

## Лекция 2.

# Кинематика материальной точки и твердого тела.

- 1. Способы задания движения материальной точки в кинематике. Основные кинематические параметры: траектория, путь, перемещение, скорость, нормальное, тангенциальное и полное ускорения.*
- 2. Движение материальной точки в однородном гравитационном поле.*
- 3. Кинематика вращательного движения абсолютно твердого тела. Угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение и их связь с линейными параметрами.*

**1. Способы задания движения материальной точки в кинематике. Основные кинематические параметры: траектория, путь, перемещение, скорость, нормальное, тангенциальное и полное ускорения.**

Под *системой отсчета* в механике понимают совокупность: тело отсчета, способ измерения расстояний («линейка») и способ измерения времени («часы»).

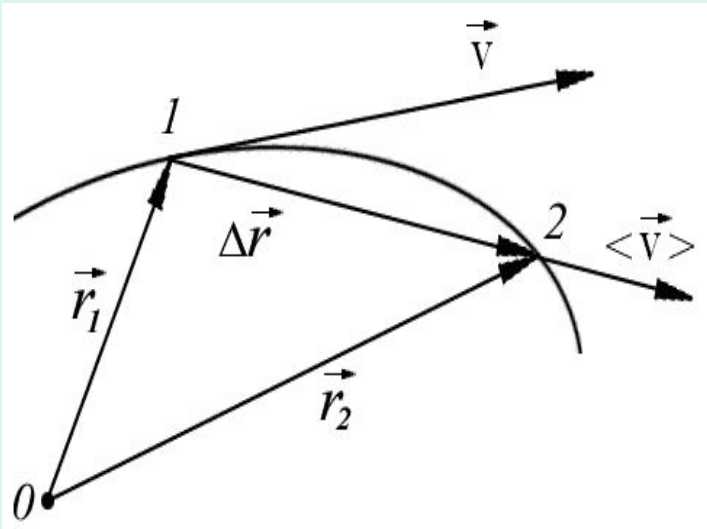
Существует три способа описания движения частицы: **векторный** (геометрический), **естественный** и **координатный**.

**Векторный способ.** В этом способе положение интересующей нас частицы А задают радиусом-вектором , проведенным из некоторой неподвижной точки О выбранной *системы отсчета* в точку А.

**Естественный способ.** Его применяют в том случае, когда заранее известна траектория частицы.

## Векторный способ.

- При движении частицы ее радиус-вектор меняется в общем случае как по модулю, так и по направлению, т. е. он зависит от времени  $t$ .
- Геометрическое место точек, где тело побывало за время своего движения, называется *траекторией частицы*.
- Длина траектории  $l$  называется *пройденным путём*. При векторном способе описания траекторией будет положение концов радиус-вектора во все моменты времени.

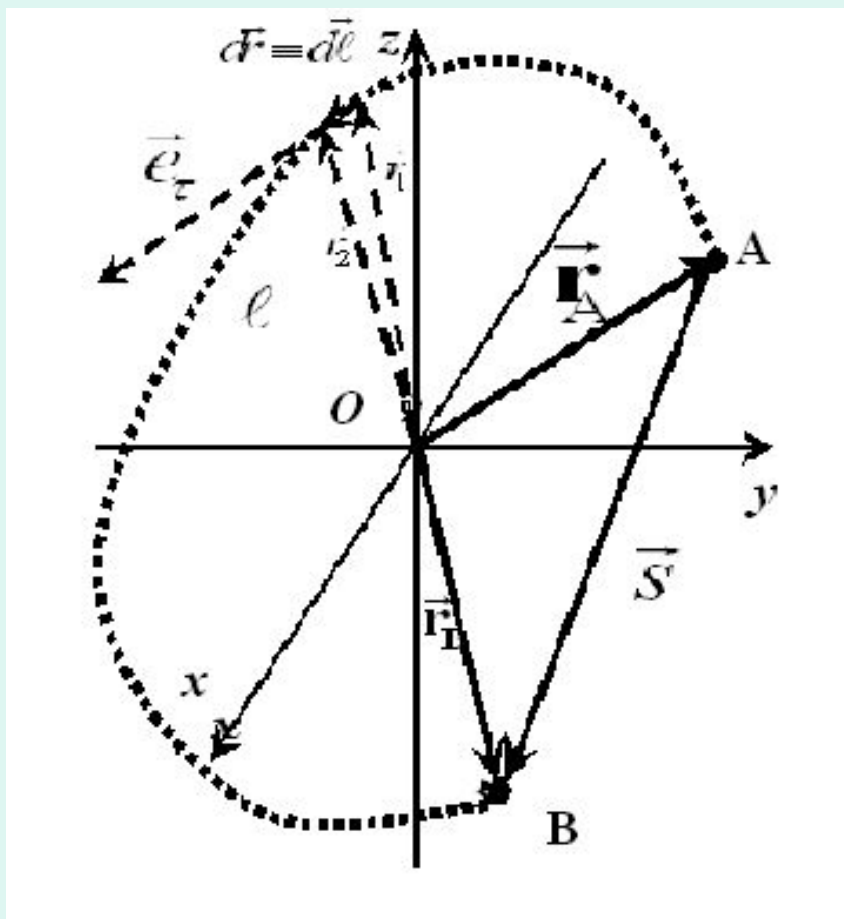


- Пусть за промежуток времени  $\Delta t$  точка переместилась из положения 1 в положение 2. Из рисунка видно, что *вектор перемещения*  $\Delta \vec{r}$  частицы представляет собой приращение радиус-вектора  $\vec{r}$  за время  $t$ :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- Поскольку вектор есть направленный отрезок прямой, а прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками, то  $l \leq \Delta r$ .

# Изменение положения материальной точки в пространстве за бесконечно малый промежуток времени $dt$



Если ввести понятие *орта траектории* —  $\vec{e}_\tau$  единичного вектора в направлении движения, то можно записать и вектор приращения траектории  $d\vec{r} = d\vec{r} \cdot \vec{e}_\tau$

Из рисунка видно, что  $d\vec{r} \equiv d\vec{r}$   
 Из того же рисунка видно, что  $\vec{r} = \int_A^B d\vec{r}$

и 
$$\Delta \vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} d\vec{r}$$

# Скорость

**Средний модуль скорости** показывает, какой путь в среднем проходит тело за единицу времени. В разных книгах среднее значение какой-либо величины обозначают по-разному:

$$v_{\text{cp}} = \bar{v} = \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

**Средний вектор скорости** есть отношение вектора перемещения к

изменению времени: 
$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Видно, что средний модуль скорости всегда не больше модуля среднего вектора скорости.

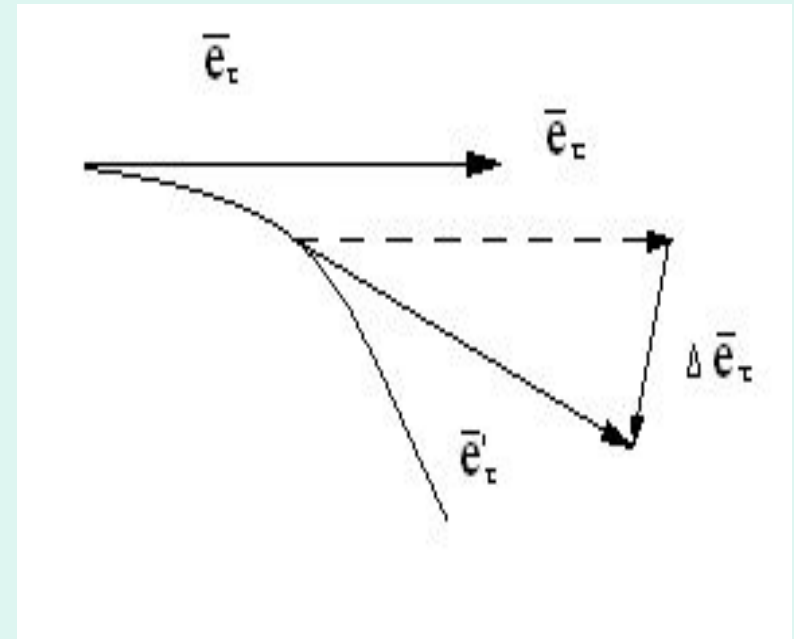
Обе величины средней скорости описывают поведение тела интегрально за всё время движения. Для того чтобы более детально рассмотреть движение тела в каждый момент времени, вводят понятие **мгновенной скорости**, то есть скорости в мгновение, когда время

равнялось  $t$ . Вектор мгновенной скорости 
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Так как  $d\vec{r} \equiv d\vec{r} = d\vec{r} \cdot \vec{e}_r$ , то 
$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_r$$

**В системе СИ скорости измеряются в м/с.**

В общем случае модуль приращения радиус-вектора  $\Delta \vec{r}$  не равен изменению модуля радиус-вектора  $dr$ . Например, если  $\vec{r}$  меняется только по направлению при движении частицы по окружности, то  $r = const$ ,  $dr = 0$ , но  $|\Delta \vec{r}| \neq 0$ .



Исходя из определения скорости  $\vec{R}(t_1) = \vec{R}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) \cdot dt$ ,

где  $\vec{R}(t)$  – радиус-вектор в момент времени  $t$ ,  $t_0$  – начало отсчета времени. Поскольку пройденный путь  $l(t_0) = 0$  и перемещение,

$$\vec{s}(t_0) = 0 \quad \text{то} \quad \vec{R}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) \cdot dt \quad \text{и} \quad \vec{s}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) \cdot dt.$$

Если в промежутке времени от  $t_0$  до  $t_1$  модуль скорости не менялся ( $v(t) = v = \text{const}$ ), то такое движение называется **равномерным**, и вычисление пройденного пути упрощается:  $\vec{R}(t_1) = v \cdot (t_1 - t_0)$ .

Если же в указанном промежутке времени не менялось направление вектора скорости, то такое движение называется **прямолинейным**.

Если движение было и равномерным, и прямолинейным, то

$$\vec{R}(t_1) = \vec{R}(t_0) + \vec{v} \cdot (t_1 - t_0), \quad \text{а} \quad \vec{s}(t_1) = \vec{v} \cdot (t_1 - t_0).$$

# Ускорение

Скорости тел также может изменяться от времени. Для описания этой зависимости введено понятие *ускорения* – изменения мгновенной скорости в единицу времени.

**В системе СИ ускорения измеряются в м/с<sup>2</sup>.**

Среднее значение вектора ускорения,  $\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

мгновенное –  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{e}_\tau)}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{e}_\tau}{dt} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\tau$ .

Видно, что вектор полного мгновенного ускорения состоит из двух слагаемых, первое из которых связано с изменением направления скорости  $\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$  и не зависит от

изменения модуля скорости  $\frac{dv}{dt}$ , а второе –

наоборот. При этом первое слагаемое направлено вдоль направления *приращения* орта скорости, а второе – с самим ортом скорости в данной точке траектории.



# Ускорение

$$\vec{a} = v \cdot \frac{d\vec{e}_\tau}{dt} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\tau$$

Первое слагаемое  $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\tau$ , называемое **тангенциальным ускорением**, при увеличении модуля скорости ( $\frac{dv}{dt} > 0$ ) совпадает по направлению с вектором скорости, а при уменьшении модуля скорости ( $\frac{dv}{dt} < 0$ ) – направлено противоположно вектору скорости. Другое слагаемое

$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{e}_\tau}{dt},$$

всегда направлено перпендикулярно к вектору скорости в ту сторону, куда загибается траектория. Поскольку греческое слово перпендикуляр на латынь переводится как нормаль, то такое ускорение называют **нормальным**.

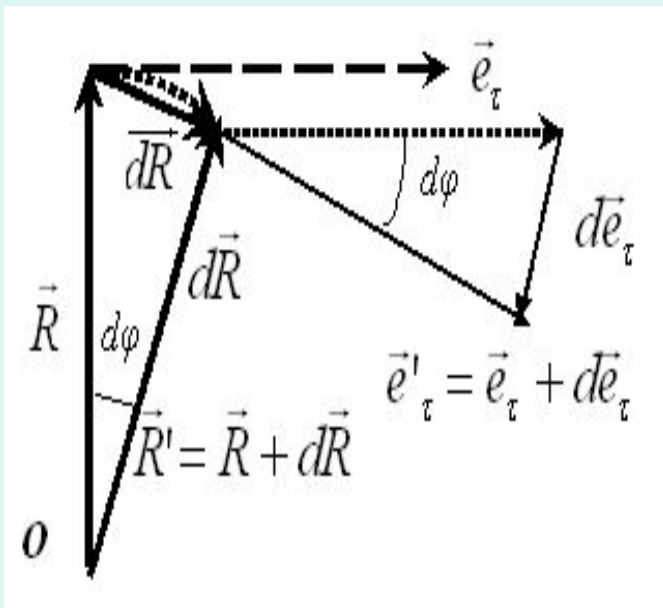
## Определению модуля вектора нормального ускорения

Найдем модуль нормального ускорения. Поскольку и пройденный путь, и перемещение бесконечно малы, то можно считать, что движение идёт по окружности радиуса  $R$ . Отсюда следует, что по модулю  $dR = R \cdot d\varphi$ . Кроме того,  $d\vec{e}_\tau = \vec{e}_\tau$ .

Поскольку  $\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$ , то получаем:

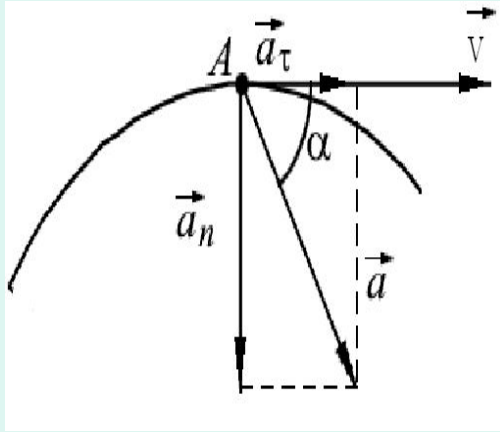
$$a_n = v \cdot \frac{de_\tau}{dt} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt} = v \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt}$$

С учетом, что  $v = dR/dt$  получаем, что  $a_n = v^2/R$ . Величина  $R$  носит название *радиуса кривизны траектории*. Точка  $O$  называется *центром кривизны траектории*, а величина, обратная радиусу кривизны  $\sigma = 1/R$  – *кривизной траектории*.



Кривизна траектории в системе СИ измеряется в м<sup>-1</sup>.

Так как  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ , то  $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$ .



При описании движения тел выделяют два частных случая – когда в ходе движения не меняются либо и модуль, и направление вектора полного ускорения  $\vec{a}$ , либо модуль вектора тангенциального ускорения  $a_\tau$ .

В случае, когда  $\vec{a} = \text{const}$ :

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t_1 - t_0) \quad R(t_1) = R(t_0) + \vec{v}_0 \cdot (t_1 - t_0) + \frac{\vec{a} \cdot (t_1 - t_0)^2}{2}$$

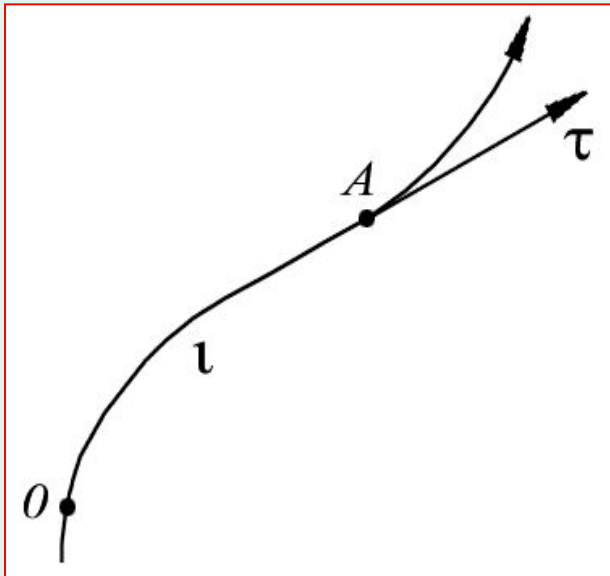
В случае, когда  $a_\tau = \text{const}$ :

$$v(t_1) = v_0 + a_\tau \cdot (t_1 - t_0) \quad R(t_1) = v_0 \cdot (t_1 - t_0) + \frac{a_\tau \cdot (t_1 - t_0)^2}{2}$$

К сожалению, исторически сложилось, что оба этих частных случая носят одинаковое название – равноускоренное движение. Поэтому при решении конкретных задач надо всегда аккуратно выяснять, какой именно случай имеется в виду.

## Естественный способ.

Его применяют в том случае, когда заранее известна траектория частицы. Положение движущегося тела определяют *дуговой координатой*  $l$  - расстоянием вдоль траектории от выбранного начала отсчета точки  $O$ .



При этом произвольно выбирают положительное направление отсчета координаты  $l$  (например, как показано стрелкой на рисунке).

Движение частицы задано полностью, если определена ее траектория, начало отсчета  $O$ , положительное направление отсчета дуговой координаты  $l$  и закон движения частицы, т. е. зависимость  $l(t)$ .

## Координатный способ.

Для простоты рассмотрим декартову систему координат  $x, y, z$ .

Запишем проекции радиус-вектора  $\vec{r}(t)$  на оси координат. Вектор  $\vec{r}(t)$  определяет положение интересующей нас частицы относительно начала координат  $O$  в момент  $t$ :  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ .

*Закон движения* частицы - это зависимость координат от времени. Он задает положение частицы в каждый момент времени, ее скорость и ускорение. Проекции векторов скорости и ускорения на эту ось:

$$v_x = dx/dt, a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2.$$

Такие же соотношения получаются для  $y$ - и  $z$ -проекций соответствующих векторов.

Зависимости  $x(t), y(t), z(t)$  полностью определяют движение частицы. Зная их, можно найти не только положение частицы, но и проекции ее скорости и ускорения, а следовательно, модуль и направление векторов скорости и ускорения в любой момент времени.

## 2. Движение материальной точки в однородном гравитационном поле.

Основной метод решения всех задач кинематики – использование уравнений движения. *Уравнение движения* – это зависимость радиус-вектора (то есть, координат) от времени. В качестве примера рассмотрим задачу о равноускоренном движении материальной точки под действием силы тяжести. Постоянное ускорение в данном случае – это ускорение свободного падения  $g$ .

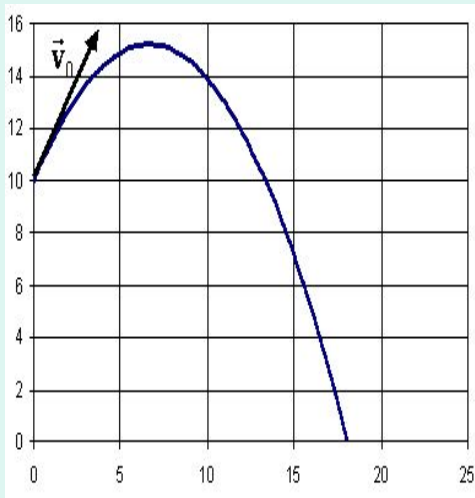
Пусть в момент начала отсчёта времени материальная точка была брошена с высоты  $h$  со скоростью  $v_0$ , направленной под углом  $\alpha$  к горизонту.

Поскольку в данном случае для всего времени движения  $t$ , то  $\vec{a} = (0; -g; 0)$

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2} = (v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha; h + v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}; 0)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t = (v_0 \cdot \cos \alpha; v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t; 0)$$

Исходя из полученных зависимостей координат и скоростей от времени, можно определить все необходимые величины. Например, время падения  $\tau$  рассчитывается из условия  $R_y(\tau) = 0$ , дальность полёта  $L$  – из условия  $L = R_x(\tau)$  и т.п.



### 3. Описание движений твердого тела

*Абсолютно твердое тело - в нем расстояние между любыми двумя точками не меняется в процессе движения.*

Имеется пять видов движения твердого тела:

- 1) *поступательное*, если прямая, соединяющая любые две точки тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному положению, например движение трамвая на прямом участке пути;
- 2) *вращательное*, если все точки лежащие на некоторой прямой, называемой *осью вращения*, остаются неподвижными, например движение двери при открывании и закрывании;
- 3) *плоское*, если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, например качение колеса на прямом участке пути;
- 4) *сферическое*, если одна из точек тела остается все время неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, например движение гироскопа с тремя степенями свободы в карданном подвесе;
- 5) *свободное*, если нет перечисленных выше четырех ограничений, например движение свободного произвольного брошенного тела вблизи поверхности Земли.

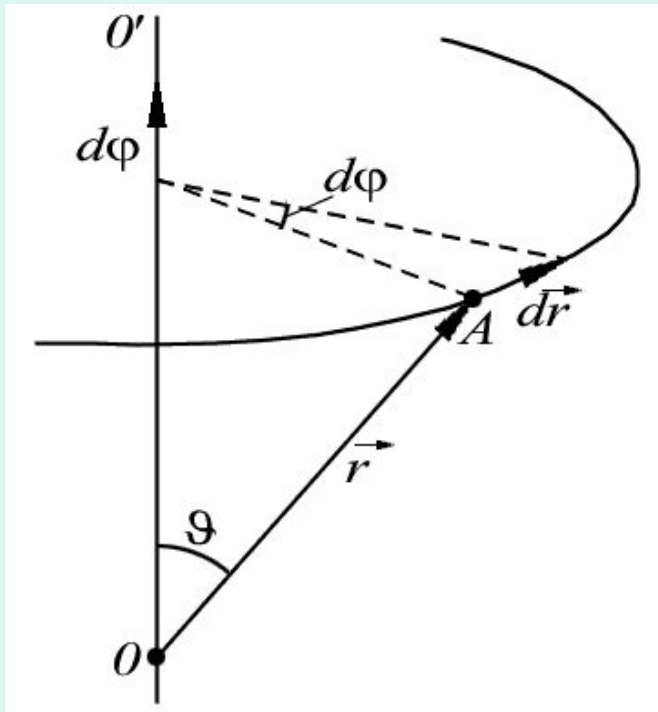
Рассмотрим первые три вида движения и вопрос сложения угловых скоростей.

# *Поступательное движение*

При *поступательном движении* все точки твердого тела совершают равные перемещения за один и тот же промежуток времени. Поэтому скорости и ускорения всех точек тела в данный момент времени одинаковы. Этот факт позволяет свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной частицы тела, т. е. к задаче кинематики частицы. Таким образом, поступательное движение твердого тела может быть полностью описано, если известны зависимость от времени радиус-вектора любой точки этого тела и его положение в начальный момент.



# Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Пусть твердое тело, вращаясь вокруг оси  $OO'$  нее, совершило за время  $dt$  бесконечно малый поворот. Угол поворота будем характеризовать вектором  $d\overset{\curvearrowright}{\varphi}$ , *модуль которого равен углу поворота  $d\varphi$ , а направление совпадает с осью  $OO'$* , причем так, что направление поворота отвечает правилу *правого* винта по отношению к направлению вектора  $d\overset{\curvearrowright}{\varphi}$ .

Вектор  $d\overset{\curvearrowright}{\varphi}$  называется *аксиальным* вектором, тогда как вектор перемещения  $d\vec{r}$  является *полярным* вектором (к ним также относятся векторы скорости и ускорения). Они отличаются тем, что полярный вектор кроме длины и направления имеет точку приложения (полюс), а аксиальный вектор имеет только длину и направление (ось - по латыни axis), но не имеет точки приложения.

# Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение

В процессе движения вокруг неподвижной оси модуль радиус-вектора не меняется. Следовательно, не меняется и кривизна траектории. Поэтому, для того, чтобы однозначно описать положение точки  $B$  на этой окружности, достаточно указать угол  $\varphi$  между направлением её радиус-вектора  $\mathbf{RB}$  и радиус-вектора  $\mathbf{RA}$  некоей фиксированной точки  $A$ .

**В системе СИ все углы измеряются в радианах.**

Если считать точку  $A$  точкой начала движения, то пройденный путь  $l$  равен длине дуги  $AB$ . Следовательно,  $l = \varphi R$ .

**Мы имеем вектор угла поворота:**  $\overset{\curvearrowright}{\varphi}$ .

Изменение угла поворота с течением времени можно описывать с помощью понятия **угловой скорости:**  $\overset{\curvearrowright}{\omega} = \frac{d\overset{\curvearrowright}{\varphi}}{dt}$

Изменение угловой скорости в единицу времени характеризуется **угловым ускорением:**  $\overset{\curvearrowright}{\beta} = \frac{d\overset{\curvearrowright}{\omega}}{dt}$ .

## Взаимосвязь линейных и угловых координат.

Если рассматривать движение за бесконечно малое время  $dt$ , то и угол поворота  $d\varphi$  будет бесконечно малым. В этом случае пройденный путь  $dl$  становится равным (по модулю) перемещению  $ds$ .

Из определения вектора  $\varphi$  видно, что  $ds = [d\varphi; R]$ .  
 Поскольку линейная скорость  $v = \frac{ds}{dt}$ , то  $v = [\frac{d\varphi}{dt}; R] = [\omega; R]$

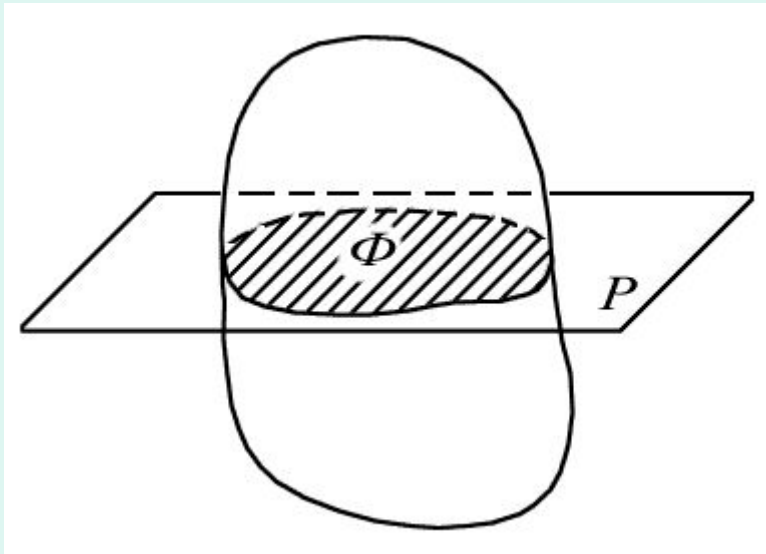
Ускорение  $a = \frac{dv}{dt} = [\frac{d\omega}{dt}; R] + [\omega; \frac{dR}{dt}]$  поскольку  $dR = [d\varphi; R]$   
 $a = [\beta; R] + [\omega; [\frac{d\varphi}{dt}; R]] = [\beta; R] + [\omega; [\omega; R]] = [\beta; R] + (-\omega^2 \cdot R)$

Исходя из направления слагаемых полного ускорения видно, что первое – это тангенциальное ускорение, а второе – нормальное ускорение.

Отсюда модуль полного ускорения равен  $dR = [d\varphi; R]$ .

# Плоское движение

*Плоское движение - это такое движение, при котором каждая точка твердого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной в данной системе отсчета плоскости.*



Плоская фигура  $\Phi$ , образованная сечением тела этой неподвижной плоскостью  $P$ , в процессе движения все время остается в этой плоскости. Примером может служить цилиндр, катящийся по плоскости без скольжения.

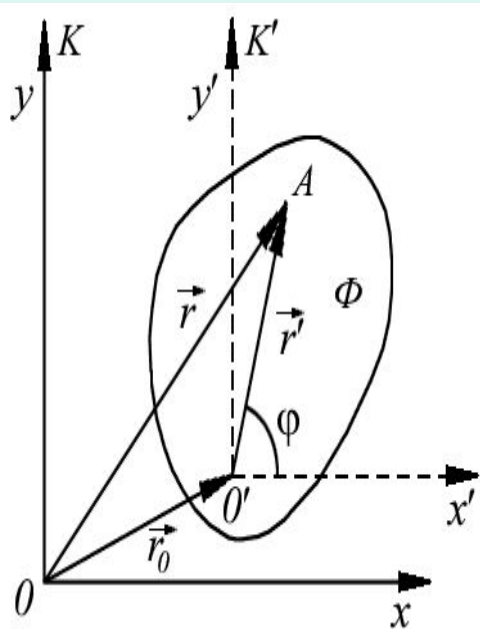
Положение твердого тела при плоском движении однозначно определяется положением плоской фигуры  $\Phi$  в неподвижной плоскости  $P$ . Это позволяет свести изучение плоского движения твердого тела к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

# Плоское движение твердого тела

Определим скорость  $\mathbf{v}$  произвольной частицы  $A$  тела при плоском движении. Введем вспомогательную систему отсчета  $K'$ , жестко связанную с точкой  $O'$  тела и перемещающуюся поступательно относительно  $K$ -системы. Тогда малое перемещение  $d\mathbf{r}$  частицы  $A$  в системе  $K$  можно записать как сумму векторов  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'$ , где  $d\mathbf{r}_0$  - перемещение точки  $O'$ , а  $d\mathbf{r}'$  - перемещение точки  $A$  относительно системы  $K'$ ,  $d\mathbf{r}' = [d\phi, \mathbf{r}']$ .

Тогда  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']$ , т. е. скорость произвольной частицы  $A$  твердого тела при плоском движении складывается из скорости  $\mathbf{v}_0$  произвольной точки  $O'$  этого тела и скорости  $\mathbf{v}' = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']$  вращения тела вокруг оси, проходящей через эту точку.

Значит, плоское движение твердого тела можно представить как совокупность двух основных видов движения – поступательного (вместе с произвольной точкой  $O'$  тела) и вращательного (вокруг оси, проходящей через точку  $O'$ ). Применима теорема из геометрии, которая утверждает, что любое преобразование на плоскости, оставляющее фигуру неизменной, может быть представлено в виде комбинации параллельного переноса и



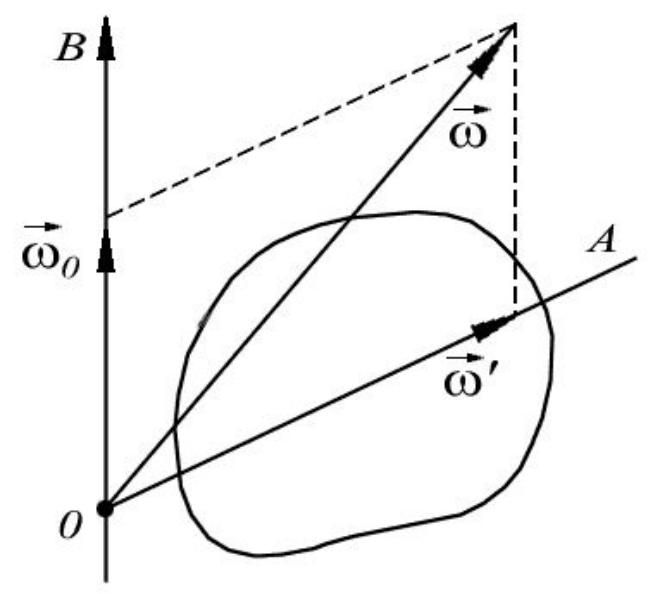
вращения.

Плоское движение можно представить как чистое вращение относительно некоторой оси, которую называют *мгновенной осью вращения*. Положение мгновенной оси со временем меняется. Например, у катящегося по плоскости цилиндра мгновенная ось в каждый момент совпадает с линией касания цилиндра и плоскости.

## Сложение угловых скоростей

Пусть твердое тело совершает два элементарных поворота  $d\varphi_0$  и  $d\varphi'$  вокруг разных осей, проходящих через неподвижную точку  $O$ . Тогда суммарное перемещение  $d\mathbf{r}$  произвольной частицы  $A$  тела, радиус-вектор которой относительно точки  $O$  равен  $\mathbf{r}$ , можно представить так:  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}' = [\Delta\varphi_0, \mathbf{r}] + [\Delta\varphi', \mathbf{r}] = [\Delta\varphi, \mathbf{r}]$ , где  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi'$ .

Тогда угловая скорость будет  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}'$ .



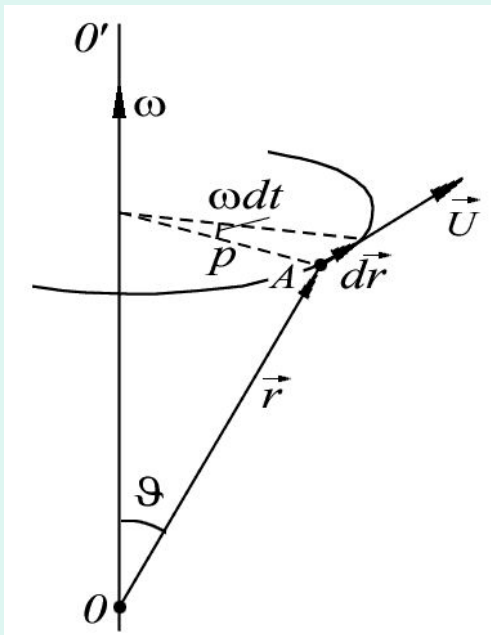
## Связь линейных и угловых величин при вращении

Легко заметить, что все задачи на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси аналогичны по форме задачам на прямолинейное движение частицы. Достаточно заменить линейные величины  $r$ ,  $v$  и  $a$  на соответствующие угловые  $\varphi$ ,  $\omega$ , и  $\beta$ , как получаются все закономерности и соотношения для вращающегося тела.

$$l \text{ ————— } \varphi$$

$$2\pi R \text{ ————— } 2\pi$$

$$l = [\varphi R], v = [\omega R], a = [\beta R]$$



Линейные параметры	Угловые параметры
$r$	$\varphi$
$v$	$\omega$
$a$	$\beta$
$m$	$I$
$p = mv$	$L = I\omega$
$F$	$M = [rF]$
$E = mv^2/2$	$E = I\omega^2/2$