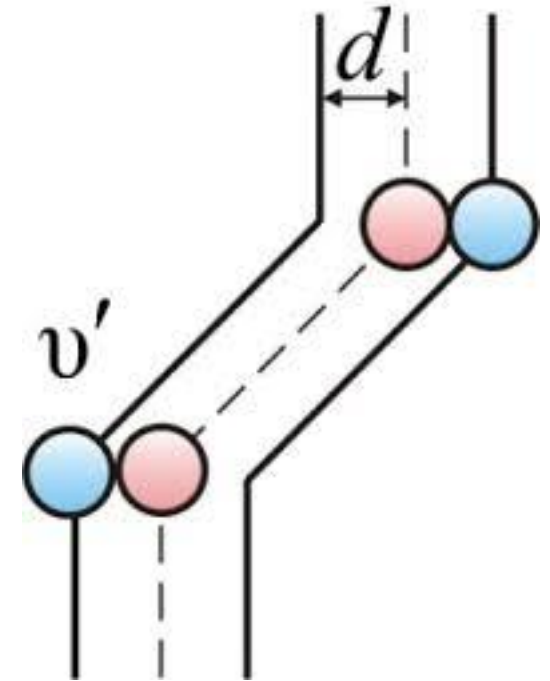
# Длина свободного пробега

- $z = n\sigma \langle v_{\text{отн}} \rangle$
- Отсюда время  $t$ , которое молекула движется без столкновений равно

$$\bullet t = \frac{1}{z} = \frac{1}{n\sigma \langle v_{\text{отн}} \rangle}$$

- В течение этого времени молекула движется со средней скоростью

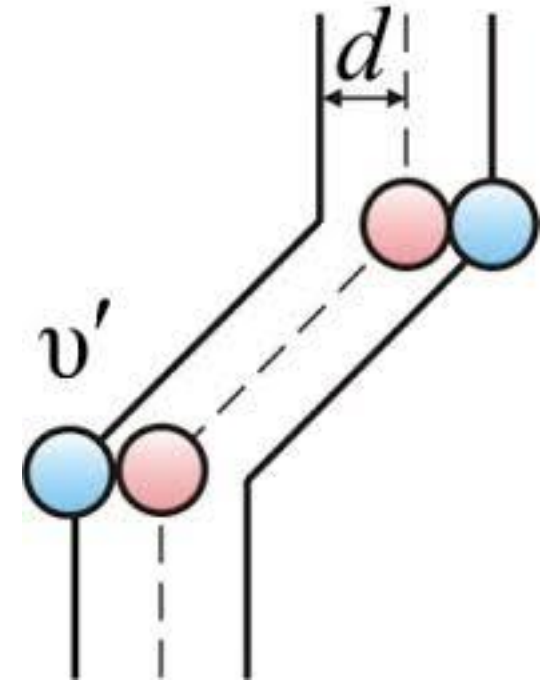
$$\bullet \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$



# Длина свободного пробега

- Средняя длина свободного пробега равна
- 
- 

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{n\sigma \langle v_{\text{отн}} \rangle}$$

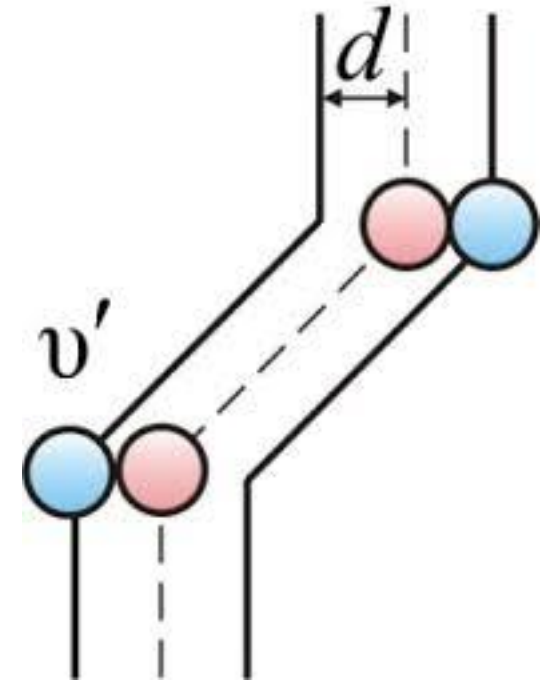




# Длина свободного пробега

- Нам неизвестно значение средней относительной скорости молекул.
- Относительное движение сводится к движению тела приведенной массы  $\mu$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



# Средняя относительная скорость

- Чтобы получить распределение молекул по относительным скоростям, достаточно в распределении Максвелла по абсолютным скоростям заменить массу на приведенную массу.
- $dW(v_{\text{отн}}) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} v_{\text{отн}}^2 \exp\left(-\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2kT}\right) dv_{\text{отн}}$ .
- В таком случае среднюю относительную скорость можно найти путем замены в массы на приведенную массу

•

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}$$

# Длина свободного пробега

- Если газ состоит из молекул одного типа, то  $\mu = m/2$ . В таком случае средняя относительная скорость будет равна

- 

- $\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle,$

- и соответственно

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

# Длина свободного пробега

- Длина свободного пробега не зависит от температуры.
- Физический смысл этого явления можно понять, если вспомнить, что с повышением температуры увеличивается средняя скорость молекул.
- Они при этом быстрее двигаются, но и чаще сталкиваются, в итоге ничего не выигрывая в свободном пробеге.

# Длина свободного пробега

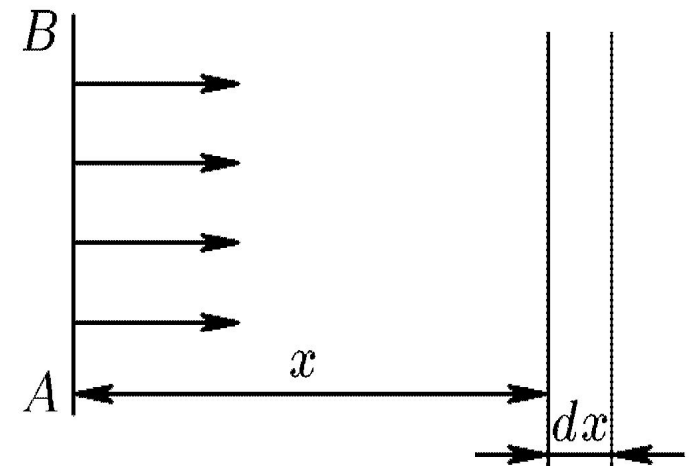
- В случае смеси двух газов с массой молекул  $m_1$  и  $m_2$ , концентрациями  $n_1$  и  $n_2$  и газокинетическими сечениями  $\sigma_{11}$  – столкновения молекул первого типа друг с другом,  $\sigma_{22}$  – столкновения молекул второго типа и  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  – столкновения молекул разных типов, действуя аналогично, мы получим для средней длины пробега:

- Молекул первого типа 
$$\langle \lambda_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{11}n_1 + \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}n_2\sigma_{12}}.$$

- Молекул второго типа 
$$\langle \lambda_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{22}n_2 + \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}n_1\sigma_{12}}.$$

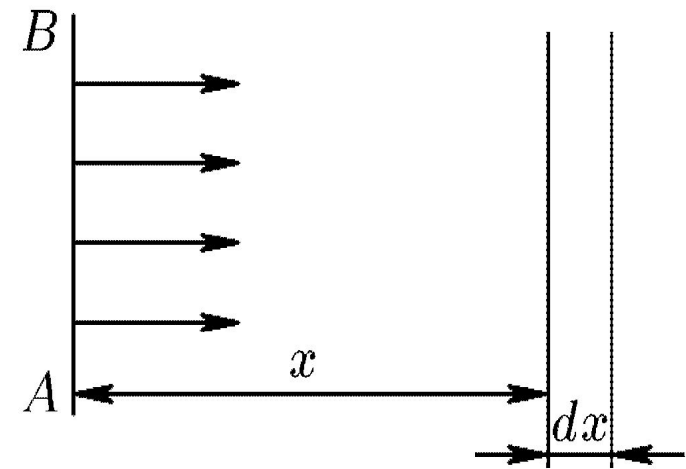
# Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Допустим, что в газе распространяется параллельный пучок молекул.
- Пусть  $J_0$  — интенсивность пучка, когда он пересекает плоскость  $AB$ , перпендикулярную к нему.
- Найдем интенсивность  $J$  того же пучка на расстоянии  $x$  от плоскости  $AB$ .



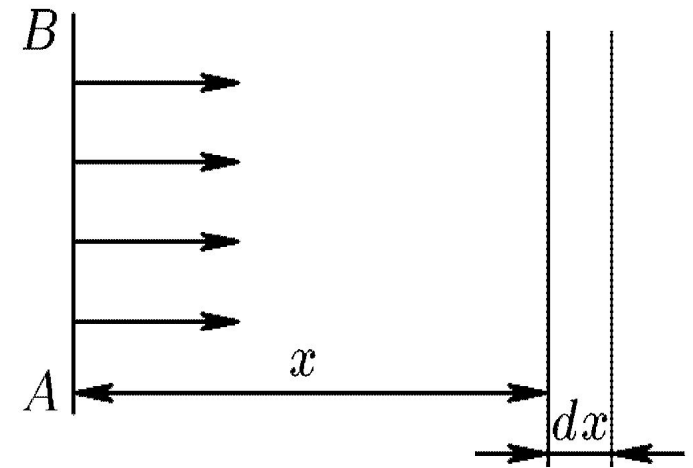
# Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Возьмем бесконечно тонкий слой газа с толщиной  $dx$  и площадью поперечного сечения  $S = 1$ .
- Число молекул газа в нем равно  $nSdx = ndx$ .
- Среднее число частиц, выбывающих из пучка из-за столкновений с одной молекулой газа, равно  $J\sigma$ ,
- из-за столкновений с  $ndx$  молекулами
- $dN = J\sigma ndx = (J/\lambda)dx$ . На такую величину уменьшится интенсивность пучка после прохождения слоя  $dx$



# Рассеяние молекулярного пучка в газе

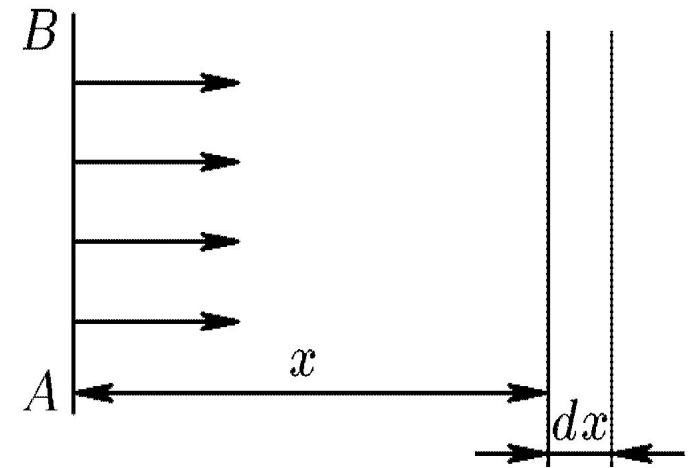
- $dJ = -\frac{J}{\lambda} dx.$
- Интегрирование этого выражения дает
- $J = J_0 \exp(-x/\lambda).$
- Из-за рассеяния интенсивность пучка убывает экспоненциально.
- В связи с этим величину  $1/\lambda$  называют коэффициентом рассеяния.





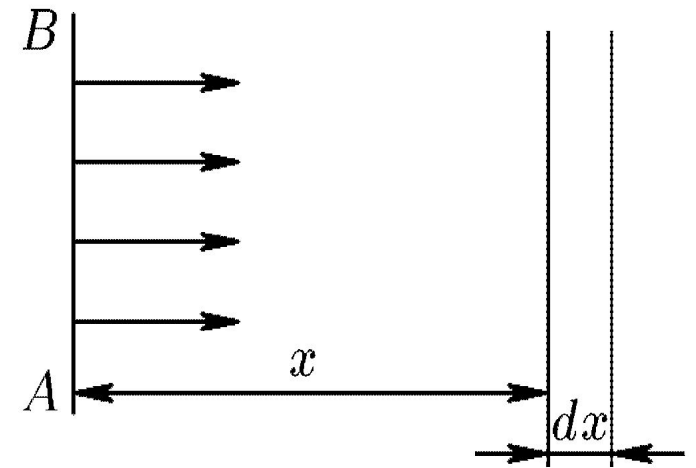
# Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Если  $N_0$  – число частиц, прошедших через площадку  $AB$ , то число частиц, прошедших без столкновения расстояние  $x$ , определяется выражением
- 
- $N = N_0 \exp(-x/\lambda)$ .



# Рассеяние молекулярного пучка в газе

- Число частиц, претерпевших столкновение в слое  $(x, x + dx)$ , равно
- 
- $|dN| = \frac{1}{\lambda} N_0 \exp(-x/\lambda) dx.$
- 
- Средний путь, пройденный частицами без столкновений,
- 
- $\langle x \rangle = \frac{1}{N_0} \int x |dN| = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x \exp(-x/\lambda) dx = \lambda$
- Он совпадает с длиной свободного пробега  $\lambda$ .

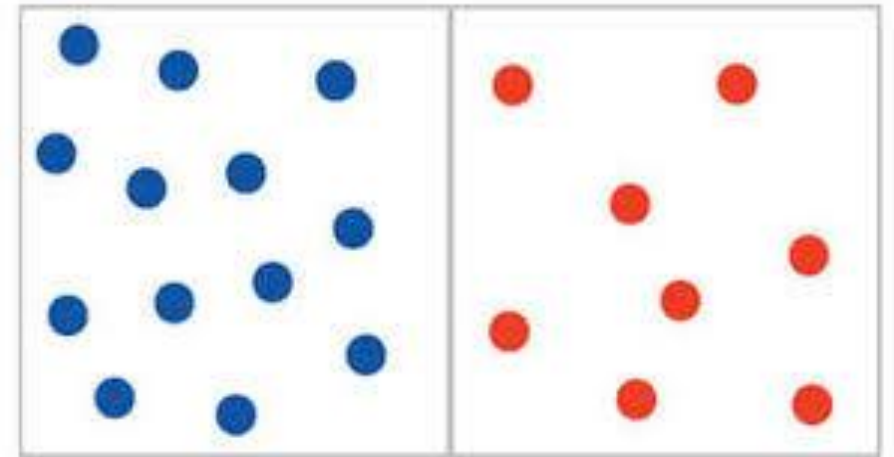


# Принцип локального равновесия

- Принцип (или гипотезы) локального равновесия, который состоит в следующем. Как уже говорилось, в результате столкновений молекул друг с другом устанавливается равновесное распределение их по скоростям поступательного движения. Причем достаточно, чтобы каждая из молекул испытала одно-два соударения. В принципе локального равновесия предполагается, что все молекулы, попавшие в объем, размеры которого порядка  $\langle \lambda \rangle$ , испытают в нем соударения и что в этом малом объеме устанавливается локальное равновесие с некоторой температурой, плотностью и т. д. В другом подобном объеме также устанавливается равновесное состояние, но по другим по величине параметрами. Таким образом, каждой точке пространства можно приписать свои локальные параметры.

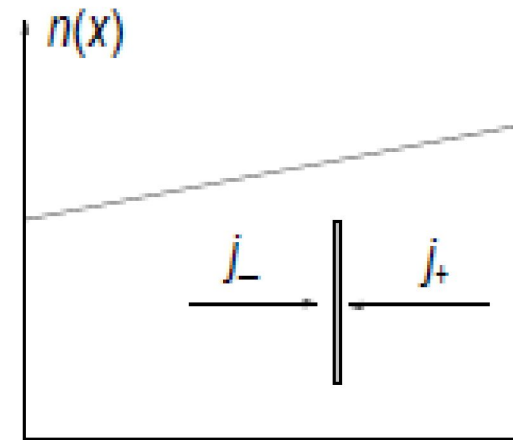
# Диффузия

- Допустим, что закрытая горизонтальная труба разделена на две части перегородкой. По одну сторону перегородки находится какой-то газ 1, а по другую – газ 2.
- Пусть давления и температуры обоих газов одинаковы. Если удалить перегородку, то газы начнут перемешиваться. Причиной этого является хаотическое тепловое движение молекул. Спустя некоторое время концентрации компонентов смеси станут одинаковыми по обе стороны перегородки.
- Такое проникновение молекул одного газа в среду молекул другого газа называется взаимной, или концентрационной диффузией газов.
- Если газы по обе стороны перегородки тождественны, то диффузия также будет происходить. В этом случае она называется самодиффузией.



# Диффузия

- Рассмотрим случай, когда в газе есть примесь другого газа. Общее давление везде одинаково, а концентрация примеси  $n(x)$  меняется вдоль оси  $x$ .
- Выделим перпендикулярную этой оси единичную площадку. Потoki молекул в единицу времени с одной и другой стороны пропорциональны концентрациям в элементах объема, находящихся на расстояниях, отстоящих примерно на величину свободного пробега слева и справа от площадки.
- Будем приближенно считать, что по направлению к площадке двигаются  $1/6$  часть молекул с одинаковой скоростью равной средней скорости молекул примеси.



# Диффузия

- В таком случае потоки можно выразить следующим образом:

- 

- $j_- \approx \frac{1}{6} \langle v \rangle n(x - \lambda), j_+ \approx \frac{1}{6} \langle v \rangle n(x + \lambda), j_- \neq j_+.$

- Результирующий поток есть сумма этих потоков

- 

$$\begin{aligned} j = j_- - j_+ &= \frac{1}{6} \langle v \rangle [n(x - \lambda) - n(x + \lambda)] = -\frac{1}{6} \langle v \rangle \left[ 2\lambda \frac{dn}{dx} \right] \\ &= -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx} \end{aligned}$$

# Диффузия

- Величина

- 

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda$$

- 

- называется коэффициентом диффузии.
- Диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации.  
Это закон Фика.

# Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- Пусть на частицы (они могут быть как макроскопическими, так и молекулярных размеров) действует постоянная сила  $\vec{F}$
- В результате частица участвует в хаотическом тепловом движении и одновременно под действием силы  $\vec{F}$  приобретает скорость  $\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} t$  регулярного движения в сторону действия этой силы.
- После усреднения по временам пробега получаем
  - $\langle \vec{v}_0 \rangle = \frac{\langle \tau \rangle \vec{F}}{m} = B \vec{F},$
- где  $\langle \tau \rangle$  – среднее время пробега между столкновениями. Коэффициент пропорциональности  $B$  называется подвижностью молекулы.



# Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- В поле силы  $\vec{F}$  частица обладает потенциальной энергией  $U(x) = -Fx$  (ось  $x$  направлена в сторону действующей силы). Если состояние стационарное и температура постоянна, то концентрация частиц меняется в пространстве в соответствии с формулой Больцмана

- $n = n_0 \exp(-U(x)/kT) = n_0 \exp(-Fx/kT)$ .

- Из-за действия силы возникает поток, величина которого ей пропорциональна. Также эта величина пропорциональна плотности,

$$j_F = n\langle v \rangle = VF n,$$

- .

# Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- С другой стороны, из-за градиента концентрации имеется направленный противоположно диффузионный поток

- 

$$\bullet j_D = -D \frac{dn}{dx}.$$

- 

- В состоянии равновесия суммарный поток частиц равен нулю

- 

$$\bullet j_F + j_D = BFn - D \frac{dn}{dx} = 0.$$

# Связь между коэффициентами подвижности и диффузии

- Используя выражение для концентрации  $n$ , задаваемое распределением Больцмана из последнего равенства получим соотношение, связывающее коэффициент диффузии и подвижность частиц:

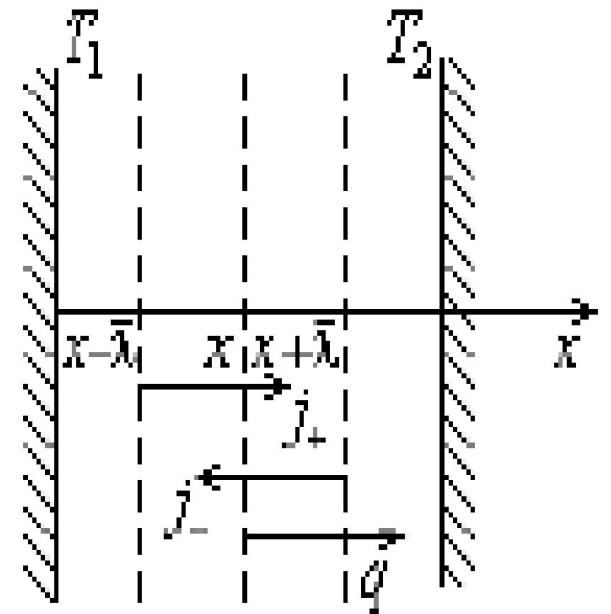
- 

- $D = kTV.$

- Оно было установлено Эйнштейном и носит его имя.

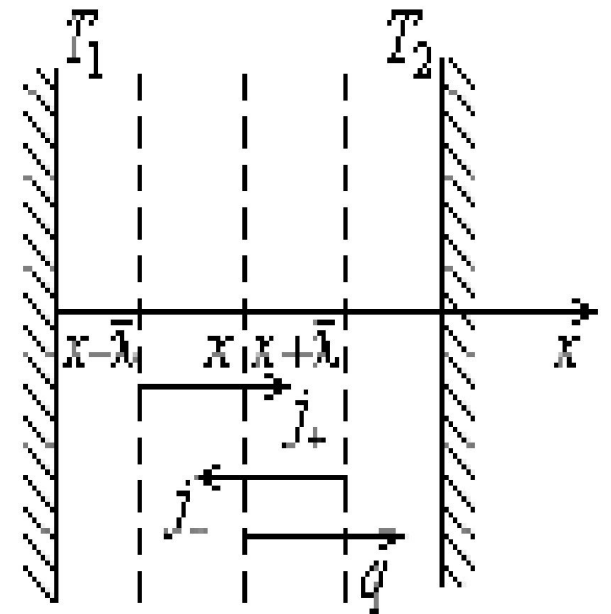
# Теплопроводность

- Если между двумя стенками, имеющими разные температуры, находится слой газа, то через этот газ осуществляется перенос тепла от горячей стенки к холодной ( $T_1 > T_2$ ).
- Будем считать, что длина свободного пробега много меньше расстояния  $h$  между стенками.
- Требуется найти поток тепла  $q$  через единичную площадку с координатой  $x$  в сечении, параллельном стенкам.



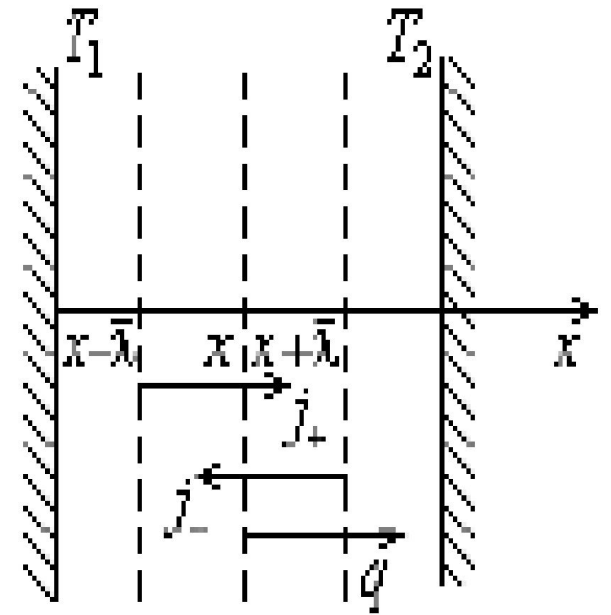
# Теплопроводность

- Слева и справа через это сечение проходят потоки частиц  $j_+$  и  $j_-$ . Так как пространство замкнуто, то в стационарных условиях эти потоки равны  $j_+ = j_- = j$ . Вместе с тем частицы, пересекающие сечение слева, имеют более высокую температуру, чем частицы, пересекающие сечение справа, в результате чего через сечение осуществляется перенос энергии.



# Теплопроводность

- Каждая молекула переносит среднее количество тепла, равное  $\frac{c_V T}{N_A}$  ( $c_V$  - молярная теплоемкость,  $N_A$  - число Авогадро). Таким образом, поток энергии через единицу площади сечения с координатой  $x$  равен
- 
- $q = \langle \varepsilon \rangle (x - \lambda) j_+ - \langle \varepsilon \rangle (x + \lambda) j_- = \frac{j c_V}{N_A} (T(x - \lambda) - T(x + \lambda))$



# Теплопроводность

Поскольку  $\lambda$  мало, это выражение в скобках можно разложить по этому параметру малости, сохранив только первый член:

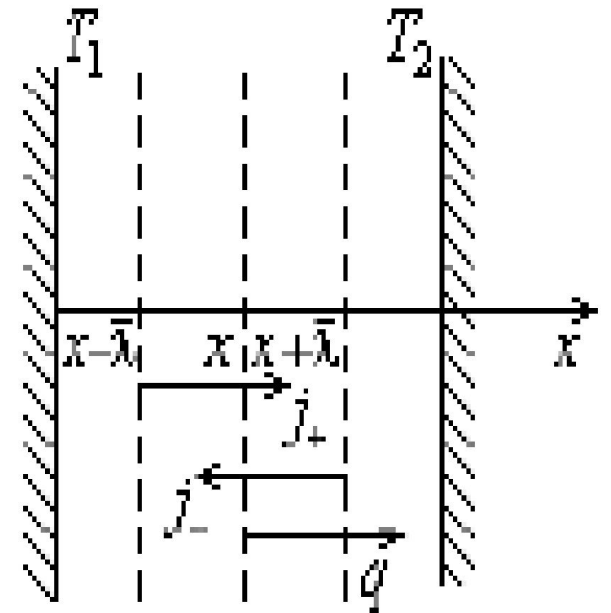
$$q = -2 \frac{j \lambda c_V}{N_A} \frac{dT}{dx}.$$

Как и при определении диффузионных потоков будем приближенно считать, что  $j = \frac{n \langle v \rangle}{6}$ . Тогда получим

$$q = -\frac{1}{3} \frac{n c_V}{N_A} \lambda \langle v \rangle \frac{dT}{dx} = -\kappa \frac{dT}{dx},$$

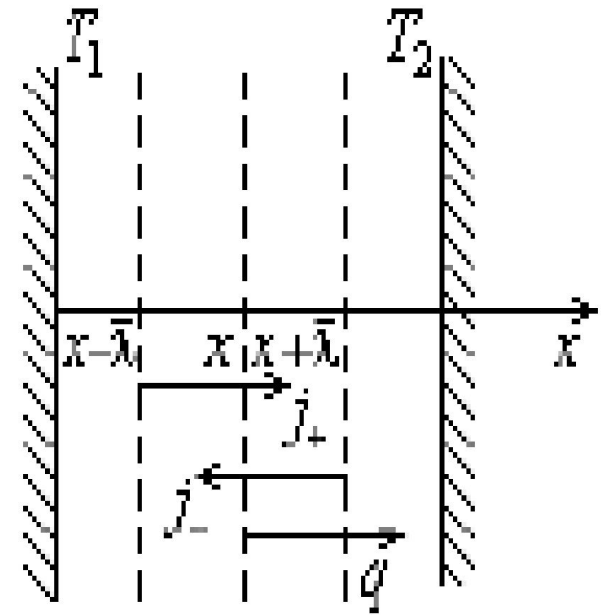
где  $\kappa$ - коэффициент теплопроводности:

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{n c_V}{N_A} \lambda \langle v \rangle.$$



# Теплопроводность

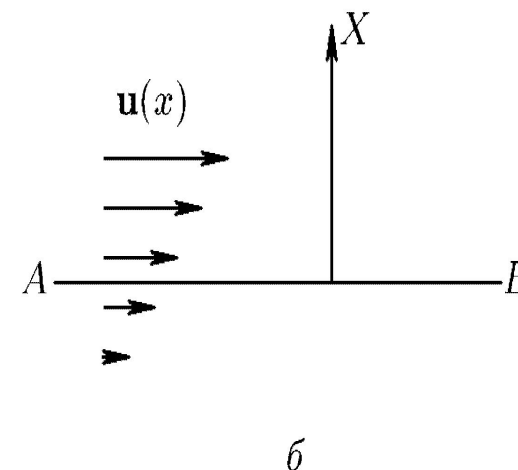
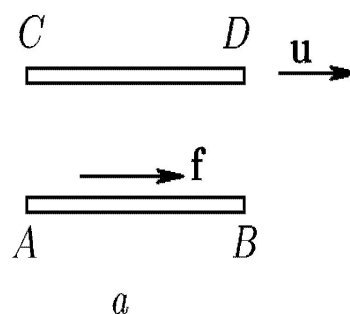
- Поток тепла пропорционален градиенту температуры и направлен против него.
- Этот факт был установлен экспериментально и назван **законом Фурье**.





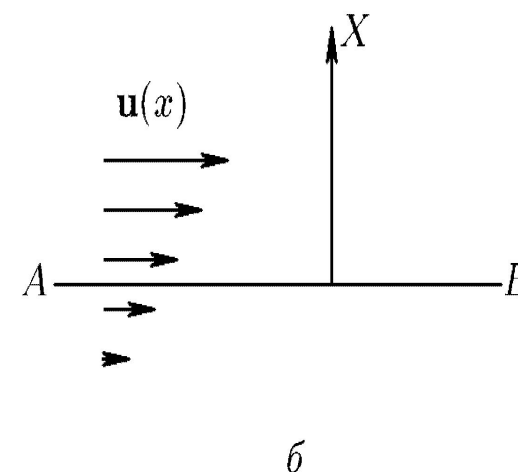
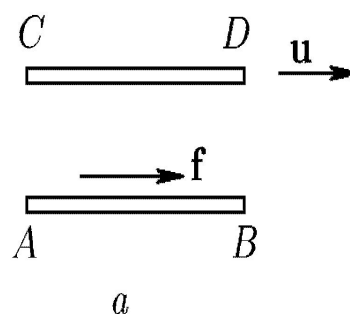
# Вязкость газа

- Между двумя параллельными пластинками  $AB$  и  $CD$  находится воздух или другой газ. При движении пластинки  $CD$  появляется сила, действующая на пластинку  $AB$  и направленная в сторону движения. Эта сила и есть сила вязкости.



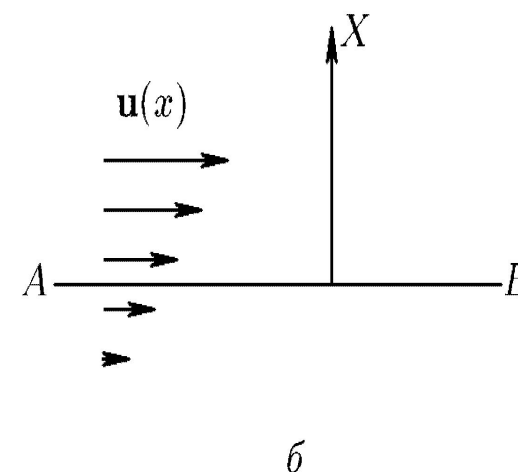
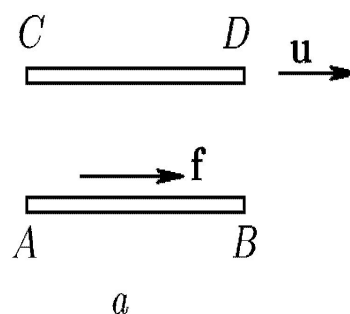
# Вязкость газа

- Будем представлять себе газ неограниченным и движущимся стационарно плоскопараллельными слоями в горизонтальном направлении. Скорость этого макроскопического движения  $u$  меняется в направлении, перпендикулярном к слоям. Это направление мы примем за ось  $X$ . Таким образом, мы предполагаем, что  $u = u(x)$ .



# Вязкость газа

- При наличии упорядоченного движения газа средняя скорость молекулы не нуль, а равна  $u = u(x)$ . С этой скоростью связано количество движения  $mu$ , которым обладает рассматриваемая молекула. Такое количество движения условимся называть упорядоченным.
- Молекулы, лежащие над плоскостью  $AB$ , обладают большим упорядоченным количеством движения, чем молекулы, расположенные под ней.
- Переходя из пространства над плоскостью  $MN$  в пространство под ней, молекулы передают часть своего упорядоченного количества движения молекулам, с которыми они сталкиваются в пространстве ниже плоскости  $MN$ .



# Вязкость газа

- Количественное рассмотрение вязкости аналогично рассмотрению задач диффузии и теплопроводности. Только в этом случае происходит перенос импульса. Теперь вместо  $\frac{c_V}{N_A}$  надо использовать  $m$ , а вместо  $T(x)$  надо использовать  $u(x)$ .
- Тогда для силы напряжения трения  $\Pi$  (силы трения, действующей на единичную площадку в сечении между слоями) получаем
  - $$\Pi = -\eta \frac{du}{dx}, \quad \eta = \frac{1}{3} mn \langle v \rangle \lambda,$$
- где  $\eta$  – коэффициент вязкости.
-

# Вязкость газа

- Так как  $\lambda$  обратно пропорциональна  $n$ , то отсюда следует, что вязкость и теплопроводность не зависят от плотности газа. К такому выводу впервые пришел Максвелл, и этот вывод показался ему парадоксальным. Однако опыты, поставленные самим Максвеллом и другими физиками, подтвердили указанный вывод.

# Вязкость газа

- Независимость вязкости и теплопроводности от плотности газа имеет простое объяснение. Если плотность газа велика, то в переносе импульса и энергии участвует много молекул. Однако передача импульса и энергии за время между двумя последовательными столкновениями производится малыми порциями и на малые расстояния. Если же плотность мала, то уменьшается и число молекул, участвующих в переносе. Но это уменьшение полностью компенсируется тем, что теперь молекулы переносят импульс и энергию более крупными порциями и на большие расстояния.

# Явления в разреженных газах

- Если средняя длина свободного пробега  $\lambda$  того же порядка, что и характерный линейный размер сосуда  $d$ , в котором заключен газ, или больше, то состояние газа называют вакуумом. Воздух в комнате, например, при атмосферном давлении в состоянии вакуума не находится, так как в этом случае  $\lambda \sim 10^{-5}$  см. Однако в сосуде, линейные размеры которого меньше  $10^{-5}$  см (поры дерева и многих других пористых тел), тот же воздух уже находится в условиях вакуума.

# Явления в разреженных газах

- Различают три вида вакуума:
- 1) низкий, когда  $\lambda$  меньше характерного размера сосуда  $d$ , но приближается к нему;
- 2) средний, когда  $\lambda$  сравнима с  $d$ ,
- 3) высокий (или глубокий), когда  $\lambda$  значительно больше  $d$ .
- Газ в состоянии высокого вакуума называется ультраразреженным.



# Явления в разреженных газах

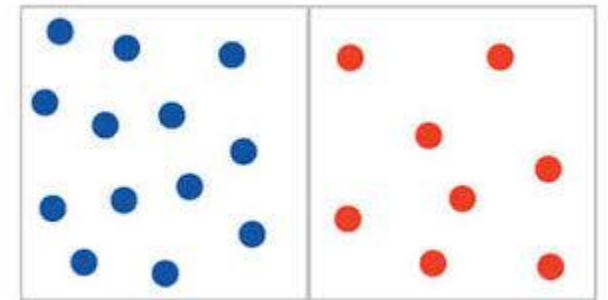
- В плотных газах  $\lambda \ll d$ . В этих случаях столкновения между молекулами самого газа играют основную роль в его поведении. Только такие случаи и имелись в виду во всем предшествующем изложении.
- В другом предельном случае, когда газ становится ультраразреженным, столкновения между самими молекулами относительно редки и перестают играть заметную роль.
- Основную роль в этом случае играют столкновения молекул со стенками сосуда.

# Явления в разреженных газах

- Пусть сосуд разделен перегородкой на две части А и В. Часть А заполнена газом, в части В газа нет. Выделим мысленно на поверхности перегородки площадку  $s$ . Число молекул, ежесекундно ударяющихся об эту площадку, определяется формулой

- $$N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle s = ns \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = C \frac{P_s}{\sqrt{mT}},$$

- где  $C$  – постоянная, равная  $\sqrt{1/2\pi k}$ .
- Прделаем теперь в перегородке отверстие, площадь которого равна  $s$ .



# Явления в разреженных газах

- Поток молекул газа через отверстие в стенке называется эффузионным потоком, если размеры отверстия и толщина стенки малы по сравнению с длиной свободного пробега  $\lambda$ .
- Допустим теперь, что по разные стороны перегородки находится один и тот же газ, но при разных давлениях и температурах. Если газ находится в состоянии высокого вакуума, то возникнут два эффузионных потока: из А в В и из В в А

# Явления в разреженных газах

- Ввиду отсутствия столкновений между молекулами эти два потока совершенно независимы друг от друга. Поэтому количество молекул, ежесекундно проходящих через отверстие  $s$  из А в В, определится выражением

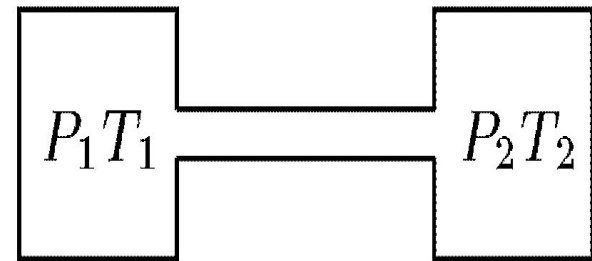
- $$N = \frac{C_s}{\sqrt{m}} \left( \frac{P_A}{\sqrt{T_A}} - \frac{P_B}{\sqrt{T_B}} \right),$$

- где  $P_A, P_B, T_A, T_B$  – давления и температуры газа в А и В. В состоянии равновесия, когда средние числа молекул в А и В остаются неизменными, должно быть  $N = 0$ , т. е.

- $$\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} = \frac{P_B}{\sqrt{T_B}}.$$

# Явления в разреженных газах

- Пусть два сосуда 1 и 2 соединены между собой трубкой и поддерживаются при разных температурах  $T_1$  и  $T_2$ .
- Когда поперечное сечение трубки очень велико по сравнению с длиной свободного пробега,
- Условие равновесия носит гидродинамический характер: должны быть равны давления  $P_1$  и  $P_2$  в обоих сосудах. В противоположном случае, когда длина свободного пробега очень велика по сравнению с поперечными размерами трубки, гидродинамический подход неприменим.

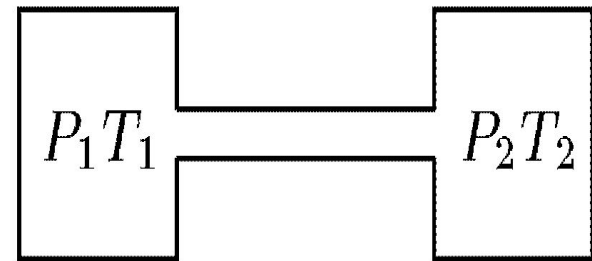


# Явления в разреженных газах

- Условие равновесия требует, чтобы среднее число частиц газа, проходящих через трубку в одном направлении, было равно среднему числу частиц, проходящих в противоположном направлении. Это условие приводит к соотношению

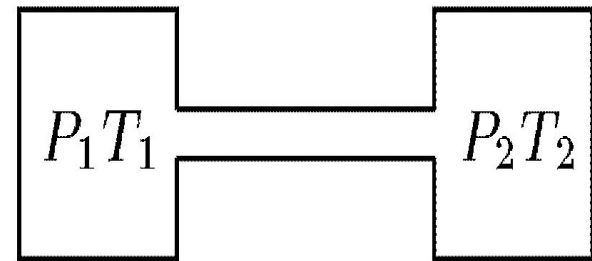
$$\bullet \frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}.$$

- Следовательно, если температуры  $T_1$  и  $T_2$  различны, то при равновесии будут различны и давления  $P_1$  и  $P_2$ .



# Явления в разреженных газах

- Допустим теперь, что сосуд разделен пористой перегородкой на две части, поддерживаемые при разных температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Пусть размеры пор малы по сравнению с длиной свободного пробега.
- Тогда, если первоначальные давления  $P_1$  и  $P_2$  были равны, то газ начнет перетекать в направлении от более низкой к более высокой температуре. Это явление называется **тепловой диффузией** или **эффектом Кнудсена**.



До следующей лекции

