Лекция 16

5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Электромагнитные колебания.

5.1. Электрический колебательный контур. Формула Томсона.

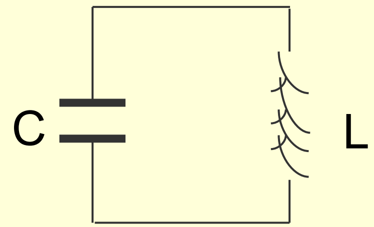
5.2. Свободные затухающие колебания. Добротность колебательного контура.

5.3. Вынужденные электрические колебания. Метод векторных диаграмм.

5.4. Резонансные явления в колебательном контуре. Резонанс напряжений и резонанс токов.

5.1. Электрический колебательный контур. Формула Томсона.

Электромагнитные колебания могут возникать в цепи, содержащей индуктивность L и емкость C. Такая цепь называется ***колебательным контуром.*** Возбудить колебания в таком контуре можно, например, предварительно зарядив конденсатор от внешнего источника напряжения, соединить его затем с катушкой индуктивности.



Поскольку внешнее напряжение к контуру не приложено, сумма падений напряжений на емкости и индуктивности должна быть равна нулю в любой момент времени:

$$\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0,$$

откуда, учитывая, что сила тока $I = \dot{q}$, получаем дифференциальное уравнение ***свободных незатухающих колебаний*** электрического заряда в колебательном контуре

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad .$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

то полученное уравнение принимает вид:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решением этого уравнения, как известно, является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по *гармоническому закону* с частотой ω_0, называемой *собственной частотой* колебательного контура. *Период колебаний* определяется по ***формуле Томсона*** (Thomson W., 1824-1907):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Напряжение на конденсаторе:

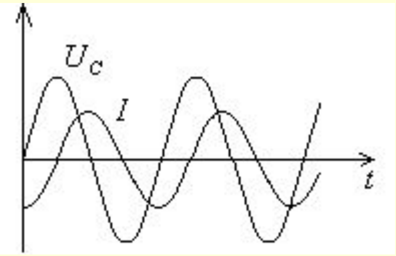
$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $U_m = \frac{q_m}{C}$ - амплитуда напряжения.

Сила тока в контуре:

$$I = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}).$$

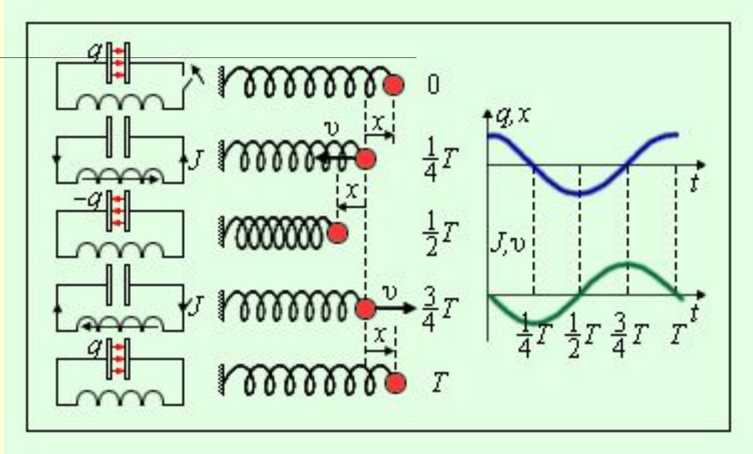
Сопоставляя полученные выражения, видим, что когда напряжение на конденсаторе, а значит энергия электрического поля, обращается в нуль, сила тока, а, следовательно, энергия магнитного поля, достигает максимального значения. Таким образом, электрические колебания в контуре сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.



Амплитуды тока I_m и напряжения U_m связаны между собой очевидным соотношением:

$$I_m = \omega_0 q_m = \omega_0 C U_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m \quad .$$

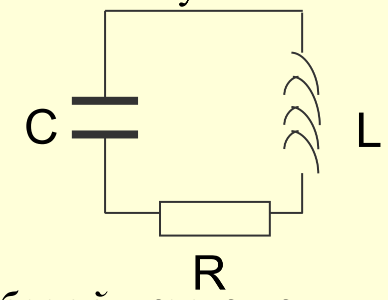
Аналогия процессов свободных электрических и механических колебаний



Электрические величины		Механические величины	
Заряд конденсатора	$q\ (t)$	Координата	$x\ (t)$
Ток в цепи	I = dq/dt	Скорость	v = dx/dt
Индуктивность	L	Масса	m
Величина, обратная электроемкости	1/C	Жесткость	k
Напряжение на конденсаторе	U = q/C	Упругая сила	kx
Энергия электрического поля конденсатора	$q^2/(2C)$	Потенциальная энергия пружины	$kx^2/2$
Магнитная энергия катушки	$LI^2/2$	Кинетическая энергия	$mv^2/2$
Магнитный поток	LI	Импульс	$m\upsilon$

5.2. Свободные затухающие колебания. Добротность колебательного контура.

Всякий реальный колебательный контур обладает сопротивлением. Энергия электрических колебаний в таком контуре постепенно расходуется на нагревание сопротивления, переходя в джоулево тепло, вследствие чего колебания затухают.



Уравнение ***свободных затухающих колебаний*** можно получить, исходя из того, что в отсутствии внешнего источника напряжения, сумма падений напряжений на индуктивности, емкости и сопротивлении равна нулю для любого момента времени:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0$$

или, поскольку $I = \dot{q}$,

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 .$$

Введя обозначение

$$\beta = \frac{R}{2L} ,$$

этому уравнению можно придать вид:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 ,$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$.

Решение полученного уравнения имеет вид:

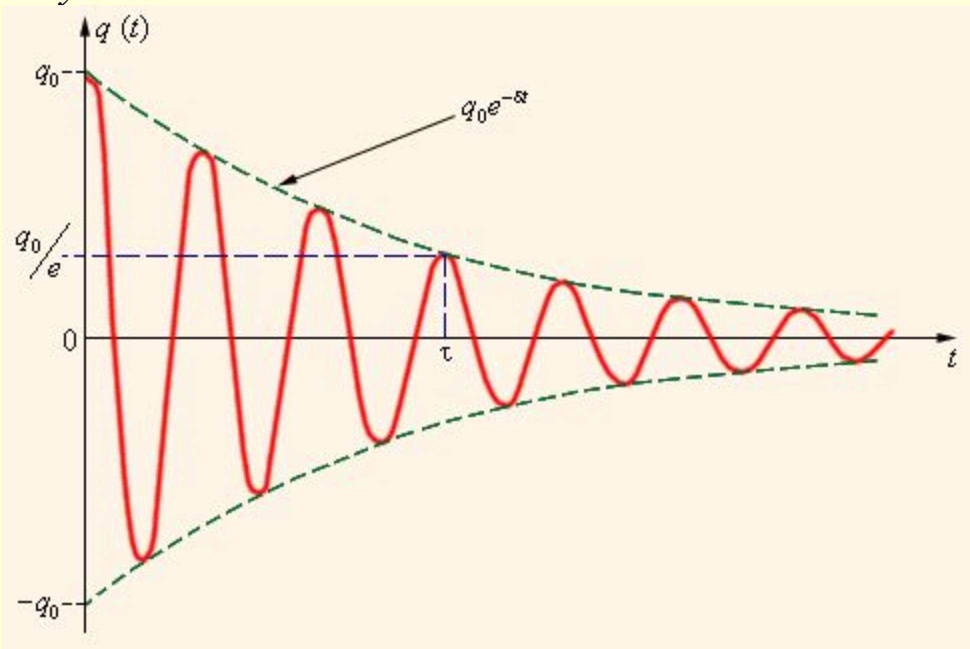
$$q = q_0(t)\cdot\cos(\omega' t + \varphi)\text{ , где }\; q_0(t) = q_m \exp(-\beta t)$$

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Мы видим, что частота свободных затухающих колебаний ω' *меньше* собственной частоты ω_0. Подставив значения ω_0 и β, получим:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Амплитуда затухающих колебаний заряда конденсатора $q_0(t)$ уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Коэффициент β называется *коэффициентом затухания*.



Затухание колебаний принято характеризовать *декрементом колебаний* λ, определяемым как:

$$\lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \beta T \quad .$$

Легко видеть, что декремент колебаний обратен по величине числу колебаний N_e, совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз: $\lambda=1/N_e$. *Добротностью* колебательного контура называется величина:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e$$

Из этой формулы видно, что добротность тем *выше*, чем *меньше* коэффициент затухания β. При малых затуханиях (λ<<1) можно приближенно считать, что

$$Q = \frac{\omega'}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad .$$

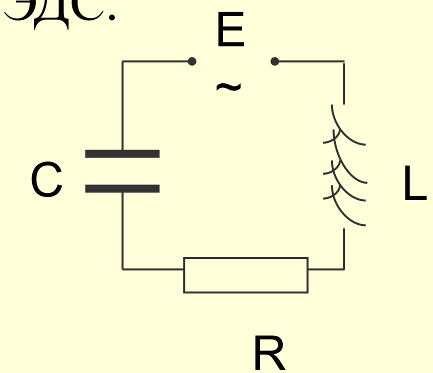
Амплитуда тока в контуре, как и заряд на конденсаторе, убывает со временем по закону $e^{-\beta t}$. Энергия W, запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды тока (или квадрату напряжения на конденсаторе). Следовательно, W убывает со временем по закону $e^{-2\beta t}$. Относительное уменьшение энергии за период колебания T (при малом затухании) есть:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = 1 - e^{-2\beta t} \approx 2\beta T = \frac{2\pi}{Q} \quad .$$

Таким образом, потери энергии в колебательном контуре тем *меньше*, чем *выше* его добротность.

5.3. Вынужденные электрические колебания. Метод векторных диаграмм.

Если в цепь электрического контура, содержащего емкость, индуктивность и сопротивление, включить источник переменной ЭДС, то в нем, наряду с *собственными затухающими колебаниями*, возникнут ***незатухающие вынужденные колебания.*** Частота этих колебаний *совпадает* с частотой изменения переменной ЭДС.



Чтобы получить уравнение ***вынужденных колебаний***, надо, согласно второму правилу Кирхгофа, приравнять сумму падений напряжений на элементах контура приложенной ЭДС:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = E_0 \cos\omega t$$

или

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \cos\omega t$$

где E_0 - *амплитуда* переменной ЭДС, ω – ее *циклическая частота.*

Интересующее нас частное решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$q(t) = q_0(\omega)\cdot\cos[\omega t - \psi(\omega)] \quad \text{где} \quad q_0(\omega) = \frac{E_0}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$tg\psi(\omega) = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

Решение соответствующего *однородного* уравнения, как мы видели в п.5.2, представляет собой свободные затухающие колебания, которые с течением времени становятся исчезающе малыми, и их можно в дальнейшем не учитывать.

Выпишем формулы для силы тока в цепи и падений напряжений на каждом из элементов контура.

Сила тока:

$$I(t) = \dot{q}(t) = I_0(\omega)\cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}),$$

$$I_0(\omega) = \omega q_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

По аналогии с законом Ома для полной цепи по постоянному току величину

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

называют *полным сопротивлением* цепи по переменному току. Эта величина представляет собой модуль *комплексного сопротивления* $Z(\omega) = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, называемого также *импедансом* цепи. Сопротивление R называют ***активным*** *сопротивлением* (на нем *выделяется* тепло). Чисто мнимые сопротивления ωL и $\frac{1}{\omega C}$ называют соответственно *индуктивным* и *емкостным* ***реактивными*** *сопротивлениями* (на них тепло *не выделяется*).

Напряжение на сопротивлении R:

$$U_R(t) = RI(t) = U_{R0}(\omega)\cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}) \quad , \qquad U_{R0}(\omega) = RI_0(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}R \quad .$$

Напряжение на конденсаторе C:

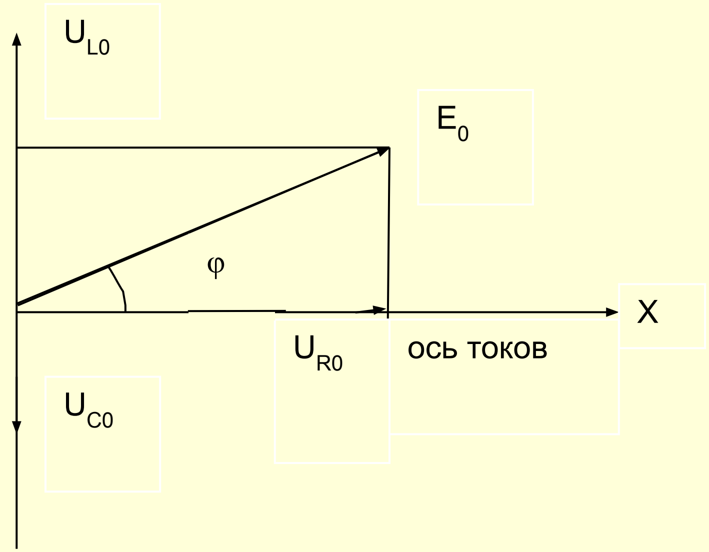
$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_{C0}(\omega)\cos(\omega t - \psi) \quad , \qquad U_{C0}(\omega) = \frac{q_0(\omega)}{C} = \frac{E_0}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad .$$

Напряжение на катушке индуктивности L:

$$U_L(t) = \dot{I}(t)L = \ddot{q}(t)L = U_{L0}(\omega)\cos(\omega t - \psi + \pi) \quad , \qquad U_{L0}(\omega) = q_0(\omega)\omega^2 L = \frac{\omega\ LE_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad .$$

Сравнивая написанные формулы, видим, что изменение напряжения на сопротивлении следует за изменением силы тока в цепи без *отставания* или *опережения* по фазе, изменение напряжение на конденсаторе *отстает* по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а на индуктивности *опережает* по фазе на $\frac{\pi}{2}$ изменение тока. Наглядно это можно изобразить с помощью ***векторной диаграммы***, вещественная ось которой (ось X) совпадает с осью токов. *Длина* каждого вектора на этой диаграмме дает *амплитуду* соответствующего напряжения, а *угол*, который составляет данный вектор с осью токов – *сдвиг фазы* по отношению к изменению силы тока в цепи.

Векторная диаграмма для последовательного RLC-контура.



Амплитуда *суммарного напряжения* на всех элементах контура, равная амплитуде E_0 действующей в контуре ЭДС, является результатом векторного сложения символических напряжений $\dot{U}_R, \dot{U}_L$ и $\dot{U}_C$. Этот вектор образует с осью токов угол $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$, показывающий *разность фаз* между током и ЭДС. Тангенс этого угла равен:

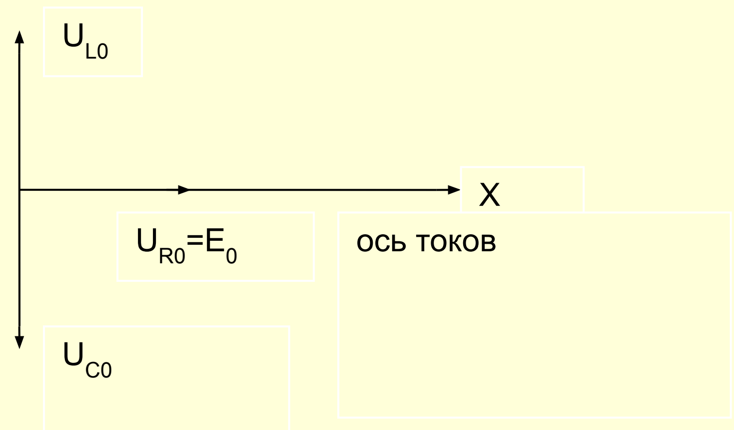
$$tg\varphi = tg(\psi - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{tg\psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

5.4. Резонансные явления в колебательном контуре. Резонанс напряжений и резонанс токов.

Как следует из приведенных формул, при частоте переменной ЭДС ω, равной

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ,$$

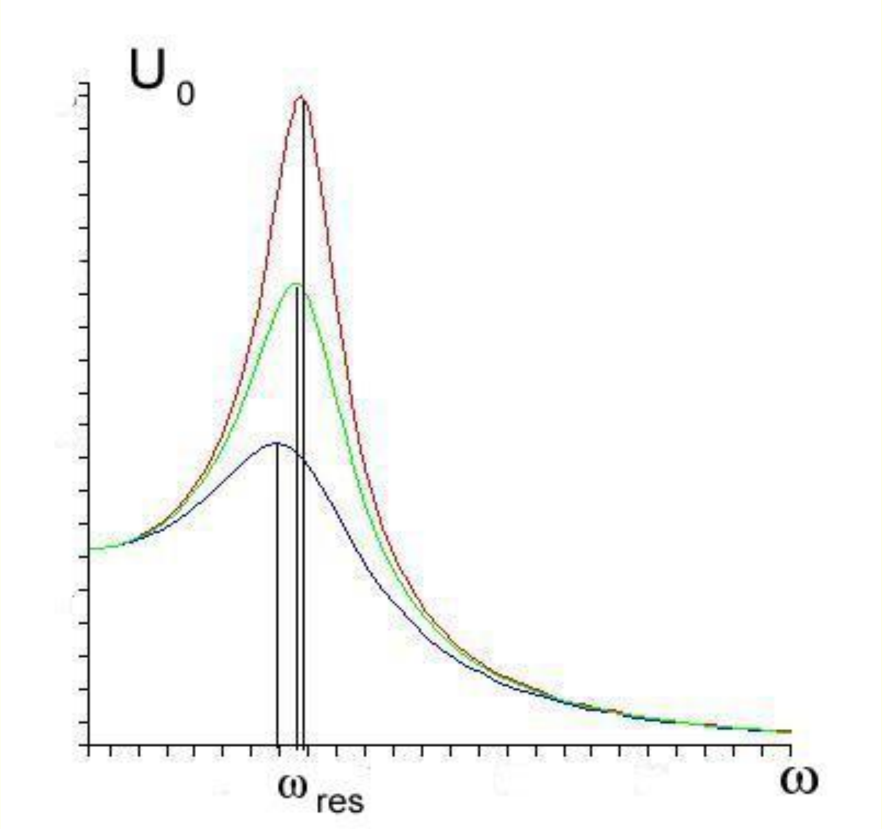
амплитудное значение *силы тока* в колебательном контуре, принимает *максимальное* значение $I_{0\max} = \frac{E_0}{R}$. При этом ***амплитуда напряжения*** на *активном сопротивлении* R также ***максимальна*** и равна $U_{R0} = I_{0\max} R = E_0$. *Падения напряжения* на емкости U_C и индуктивности U_L *одинаковы* по амплитуде, но *противоположны* по фазе, и они взаимно *компенсируют* друг друга. Это явление, имеющее место в *последовательном колебательном контуре,* называется ***резонансом напряжений***. Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, показана на рисунке.



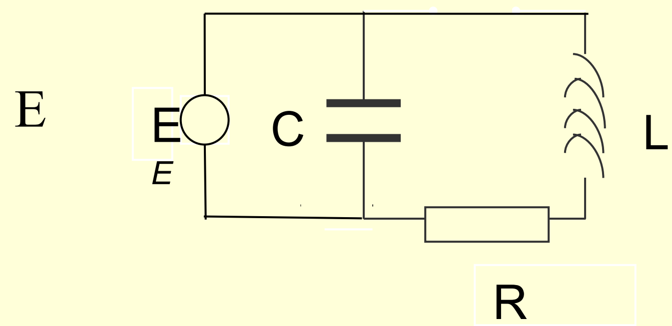
Максимальное значение амплитуды напряжения на конденсаторе $U_{C0}(\omega)$ достигается при частоте

$$\omega_{Срез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \le \omega_0 .$$

Резонансные кривые для $U_{C0}(\omega)$ представлены на рисунке. Максимум получается тем *выше* и *острее*, чем *меньше* коэффициент затухания β, то есть чем *меньше* активное сопротивление R и *больше* индуктивность контура L.



Если источник переменной ЭДС подключить *параллельно* конденсатору, то получим колебательный контур, который называется *параллельным RLC-контуром*.



В таком контуре при $\omega \approx \omega_0$ наблюдается другое резонансное явление, получившее название ***резонанса токов.*** При резонансе токов *токи*, текущие через емкость и индуктивность *одинаковы* по амплитуде, но *противоположны* по фазе. При этом *общий ток* в цепи ЭДС ***близок к нулю***, хотя *токи* в самом контуре могут быть *очень велики*. Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, приведена на рисунке.

Можно показать, что при резонансе токов *полное сопротивление Z(ω)* параллельного контура максимально и равно чисто *активному сопротивлению R*. Резонансная частота, при которой *Z(ω)* максимально, определяется из условия равенства нулю реактивной части комплексного сопротивления :

$$\widetilde{Z}(\omega) = \left[\frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{R + i\omega L}\right]^{-1}$$

$$\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2 = 0 \,,$$

откуда

$$\omega'_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2} \le \omega_0 \,.$$

Резонансные кривые для амплитудных значений $I_{C0}(\omega)$ тока, текущего через конденсатор, приведены на рисунке.

Резонансные явления в колебательных контурах широко используются в электро- и радиотехнике (резонансные усилители, частотные фильтры и другие). В частности, явление резонанса используется для выделения из сложного сигнала нужной частотной составляющей. Настроив контур (путем изменения его параметров *C* и/или *L*) на одну из выбранных частот, можно получить на конденсаторе напряжение, в *Q* раз *превышающее* величину напряжения данной частотной составляющей. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.