

## Лекция 6

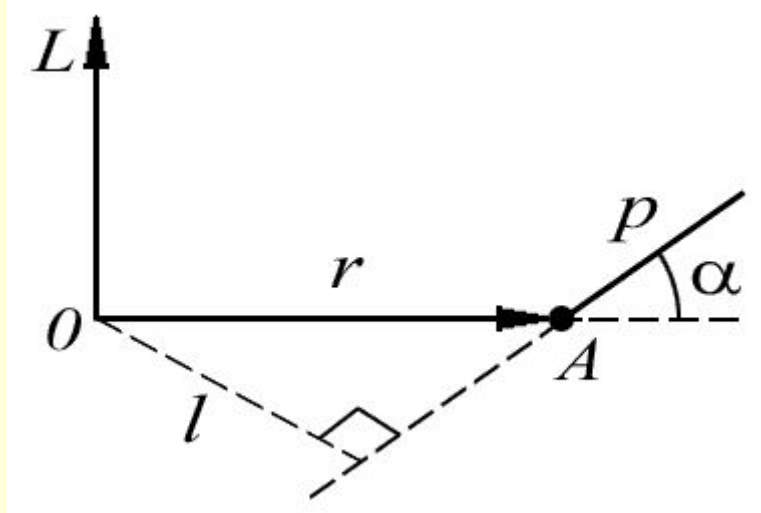
# Законы сохранения и изменения момента импульса в механике.

- 1. Момент импульса частицы.*
- 2. Закон сохранения момента  
импульса*
- 3. Собственный момент  
импульса*

# 1. Момент импульса частицы.

Анализ поведения систем показывает, что кроме энергии и импульса существует еще одна механическая величина, с которой также связан закон сохранения, - это так называемый **момент импульса**. Используют также названия момент количества движения, вращательный момент, угловой момент, или просто момент.

Возьмем одну частицу. Пусть  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор, характеризующий ее положение относительно некоторой точки  $O$  выбранной системы отсчета, а  $\mathbf{p}$  - ее импульс в этой системе. Моментом импульса частицы  $A$  относительно точки  $O$  называют вектор  $\mathbf{L}$ , равный векторному произведению векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ :  $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ .



$L$  является аксиальным вектором. Его направление выбрано так, что вращение вокруг точки  $O$  в направлении вектора  $p$  образуют правовинтовую систему. Модуль вектора  $L$  равен  $L = rps\sin\alpha$ , где  $\alpha$  - угол между векторами  $r$  и  $p$ ,  $l = r\sin\alpha$  - **плечо вектора  $p$**  относительно точки  $O$ .

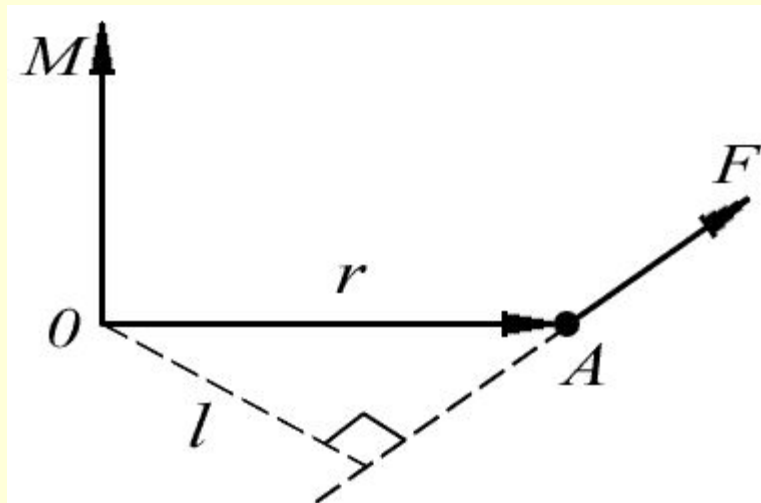
Выведем уравнение, описывающее изменение во времени вектора  $L$ . Его называют **уравнением моментов**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Так как точка  $O$  неподвижна, то вектор  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ , т. е. совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{p}$ , поэтому  $[d\mathbf{r}/dt, \mathbf{p}] = 0$ .

Используя второй закон Ньютона, получим  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{F}$  - равнодействующая всех сил, приложенных к частице. Следовательно,  $d\mathbf{L}/dt = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$ .

Величину, стоящую в правой части этого уравнения, называют **моментом силы**  $\mathbf{F}$  относительно точки  $O$ . Обозначив ее буквой  $M$ , запишем  $M = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$ .



## Относительно точки

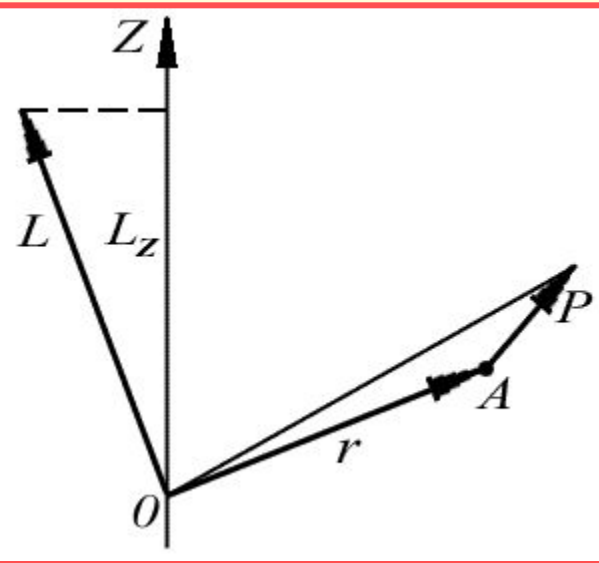
Производная по времени от момента импульса  $L$  частицы относительно некоторой точки  $O$  выбранной системы отсчета равна моменту равнодействующей силы относительно той же точки  $O$ :  $dL/dt = M$ .

Это уравнение называют *уравнением моментов*. Заметим, что если система отсчета является неинерциальной, то момент силы  $M$  включает в себя как момент сил взаимодействия, так и момент сил инерции относительно той же точки  $O$ .

Из уравнения моментов, в частности, следует, что если  $M = 0$ , то  $L = \text{const}$ . Другими словами, если относительно некоторой точки  $O$  выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю в течение интересующего нас промежутка времени, то относительно этой точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого времени.

## Относительно оси

Рассмотрим теперь понятия момента импульса и момента силы относительно оси. Выберем в некоторой инерциальной системе отсчета произвольную неподвижную ось  $z$ . Пусть относительно некоторой точки  $O$  на оси  $z$  момент импульса частицы  $A$  равен  $L$ , а момент силы, действующий на частицу,  $M$ .



Моментом импульса относительно оси  $z$  называют проекцию на эту ось вектора  $L$ , определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси. Аналогично вводят и понятие момента силы относительно оси. Их обозначают соответственно  $L_z$  и  $M_z$ . Значения этих проекций не зависят от выбора точки  $O$  на оси  $z$ .

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

Производная по времени от момента импульса частицы относительно оси z равна моменту силы относительно этой оси. В частности, если  $M_z = 0$ , то  $L_z = \text{const}$ . Другими словами, если момент силы относительно некоторой неподвижной оси z равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой оси остается постоянным. При этом сам вектор  $L$  может и меняться.

## 2. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим произвольную систему частиц. Введем понятие момента импульса данной системы как векторную сумму моментов импульсов ее отдельных частиц:  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$  где все векторы определены относительно одной и той же точки  $O$  выбранной инерциальной системы отсчета. Заметим, что момент импульса системы - величина **аддитивная**. Это означает, что момент импульса системы равен сумме моментов импульсов ее отдельных частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.



$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{dL_i}{dt}$$

Производная равна моменту всех сил, действующих на  $i$ -ю частицу. Приравняем эту производную сумме моментов внутренних и внешних сил, т. е.  $M'_i + M_i$ . Тогда

$$\frac{dL}{dt} = \sum M'_i + \sum M_i$$

Здесь первая сумма - это суммарный момент всех внутренних сил относительно точки  $O$ , вторая сумма - суммарный момент всех внешних сил относительно той же точки  $O$ .

По определению, внутренние силы - это силы взаимодействия между частицами данной системы. По третьему закону Ньютона, эти силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой, т. е. имеют одинаковое плечо. Поэтому моменты сил каждой пары взаимодействия равны по модулю и противоположны по направлению, т. е. уравновешивают друг друга, и, значит, **суммарный момент всех внутренних сил всегда равен нулю.**

Как и в случае одной частицы, приращение момента импульса системы равно импульсу суммарного момента всех внешних сил за соответствующий промежуток времени. Оба момента,  $L$  и  $M$ , определены относительно одной и той же точки  $O$  выбранной системы отсчета.

Для применения закона сохранения импульса в неинерциальной системах отсчета нужно учитывать и действие сил инерции, играющих роль внешних сил, т. е. под  $M$  в этих уравнениях следует понимать суммарный момент всех внешних сил взаимодействия и суммарный момент сил инерции относительно одной и той же точки  $O$  системы отсчета.

То есть: *момент импульса системы может изменяться только под действием суммарного момента всех внешних сил.*

*Закон сохранения момента импульса: в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным, т.е, не меняется со временем.* Причем это справедливо для момента импульса, взятого относительно любой точки инерциальной системы отсчета.

Таким образом, в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц

$$L = \Sigma L_i(t) = \text{const.}$$

Моменты импульса отдельных частей или частиц замкнутой системы могут изменяться со временем. Однако эти изменения всегда происходят так, что приращение момента импульса одной части системы равно убыли момента импульса ее другой части (конечно, относительно одной и той же точки системы отсчета).

*Закон сохранения момента импульса играет такую же важную роль, как и законы сохранения энергии и импульса. Уже сам по себе он позволяет сделать во многих случаях ряд существенных заключений о свойствах тех или иных процессов, совершенно не вникая в их детальное рассмотрение.*

Особый интерес представляют случаи, когда момент импульса  $L$  сохраняется для незамкнутых систем, у которых, как известно, импульс  $p$  меняется со временем. Если относительно некоторой точки  $O$  выбранной системы отсчета, суммарный момент внешних сил  $M = 0$  в течение интересующего нас промежутка времени, то момент импульса системы относительно точки  $O$  сохраняется за это время. В незамкнутых системах такой точки, вообще говоря, может и не быть, что следует, прежде всего, выяснить для каждой конкретной задачи.

В более ограниченном случае у незамкнутых систем может сохраняться не сам момент импульса  $L$ , а его проекция на некоторую неподвижную ось  $z$ . Это бывает тогда, когда проекция суммарного момента  $M_z$  всех внешних сил на эту ось  $z$  равна нулю.

$$dL_z/dt = M_z$$

Здесь  $L_z$  и  $M_z$  - момент импульса, и суммарный момент внешних сил относительно оси  $z$ .

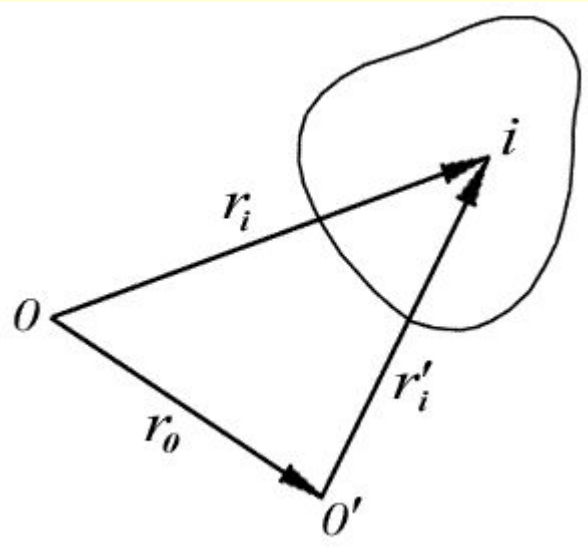
Если  $M_z = 0$ , то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется:

$$L_z = \sum L_{iz}(t) = \text{const.}$$

При этом сам вектор  $L$ , определенный относительно произвольной точки  $O$  на этой оси, может меняться. Например, если система движется в однородном поле тяжести, то суммарный момент всех сил тяжести относительно любой неподвижной точки  $O$  перпендикулярен вертикали, а значит, относительно любой вертикальной оси  $M_z = 0$  и  $L_z = \text{const}$ , чего нельзя сказать о векторе  $L$ .

### 3. Собственный момент импульса

Вычислим суммарный момент внешних сил. Как и момент каждой силы, суммарный момент сил зависит, вообще говоря, от выбора точки, относительно которой его определяют. Пусть  $M$  - суммарный момент сил относительно точки  $O$ , а  $M'$  - относительно точки  $O'$ , радиус-вектор которой  $r_0$ . Найдем связь между  $M$  и  $M'$ .



Радиус-векторы  $r_i$  и  $r'_i$  точки приложения силы  $F$  связаны соотношением  $r_i = r'_i + r_0$ . Поэтому выражение для  $M$  можно записать в таком виде:

$$\bar{M} = \sum [\vec{r}_i \vec{F}_i] = \sum [\vec{r}'_i \vec{F}_i] + \sum [\vec{r}_0 \vec{F}_i]$$

или  $\vec{M} = \vec{M}' + [\vec{r}_0 \vec{F}]$ , где  $F = \sum F_i$  - результирующая всех внешних сил.

Если  $F = 0$ , то суммарный момент внешних сил не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Таков, в частности, случай, когда к системе приложена **пара сил**.

В  $C$ -системе - системе отсчета, жестко связанной с центром масс системы частиц и перемещающаяся поступательно по отношению к инерциальным системам. Так как в общем случае  $C$ -система является неинерциальной, то результирующая всех внешних сил должна включать в себя кроме внешних сил взаимодействия  $F_{вз}$  и силы инерции  $F_{инер}$ . С другой стороны, в  $C$ -системе система частиц как целое покоится, а это значит, что  $F = F_{вз} + F_{инер} = 0$ .

**Т.е.: в  $C$ -системе суммарный момент всех внешних сил, включая силы инерции, не зависит от выбора точки  $O$ .**

*В С-системе суммарный момент сил инерции относительно центра инерции всегда равен нулю.*

В самом деле, сила инерции, действующая на каждую частицу системы,  $\mathbf{F}_i = -m_i \mathbf{a}_0$ , где  $\mathbf{a}_0$  - ускорение С-системы. Поэтому суммарный момент всех этих сил относительно центра инерции С

$$\vec{M}_C^{инер} = \sum [\vec{r}_i, -m_i \vec{a}_0] = -\left[ \left( \sum m_i \vec{r}_i \right), \vec{a}_0 \right].$$

Исходя из определения радиус-вектора центра масс  $\sum m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_c$ , а так как в нашем случае  $\mathbf{r}_c = 0$ , то и  $M_C^{инер} = 0$ .

Как и момент сил, момент импульса системы зависит, вообще говоря, от выбора точки  $O$ , относительно которой его определяют. При переносе этой точки на расстояние  $r_0$  новые радиус-векторы частиц определяются через старые формулой  $r_i = r'_i + r_0$ . Поэтому момент импульса системы относительно точки  $O$  можно представить так:

или 
$$\vec{L} = \sum [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum [\vec{r}'_i \vec{p}_i] + \sum [\vec{r}_0 \vec{p}_i],$$
 где  $L'$  - момент импульса системы относительно точки  $O'$ , а  $p = \sum p_i$  - полный импульс системы.

Если полный импульс системы  $p = 0$ , то ее момент импульса не зависит от выбора точки  $O$ . А этим как раз и отличается  $C$ -система, в которой система частиц как целое покоится. Отсюда можно сделать третий важный вывод: **в  $C$ -системе момент импульса системы частиц не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Этот момент будем называть собственным моментом импульса системы и обозначать  $L_c$ .**



Пусть  $L$  - момент импульса системы частиц относительно точки  $O$   $K$ -системы отсчета. Так как собственный момент импульса  $L$  в  $C$ -системе не зависит от выбора точки  $O'$ , возьмем точку  $O'$  совпадающей в данный момент с точкой  $O$   $K$ -системы. Тогда радиус-векторы каждой частицы в обеих системах отсчета будут одинаковы в этот момент ( $\vec{r}'_i = \vec{r}_i$ ), скорости же частиц связаны формулой  $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_c$ , где  $\vec{v}_c$  - скорость  $C$ -системы относительно  $K$ -системы. Поэтому можно записать:

$$\vec{L} = \sum m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] = \sum m_i [\vec{r}_i \vec{v}'_i] + \sum m_i [\vec{r}_i \vec{v}_c]$$

Первая сумма в правой части этого равенства - собственный момент импульса  $L_c$ . Вторую сумму представим как  $M[\vec{r}_c \vec{v}_c]$ , или  $[\vec{r}_c \vec{p}_c]$ , где  $M$  - масса всей системы,  $\vec{r}_c$  - радиус-вектор ее центра масс в  $K$ -системе,  $\vec{p}_c$  - суммарный импульс системы. В результате получим

$$\vec{L} = \vec{L}_c + [\vec{r}_c \vec{p}_c],$$

т. е. *момент импульса  $L$  системы частиц складывается из ее собственного момента импульса  $L_c$  и момента  $[\vec{r}_c \vec{p}_c]$ , обусловленного движением системы частиц как целого.*

Возьмем, например, однородный шар, скатывающийся по наклонной плоскости. Его момент импульса относительно некоторой точки этой плоскости складывается из момента импульса, связанного с движением центра масс шара, и собственного момента импульса, обусловленного вращением шара вокруг собственной оси.

Если центр инерции системы покоится (импульс системы  $\mathbf{p} = 0$ ), то ее момент импульса  $\mathbf{L}$  - это собственный момент импульса.

Когда  $L_c = 0$ , момент импульса системы относительно некоторой точки определяется только моментом, связанным с движением системы как целого. Так, например, ведет себя момент импульса любого твердого тела, совершающего поступательное движение.

Рассмотрим уравнение моментов в  $C$ -системе.  $dL_C/dt = M_C$ , где  $M_C$  - суммарный момент внешних сил в  $C$ -системе.

Так как  $C$ -система в общем случае неинерциальная, то в  $M_C$  входит помимо моментов внешних сил взаимодействия и момент сил инерции. С другой стороны, момент сил  $M_C$  в  $C$ -системе не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Обычно в качестве такой точки берут точку  $C$  - центр масс системы. Относительно этой точки суммарный момент сил инерции равен нулю, поэтому следует учитывать *только* суммарный момент внешних сил взаимодействия  $M_{B3}$ . Итак,  $dL_C/dt = M_{B3}$ , т. е. производная по времени от собственного момента импульса системы равна суммарному моменту всех внешних сил взаимодействия относительно центра инерции данной системы.

В частности, если  $M_{B3} = 0$ , то  $L_C = \text{const}$ , т. е. *собственный момент импульса системы сохраняется.*

В проекциях на ось  $z$ , проходящую через центр инерции системы,  $dL_{Cx}/dt = M_{B3x}$ , где  $M_{B3x}$  - суммарный момент внешних сил взаимодействия относительно неподвижной в  $C$ -системе оси  $z$ , проходящей через центр масс. И если  $M_{B3x} = 0$ , то  $L_{Cx} = \text{const}$ .