

Лекция 4

Проводники в
электростатическом поле.
Конденсаторы.

Энергия электрического поля.

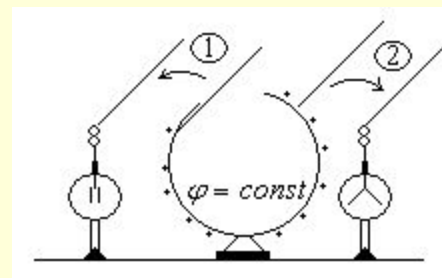
- 1.16. Равновесное распределение зарядов на проводниках.
- 1.17. Електроемкость проводников. Конденсаторы.
- 1.18. Вычисление емкости простых конденсаторов.
- 1.19. Соединение конденсаторов.
- 1.20. Энергия системы неподвижных точечных зарядов.
- 1.21. Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора.
- 1.22. Энергия электростатического поля.

1.16. Равновесное распределение зарядов на проводниках

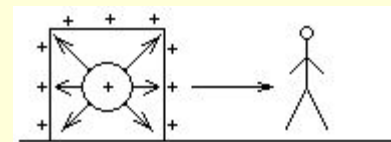
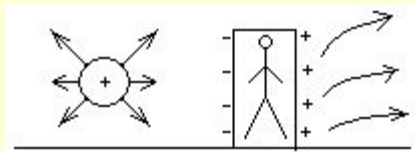
Опыт показывает, что при *равновесии* электрические заряды распределяются на *внешней поверхности* проводников. Поэтому, согласно теореме Гаусса, электрическое поле внутри проводника $E = 0$, а потенциал $\varphi = \text{const}$.

Из сказанного следует, что при *равновесии* зарядов поверхность проводника является *эквипотенциальной*. Вблизи поверхности заряженного проводника силовые линии перпендикулярны его поверхности, и поэтому работа по перемещению заряда вдоль любой линии на поверхности проводника

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$



При внесении *незаряженного* проводника в электрическое поле на его внешней поверхности появляются *индукционные* заряды противоположного знака, электрическое поле которых компенсирует внутри проводника внешнее поле. На этом свойстве проводников основано действие *электростатической защиты*.



1.17. Электроемкость проводников. Конденсаторы.

Заряд q , сообщенный уединенному проводнику создает вокруг него электрическое поле, напряженность которого пропорциональна величине заряда. Потенциал поля φ , в свою очередь, связан с напряженностью поля также пропорциональной зависимостью. Следовательно, заряд и потенциал уединенного проводника связаны между собой линейной зависимостью:

$$q = C\varphi$$

Коэффициент пропорциональности C называется **электроемкостью** (или просто **емкостью**) проводника. Емкость проводника зависит от его формы и размеров, а также свойств окружающей проводник среды. Если проводник находится в непроводящей среде с диэлектрической проницаемостью ε , то его емкость **увеличивается** в ε раз.

Единицы измерения емкости в СИ:

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{Кл}{В} = Ф$$

$$1Ф = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}_q}{\frac{1}{300} \text{ СГСЭ}_\varphi} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см} = 9 \cdot 10^6 \text{ км}$$

$$1\text{мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$1\text{нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$$

$$1\text{пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$$

Пара проводников, между которыми имеется разность потенциалов, называется простейшим **конденсатором**.

Индукированные на проводниках заряды равны по величине и противоположны по знаку. Заряд каждой пластины по абсолютной величине $q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU$

Если пространство между проводниками заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε , то $C = \varepsilon C_0$

где C_0 - емкость конденсатора в вакууме.

1.18. Вычисление емкости простых конденсаторов.

Согласно определению, емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}, \quad \text{где} \quad U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (E dr)$$

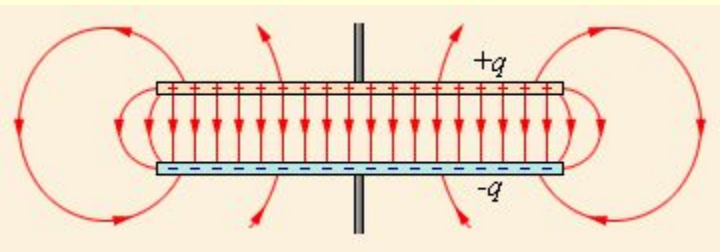
(интеграл берется вдоль силовой линии поля между обкладками конденсатора).

Следовательно, общая формула для вычисления емкости любого конденсатора есть:

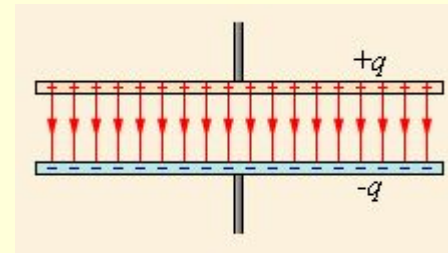
$$C = \frac{q}{\int_1^2 (E dr)}$$

Рассмотрим ряд примеров на применение этой формулы.

Пример 1. Емкость плоского конденсатора.



поле плоского конденсатора



Идеализированное представление поля плоского конденсатора.

Такое поле не обладает свойством потенциальности

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \\ q = \sigma \cdot S \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \sigma S}{d \sigma} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

S – площадь одной пластины.

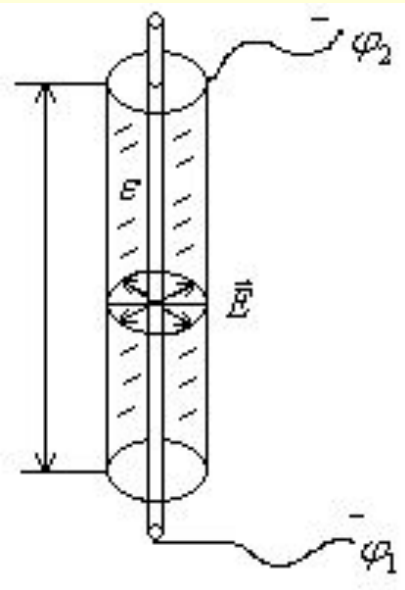
$$C = \varepsilon \cdot C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

Пример 2. Емкость цилиндрического конденсатора

Цилиндрический конденсатор – система из двух соосных

проводящих цилиндров радиусов r_1 и r_2 и длины l .

Емкости этих конденсаторов, заполненных диэлектриком с относительной проницаемостью ϵ



$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C_0 = \frac{q}{U} = \frac{\tau \cdot l}{\tau \ln \frac{r_1}{r_2}} \cdot 2\pi\epsilon_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

Заряд: $q = \tau \cdot l$, l – длина конденсатора; r_1, r_2 – радиусы электродов

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon l}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

Пример 3. Емкость сферического конденсатора и уединенного шара

Сферический конденсатор – это система из двух concentric проводящих сфер радиусов R_1 и R_2 .

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C_0 = \frac{q}{U} = \frac{q \cdot 4\pi\epsilon_0}{q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

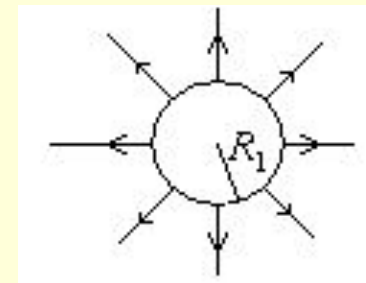
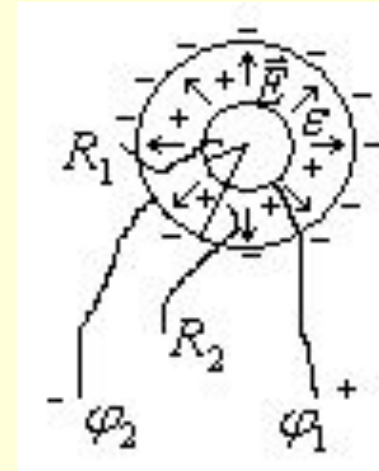
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Уединенный шар

$$R_2 \rightarrow \infty$$

$$R_1 = R$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon R$$

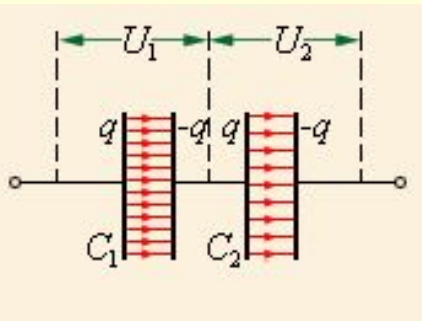


1.19. Соединение конденсаторов

Соединение конденсаторов бывает последовательным, параллельным и смешанным.

1) Последовательное соединение.

При последовательном соединении заряды на всех конденсаторах *одинаковые*, а напряжения *разные*



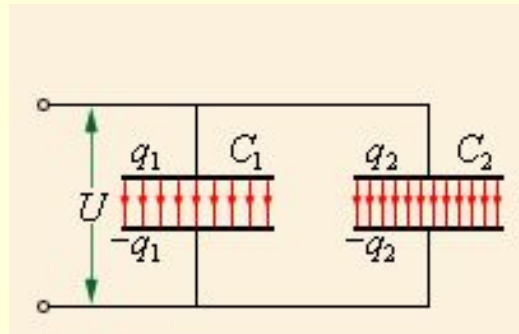
$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) = \frac{q}{C_{\text{общ}}}$$

$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

2) Параллельное соединение.

При параллельном соединении напряжения на всех конденсаторах **одинаковые** $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$, а заряды
– *разные*



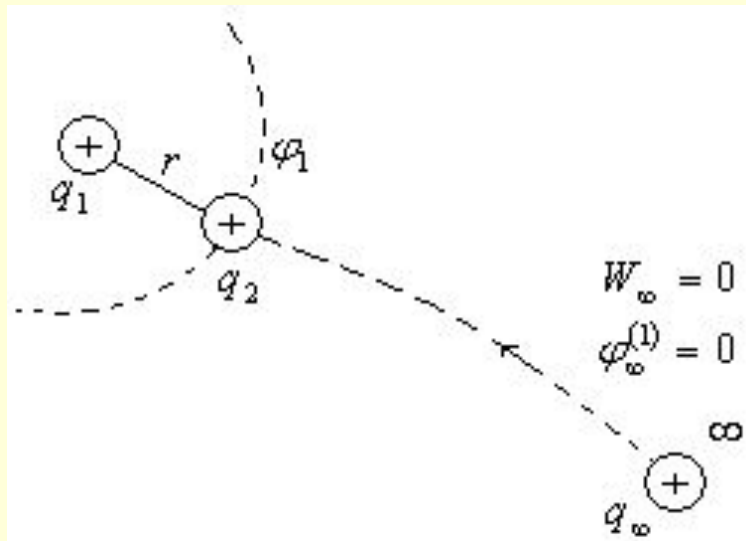
$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n = U(C_1 + C_2 + \dots + C_n) = C_{\text{общ}} \cdot U$$

$$C_{\text{общ}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

1.20. Энергия системы неподвижных точечных зарядов.

Как мы уже знаем, силы с которыми взаимодействуют заряженные тела, являются *потенциальными*. Следовательно, система заряженных тел обладает *потенциальной энергией*. Когда заряды удалены друг от друга на бесконечность, они не взаимодействуют. Положим в этом случае их энергию равной нулю.

Рассмотрим сначала систему, состоящую из двух точечных зарядов. Сблизим заряды на заданное расстояние r . При этом мы совершим работу против сил электрического поля, которая пойдет на увеличение потенциальной энергии системы. Сближение зарядов можно произвести, приближая q_2 к q_1 либо q_1 к q_2 .



В обоих случаях совершается одинаковая работа:

$$+ A = W_\infty - W, W_\infty = 0,$$

$$-W = A = q_2(\varphi_\infty^{(1)} - \varphi_1), \varphi_\infty^{(1)} = 0,$$

$$W = q_2\varphi_1; \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$W = q_2\varphi_1 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ или}$$

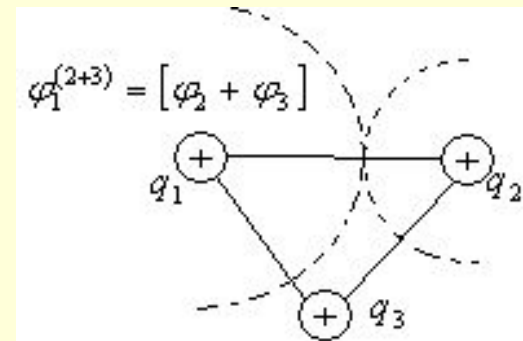
$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1)$$

Нетрудно убедиться в том, что потенциальная энергия системы трех неподвижных точечных зарядов может быть представлена в виде:

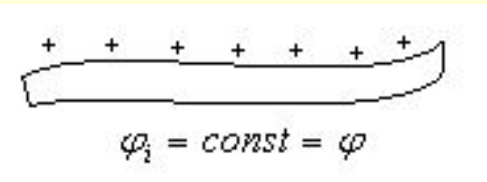
$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1^{(2+3)} + q_2\varphi_2^{(1+3)} + q_3\varphi_3^{(1+2)})$$

В общем случае системы n неподвижных точечных зарядов энергия системы определяется по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i$$



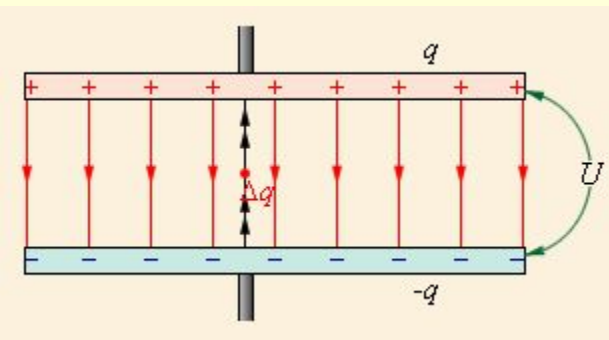
1.21. Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора.



Поверхность заряженного проводника при равновесии зарядов является эквипотенциальной ($\varphi_i = \varphi = const$).

Следовательно, **энергия заряженного проводника**: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{2} q \varphi$, где q - заряд проводника.

$$W = \frac{1}{2} q \varphi$$



Конденсатор представляет собой пару заряженных проводников, поэтому имеем:

$$q_1 = -q_2 = q$$

$$W_c = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} q U$$

А поскольку заряд $q = CU$, то **энергия заряженного конденсатора** может быть представлена одной из трех формул:

$$W_c = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

1.22. Энергия электростатического поля.

Выразим энергию заряженного конденсатора через величины, характеризующие электрическое поле, локализованное в пространстве между его обкладками – напряженность поля E и объем V , занятый полем. Имеем для напряженности поля:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d_2 - d_1} = \frac{U}{d}, \quad \text{где} \quad U = Ed$$

Воспользовавшись формулой для емкости плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ находим:

$$W_c = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \cdot E^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V,$$

где $V = Sd$ - объём конденсатора, откуда следует, что

$$W_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 V$$

Мы видим, что **энергия электрического поля** прямо пропорциональна квадрату его напряженности E и объёму V , занятому полем. Величину энергии поля, отнесенной к единице объема, называют **плотностью энергии**:

$$w_E = \frac{W_E}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right] \quad - \text{плотность энергии электрического поля.}$$