Лекция 8

МАГНИТОСТАТИКА

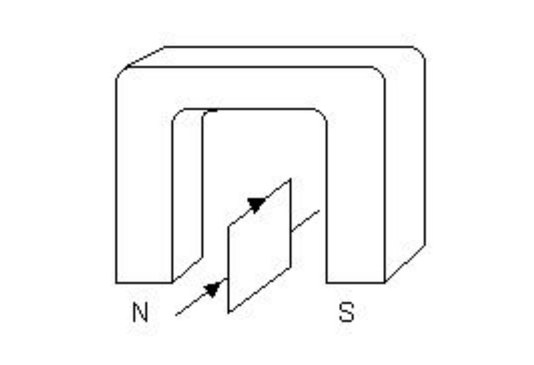
Постоянное магнитное поле.

3.1. Взаимодействие проводников с током. Закон Ампера.

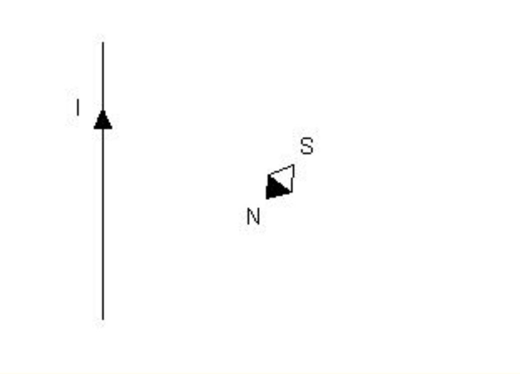
3.2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей.

3.3. Примеры вычисления магнитных полей с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

3.1. Взаимодействие проводников с током. Закон Ампера.

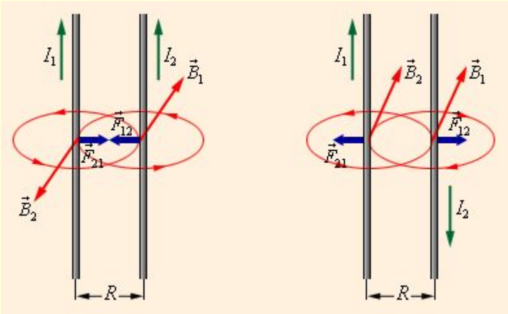


Известно, что постоянный магнит оказывает действие на проводник с током (например, рамку с током); известно также обратное явление – проводник с током оказывает действие на постоянный магнит (например, на магнитную стрелку компаса).



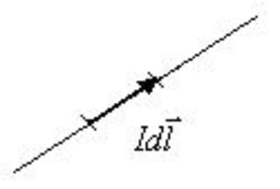
Естественно поставить *вопрос*: а не может ли *один проводник* с током оказывать непосредственное действие на *другой проводник* с током? Положительный ответ на этот вопрос дал в 1820г. *Ампер* (Ampere A., 1775-1836), установивший ***силовой закон взаимодействия проводников с током***.

Так, два прямолинейных параллельных проводника *притягиваются*, если токи в них текут в *одном* направлении и *отталкиваются*, если токи имеют *противоположное* направление.



Для того, чтобы сформулировать закон Ампера в современном виде, введем понятие ***элемента тока*** как вектора, равного *произведению силы тока I на элемент длины* $d\vec{l}$ проводника. *Элемент тока* в магнитостатике играет ту же роль, что и *точечный заряд* в электростатике.

Своими опытами Ампер установил, что сила взаимодействия двух элементов тока:



1) $dF_{12} \sim I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2$;

2) $dF_{12} \sim \frac{1}{r^n}, n = 2$;

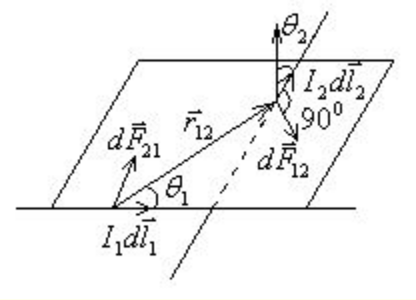
3) $d\vec{F}_{12}$ - зависит от взаимной ориентации элементов тока.

Объединяя эти результаты, можем написать ***закон Ампера*** в виде:

$$dF_{12} = k \frac{I_1 dl_1 \sin\theta_1 \cdot I_2 dl_2 \sin\theta_2}{r_{12}^2}$$

Углы θ_1 и θ_2 характеризуют ориентацию элементов тока; Коэффициент пропорциональности *k* зависит от выбора системы единиц измерения.

В системе СИ: $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м} = 12{,}57 \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$ - магнитная постоянная.



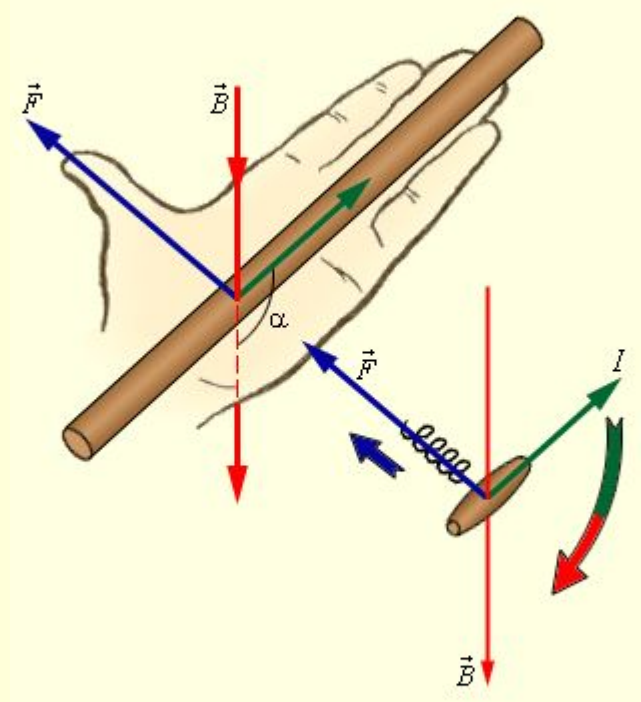
Закон Ампера является аналогом *закона Кулона* в магнитостатике и выражает собой силу взаимодействия двух элементов тока. Однако в отличие от закона Кулона, он имеет более сложное написание, что обусловлено тем, что элемент тока (в отличие от точечного заряда) характеризуется не только величиной, но и направлением в пространстве. Заметим, что согласно закону Ампера $d\vec{F}_{12} \neq -d\vec{F}_{21}$. Это кажущееся противоречие с *третьим законом Ньютона* связано с тем, что в действительности мы имеем дело не с элементами токов, а с *замкнутыми макроскопическими* токами, для которых третий закон Ньютона *выполняется*.

В векторной форме ***закон Ампера*** записывается следующим образом:

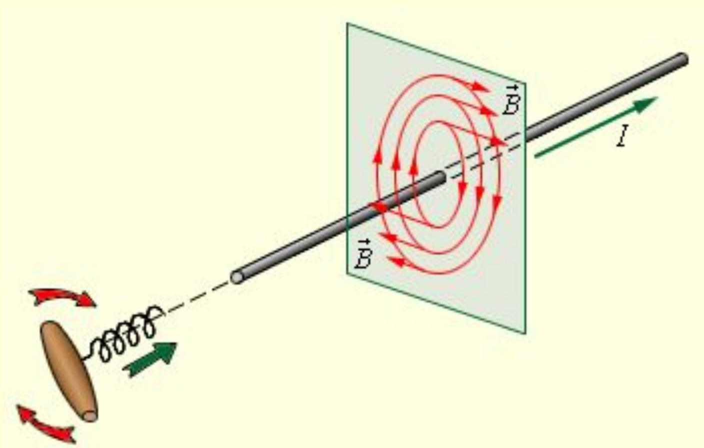
$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} \left[d\vec{l}_2 \left[d\vec{l}_1 \vec{r}_{12} \right] \right]$$

Сила Ампера направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции $\vec{B}$ и направлению тока, текущего по проводнику. Для определения направления силы Ампера обычно используют ***правило левой руки***: если расположить левую руку так, чтобы линии индукции $\vec{B}$ входили в ладонь, а вытянутые пальцы были направлены вдоль тока, то отведенный большой палец укажет направление силы, действующей на проводник.

Если угол α между направлениями вектора $\vec{B}$ и тока в проводнике отличен от 90°, то для определения направления силы Ампера $\vec{F}$ более удобно пользоваться ***правилом буравчика***: воображаемый буравчик располагается перпендикулярно плоскости, содержащей вектор $\vec{B}$ и проводник с током, затем его рукоятка поворачивается от направления тока к направлению вектора $\vec{B}$. Поступательное перемещение буравчика будет показывать направление силы Ампера $\vec{F}$. Правило буравчика часто называют **правилом правого винта**.



Для определения направления вектора магнитного поля $\vec{B}$ прямолинейного проводника также можно пользоваться правилом буравчика: направление вращения рукоятки буравчика совпадает с направлением вектора $\vec{B}$ если при вращении буравчик перемещается в направлении тока.



3.2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей.

Движущиеся электрические заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства – создают в нем ***магнитное поле.*** Это поле проявляется в том, что на помещенные в нем проводники с током действуют силы. ***Силовой характеристикой*** магнитного поля является ***индукция поля*** , играющая роль аналога напряженности электрического поля , которая характеризует силовое действие электрического поля на заряды.

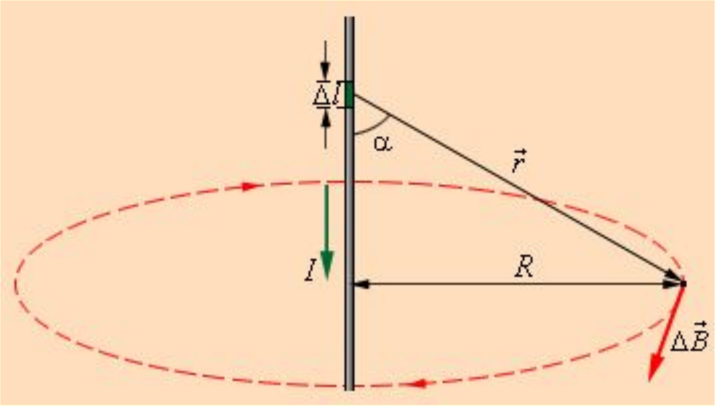
Как установили на опыте *Био* (Biot J., 1774-1862) и *Савар* (Savart F., 1791-1841) индукция магнитного поля, создаваемого проводниками с током различной конфигурации, во всех случаях пропорциональна силе тока в проводнике I и зависит от расстояния r до точки, в которой определяется поле. Анализируя результаты опытов Био и Савара, *Лаплас* (Laplace P., 1749-1827) пришел к выводу, что *магнитное поле любого тока* может быть вычислено как *результат векторного сложения (суперпозиции) магнитных полей*, создаваемых отдельными элементами тока. Это правило получило название ***принципа суперпозиции магнитных полей***.

Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока $I\vec{dl}$, Лаплас получил формулу, названную впоследствии ***законом Био-Савара-Лапласа*:**

$$d\vec{B} = k\frac{I[\vec{dl}\,\vec{r}]}{r^3},$$

где коэффициент k имеет то же значение, что и в законе Ампера (в СИ: $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$).

Направление вектора $d\vec{B}$ образует с векторами $\vec{r}$ и $\vec{dl}$ правовинтовую систему.



Наряду с индукцией $\vec{B}$, для характеристики магнитного поля вводят также понятие ***напряженности магнитного поля*** $\vec{H}$ - величины, определяемой в вакууме как:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

Единицей измерения индукции поля $\vec{B}$ в СИ является *Т* (Тесла)

$$1\ \text{Тл} = 1\ \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}};$$

напряженность магнитного поля $\vec{H}$ измеряется в *А/м*.

С помощью закона Био-Савара-Лапласа *напряженность магнитного поля*, создаваемого элементом тока $I\vec{dl}$ в точке $\vec{r}$, рассчитывается по формуле:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi \cdot r^3}[\vec{dl}\,\vec{r}].$$

Или в скалярном виде:

,

где θ – угол между элементом длины тока $\vec{dl}$ и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным в точку наблюдения.

Возвращаясь к закону Ампера, мы можем сказать, сила взаимодействия между двумя элементами тока есть результат *действия* магнитного поля одного элемента тока на другой. Другими словами, можем написать:

$$d\vec{F}_{12} = \mu_0 I_2[d\vec{l}_2 d\vec{H}_{12}] = I_2[d\vec{l}_2 d\vec{B}_{12}] \quad ,$$

где

$$d\vec{H}_{12} = \frac{1}{4\pi}\frac{I_1[d\vec{l}_1 \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$$

- напряженность магнитного поля, созданного элементом первого тока в том месте, где находится элемент второго тока.

Следовательно, на любой элемент $Id\vec{l}$ проводника с током, находящегося в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}\vec{B}] \quad .$$

Эта формула является аналогом соответствующей формулы в электростатике

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad ,$$

определяющей силу, действующую на точечный заряд q, помещенный в электрическое поле напряженностью $\vec{E}$.

Полная сила, действующая на проводник с током, находящийся в магнитном поле, определяется по формуле:

$$\vec{F} = I\int_l [d\vec{l}\vec{B}] \quad ,$$

где интегрирование производится по всей длине проводника.

В частности, для прямолинейного отрезка проводника с током длиной l, расположенного под углом θ к силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией B, имеем:

$$F = IlB\sin\theta$$

Эту формулу часто называют ***силой Ампера***.

3.3. Примеры вычисления магнитных полей с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

1) *Напряженность магнитного поля в центре кругового витка с током*.

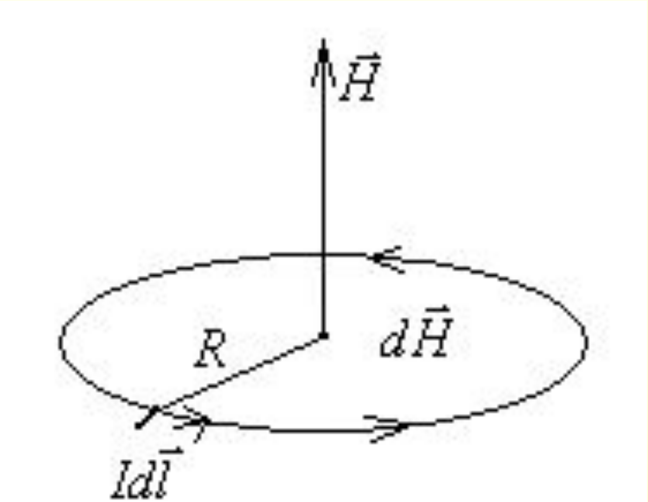
В данном случае имеем, согласно закону Био-Савара-Лапласа:

$$dH = \frac{Idl}{4\pi R^2},$$

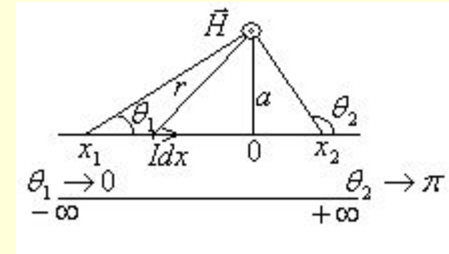
откуда находим после интегрирования по всей длине витка – окружности радиуса R:

$$H = \int_0^{2\pi R} \frac{Idl}{4\pi R^2} = \frac{I \cdot 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{I}{2R}.$$

$$H = \frac{I}{2R}$$



2) *Отрезок проводника с током конечной длины и бесконечно длинный проводник с током*



В этом случае имеем

$$dH = \frac{Idl\sin\theta}{4\pi \cdot r^2}$$

где

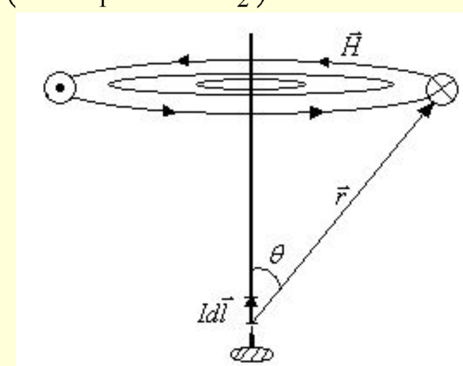
$$\sin\theta = \frac{a}{r} \qquad r = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad dl = dx$$

тогда

$$dH = \frac{Idxa}{4\pi \cdot r^3} = \frac{Idxa}{4\pi(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Интегрируя это выражение в пределах от $-x_1$ до x_2, находим:

$$H = \frac{Ia}{4\pi}\int_{-x_1}^{x_2}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{Ia}{4\pi}\cdot\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_{-x_1}^{x_2} = \frac{I}{4\pi a}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+a^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+a^2}}\right) = \frac{I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



где $\cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+a^2}}, \cos(\pi - \theta_2) = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2+a^2}}$

$$H = \frac{I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Переходя в этой формуле к пределу при $\theta_1 \to 0$ и $\theta_2 \to \pi$

, получим формулу для расчета напряженности магнитного поля прямолинейного проводника с током *бесконечной* длины:

$$H_\infty = \frac{I}{2\pi a}$$

3) *Магнитное поле движущегося заряда.*

Любой проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Но ток в проводнике – есть направленное движение зарядов. Следовательно, можно допустить, что источником магнитного поля являются движущиеся заряды. Тогда магнитное поле, созданное проводником с током в некоторой точке пространства, будет представлять собой суперпозицию магнитных полей, созданных в этой же точке пространства каждым из движущихся зарядов в отдельности.

Пусть υ – скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; q – заряд носителя тока (в металлах $q = - e$). Для элемента тока можно написать:

$$Idl = nq\upsilon Sdl = dNq\upsilon,$$

где $n = dN/dV$ – концентрация зарядов, dN – число зарядов в элементе объема $dV = Sdl$.

На основании закона Био-Савара-Лапласа, напряженность магнитного поля, созданного одним движущимся зарядом, будет:

$$H = \frac{dH}{dN} = \frac{q\upsilon\sin\theta}{4\pi r^2}$$

или в векторном виде

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{q[\vec{\upsilon}\vec{r}]}{r^3}.$$

Эта формула отражает *релятивистскую* (относительную) сущность магнитного поля. Она показывает, что магнитное поле проявляется как результат относительного движения заряда. Отметим, что приведенная формула справедлива при скоростях движения заряда $\upsilon << c$ (с=$3\cdot10^8$ *м/с* – скорость света в вакууме).