Лекция 17

Общие свойства и характеристики волновых процессов.

5.5. Волновое уравнение. Типы и характеристики волн.

5.6. Электромагнитные волны.

5.7. Энергия и импульс электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга.

5.8. Упругие волны в твердых телах. Аналогия с электромагнитными волнами.

5.9. Стоячие волны.

5.10. Эффект Допплера.

5.5. Волновое уравнение. Типы и характеристики волн.

Процесс распространения колебаний в пространстве называется ***волновым процессом*** или просто ***волной***. Волны различной природы (звуковые, упругие, электромагнитные) описываются сходными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка по пространственно-временным переменным. Уравнение, описывающее волновой процесс, называется ***волновым уравнением*, функция, которая удовлетворяет этому уравнению – *волновой функцией*.

Волны бывают *скалярные* (давление в звуковой волне, плотность заряда в плазме) и *векторные* (упругие волны в кристаллах, электромагнитные волны). Если направление колебаний в волне совпадает с направлением ее распространения, то такая волна называется *продольной*; если колебания происходят в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны – *поперечной*. Направление колебаний определяет ***поляризацию*** волны.

Волновое уравнение, описывающее скалярную волну $\xi = \xi(x,y,z,t)$, имеет вид:

$$\Delta\xi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

В случае, когда волновая функция зависит только от одной пространственной координаты (скажем, x), вдоль направления которой распространяется волна, решением волнового уравнения является функция:

$$\xi(x,t) = a\cos(\omega \cdot t - kx + \alpha) \; .$$

Постоянная a называется ***амплитудой*** волны, она показывает *максимальное значение* колеблющейся величины. Выражение, стоящее в скобках под знаком косинуса, называется ***фазой*** волны; ω – ***угловая частота***; k – ***волновое число.***

Из приведенного выражения видно, что в каждой данной точке пространства $x = x_0$ колебания происходят по гармоническому закону:

$$\xi(t) = a\cos(\omega t + \varphi), \;\; \varphi = \alpha - kx_0 \, .$$

Волна, в которой колебания происходят по *гармоническому* закону, называется ***монохроматической.***

Скорость распространения волны υ, входящая в волновое уравнение, есть скорость перемещения в пространстве фиксированного значения *фазы* волны, в связи с чем ее называют ***фазовой скоростью.*** Эту скорость легко определить, взяв дифференциал от произвольного постоянного значения фазы $\omega t - kx + \alpha = const$. После чего находим:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Угловая частота ω связана с ***периодом волны*** T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

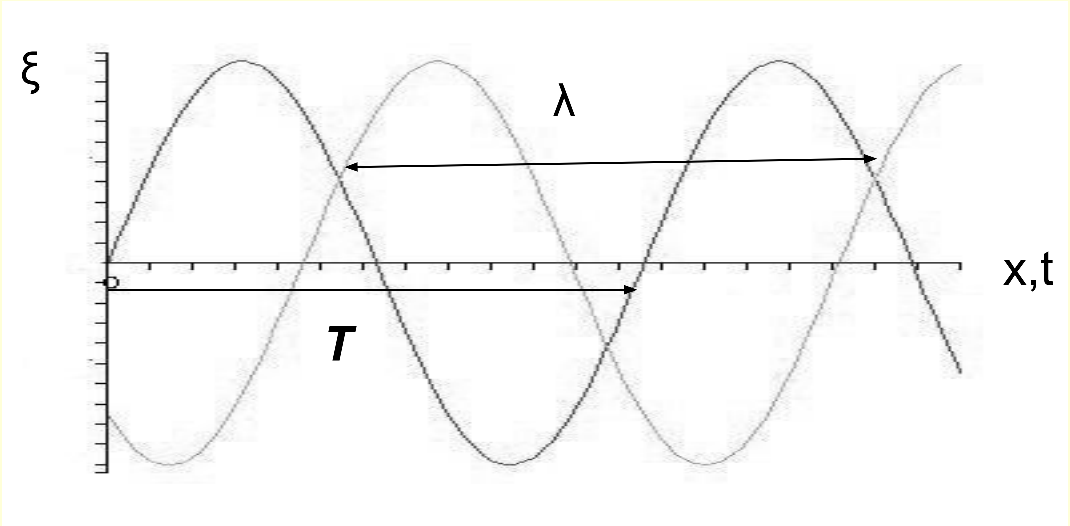
Волновое число k связано с ***длиной волны*** λ:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Используя эти соотношения, можем связать фазовую скорость волны υ с ее длиной λ и периодом T:

$$\lambda = \upsilon T$$

Отсюда следует, что *длина волны* – это расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в *одинаковой* фазе.



Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется ***волновой поверхностью***. От волновой поверхности следует отличать ***волновой фронт*** (или ***фронт волны***) – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к *данному* моменту времени *t*. Волновой фронт представляет собой поверхность, которая отделяет область пространства, *уже* вовлеченную в волновой процесс, так называемую ***волновую зону***, от той части пространства, куда колебания *еще* не дошли.

Волновую поверхность можно провести через *любую* точку пространства *внутри* волновой зоны. Следовательно, волновых поверхностей существует *бесконечное множество*, в то время как *волновой фронт* в каждый момент времени только *один*. Волновые поверхности остаются *неподвижными*, волновой фронт все время *перемещается* в пространстве со скоростью, равной фазовой скорости волны *v*.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости, цилиндра или сферы. В ***плоской*** волне волновые поверхности представляют собой систему *параллельных* друг другу *плоскостей*, в ***цилиндрической*** волне – систему *коаксиальных цилиндров*, в ***сферической*** волне – систему *концентрических сфер*. Уравнения перечисленных типов волн имеют соответственно вид: $\xi(\vec{r},t) = a\cos(\omega \cdot t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$ - плоская волна;

$$\xi(\vec{r},t) = \frac{a}{\sqrt{r}}\cos(\omega \cdot t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$$ - цилиндрическая волна;

$$\xi(\vec{r},t) = \frac{a}{r}\cos(\omega \cdot t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$$ - сферическая волна,

где $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ - радиус-вектор произвольной точки волновой поверхности; $\vec{k} = k\vec{n}$ - волновой вектор, $\vec{n}$ - единичный вектор волновой нормали, совпадающей с направлением вектора фазовой скорости .

Видим, что амплитуда цилиндрической волны убывает с расстоянием как $1/\sqrt{r}$, а сферической – как $1/r$.

В *общем случае* решение волнового уравнения представляет собой *суперпозицию* двух волн (скалярных или векторных), распространяющихся в *противоположных* направлениях:

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_1(\vec{r} - \vec{\upsilon}t) + \vec{f}_2(\vec{r} + \vec{\upsilon}t) \quad ,$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции.

5.6. Электромагнитные волны.

Из уравнений Максвелла следует, что если возбудить с помощью зарядов *переменное* электрическое или магнитное поле, в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся в виде ***электромагнитной волны.*** Для однородной *нейтральной* ($\rho = 0$) и *непроводящей* ($\vec{j} = 0$) среды с постоянными проницаемостями ε и μ, волновое уравнение, описывающее электромагнитную волну, распадается на два независимых векторных уравнения соответственно для электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad \Delta\vec{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Фазовая скорость электромагнитной волны v определяется по формуле:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \quad .$$

Для вакуума ($\varepsilon = \mu = 1$) по этой формуле получается:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}} = 3\cdot 10^8\,\frac{м}{с} = c \quad .$$

Таким образом, в вакууме *фазовая скорость* электромагнитной волны совпадает со *скоростью света*. В среде с постоянными проницаемостями ε и μ

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Рассмотрим ***плоскую электромагнитную волну***, распространяющуюся вдоль оси x, перпендикулярной к волновым поверхностям. В этом случае, очевидно, поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не зависят от координат y и z. Соответствующие уравнения Максвелла, записанные для этого случая, приводят к следующим скалярным волновым уравнениям:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Простейшими решениями этих уравнений являются функции

$$E_y(x,t) = E_m \cos(\omega t - kx);$$

$$H_z(x,t) = H_m \cos(\omega t - kx),$$

совместность которых обеспечивается условиями, вытекающими из уравнений Максвелла

$$kE_m = \mu\mu_0\omega H_m,$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\omega E_m = kH_m.$$

Отсюда следует, что колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с *одинаковой фазой*, а *амплитуды* этих векторов связаны между собой соотношением:

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}.$$

Из последней формулы вытекает, в частности, что отношение E_m к H_m для электромагнитной волны, распространяющейся в *вакууме*:

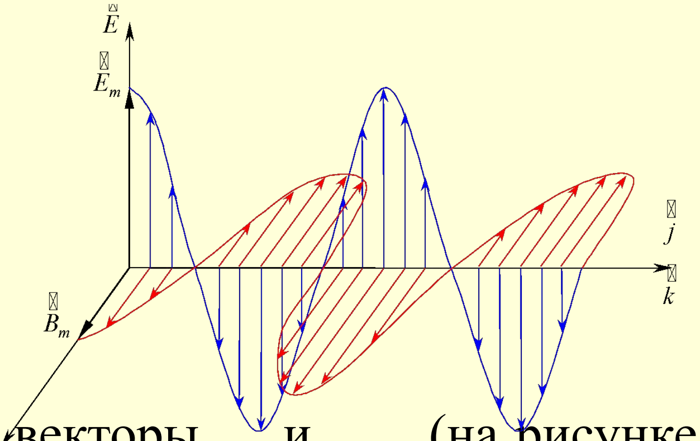
$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi \cdot 10^{9}} = 120\pi \approx 377 .$$

В векторном виде уравнения плоской электромагнитной волны записываются как:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) ,$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) .$$

На рисунке показана мгновенная картина *плоской электромагнитной волны* в данный момент времени *t*.



Как видно из рисунка, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (на рисунке $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$) образуют с направлением распространения волны *правовинтовую* систему, то есть электромагнитная волна является ***поперечной***. В фиксированной точке пространства электромагнитное поле в волне изменяется по *гармоническому* закону.

5.7. Энергия и импульс электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга.

Распространение электромагнитной волны сопровождается *переносом энергии* и *импульса* электромагнитного поля. Чтобы убедиться в этом, умножим скалярно первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме (см. *Лекцию 15*) на $\vec{E}$, а третье $\vec{H}$ также скалярно на $-\vec{H}$, и вычтем полученные результаты один из другого. В результате будем иметь:

$$\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{E}\,rot\vec{H} - \vec{H}\,rot\vec{E}.$$

Используя формулу векторного анализа $div[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b}\,rot\vec{a} - \vec{a}\,rot\vec{b}$, а также принимая во внимание материальные уравнения $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, преобразуем написанное уравнение к виду:

$$\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -div[\vec{E}\vec{H}]$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -div\vec{S},$$

где введены обозначения

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}\right);$$

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

Величина w – ***плотность энергии*** электромагнитного поля, переносимой волной: она слагается из плотности энергии *электрического* и *магнитного* полей. Вектор $\vec{S}$, имеющий смысл ***плотности потока энергии***, носит название ***вектора Пойнтинга*** (Poynting J., 1852-1914).

Полученное уравнение выражает собой *закон сохранения энергии* для электромагнитного поля в *дифференциальной* форме. Оно показывает, что *изменение энергии* поля в выделенном объеме пространства за *единицу времени* происходит за счет *потока вектора Пойнтинга* через поверхность, охватывающую этот объем. Скорость переноса энергии называется ***групповой скоростью***, она определяется как:

$$\vec{u} = \frac{\vec{S}}{w} .$$

<u>Отсюда следует размерность вектора Пойнтинга в СИ</u>: $[S] = [w][u] = \frac{Дж}{м^3} \cdot \frac{м}{c} = \frac{Дж}{м^2 \cdot c} .$

Групповая и *фазовая* скорости волны связаны между собой ***соотношением де Бройля*** (de Broglie L., 1892-1984):

$$\vec{u}\vec{\upsilon} = c^2 .$$

В вакууме $u = \upsilon = c$; в среде $u \le c$, поэтому в среде фазовая скорость электромагнитной волны может *превышать* скорость света в вакууме.

Наряду с энергией, электромагнитная волна переносит ***импульс*** поля. ***Плотность импульса*** $\vec{p}$ электромагнитного поля связана с вектором Пойнтинга соотношением:

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2}\vec{S} .$$

Из факта существования у электромагнитной волны импульса следует, что при ее падении на некоторую поверхность она будет оказывать ***давление*** на эту поверхность. Величина давления определяется по формуле:

$$p = (1 + r)\overline{w} ,$$

где r – коэффициент отражения; $\overline{w}$ - среднее значение плотности энергии волны.

5.8. Упругие волны в твердых телах. Аналогия с электромагнитными волнами.

Законы распространения ***упругих волн*** в твердых телах вытекают из общих уравнений движения однородной упруго деформированной среды:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

где ρ – плотность среды; u_i – компоненты вектора *упругого смещения*; $\sigma_{ik} = c_{iklm}\varepsilon_{lm}$ – тензор *напряжений;* $\varepsilon_{lm} = (1/2)(\partial u_l / \partial x_m + \partial u_m / \partial u_l)$ – тензор *деформации*; c_{iklm} – тензор *упругих модулей*.

Отсюда следует, что вектор *упругого смещения* удовлетворяет ***волновому уравнению*** вида:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Если искать решение этого уравнения в виде ***плоской монохроматической волны***

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)],$$

то ему можно придать вид:

$$C_{im}(\vec{n}) u_m = c^2 u_i,$$

где $C_{im}(\vec{n}) = \frac{1}{\rho} c_{iklm} n_k n_l$ - тензор *приведенных упругих модулей*; $\vec{n} = \vec{k}/k$ - единичный вектор *волновой нормали*; $c = \omega/k$ – *фазовая скорость* упругой волны.

Полученное уравнение является основным для всей теории упругих волн в твердых телах, и носит название ***уравнения Кристоффеля***. Из него, в частности, следует, что в *анизотропных* твердых телах (кристаллах) по любому направлению могут распространяться *три упругие волны*, которые в общем случае не являются *ни чисто продольными, ни чисто поперечными*. Фазовые скорости их также *различны*.

Изотропные твердые тела характеризуются только двумя упругими модулями – *модулем Юнга E* и *модулем сдвига G*. В таких телах *две* из трех упругих волн всегда являются ***чисто поперечными*** и имеют одинаковую фазовую скорость *ct*; *третья* волна является ***чисто продольной*** и имеет свою фазовую скорость $c_l > c_t$. В данном случае исходное волновое уравнение распадается на два *независимых* волновых уравнения для *двух поперечных* волн $\vec{u}_t$ и *одной продольной* волны $\vec{u}_l$:

$$\Delta\vec{u}_t - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\vec{u}_t}{\partial t^2} = 0 \quad ; \qquad \Delta\vec{u}_l - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\vec{u}_l}{\partial t^2} = 0 ,$$

где $c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ - фазовая скорость *поперечной* волны; $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ - фазовая скорость *продольной* волны.

Как и электромагнитные волны, упругие волны *переносят энергию* и *импульс*. Перенос энергии в упругой волне осуществляется за счет потока ***вектора Умова*** $\vec{P}$, аналогичного *вектору Пойнтинга* $\vec{S}$, и имеющему смысл ***плотности потока энергии.*** Дифференциальное уравнение *закона сохранения энергии* для упругого поля имеет аналогичный вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -div\vec{P},$$

где

$$w = \frac{1}{2}\left(\rho\dot{u}_i^2 + \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}\right) -$$

плотность энергии упругой волны, которая слагается из *кинетической* энергии колеблющихся частиц среды и *потенциальной* энергии упругой деформации;

$$P_i = -\sigma_{ik}\dot{u}_k -$$

компоненты *вектора Умова* (Умов Н.А., 1846-1915).

Альтернативный подход к описанию закономерностей распространения упругих волн в кристаллах основан на представлении первичного волнового уравнения *второго порядка* системой дифференциальных уравнений в частных производных *первого порядка* от вектора смещения. При этом ***уравнения для поперечных компонент*** вектора смещения оказываются полностью аналогичными ***уравнениям Максвелла*** для электромагнитного поля в вакууме, а для ***продольных компонент*** – аналогичными ***уравнениям плазменных колебаний.*** Соответствующие уравнения записываются в виде:

<u>для поперечных компонент</u>

$$rot\vec{v} = -\frac{1}{c_t}\frac{\partial\vec{u}_t}{\partial t},$$

$$div\vec{u}_t = 0,$$

$$rot\vec{u}_t = \frac{1}{c_t}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t},$$

$$div\vec{v} = 0.$$

<u>для продольных компонент</u>

$$grad\phi = -\frac{1}{c_l}\frac{\partial\vec{u}_l}{\partial t},$$

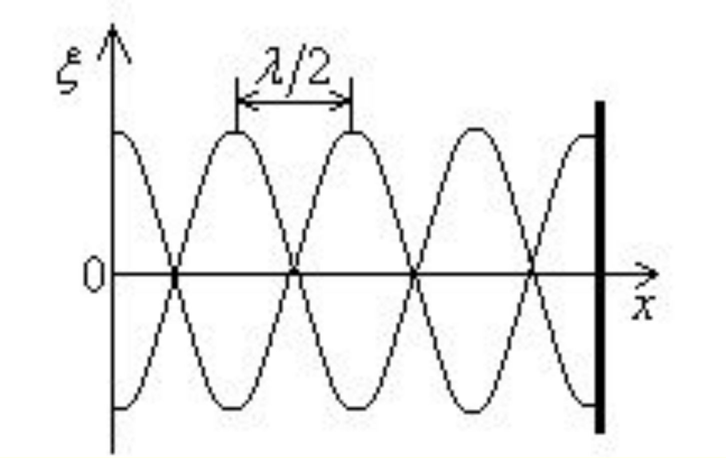
$$rot\vec{u}_l = 0,$$

$$div\vec{u}_l = -\frac{1}{c_l}\frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Преимуществом данного подхода является то, что он открывает возможность исследования упругих волновых процессов в кристаллах на основе математического аппарата, разработанного в электродинамике сплошных сред.

5.9. Стоячие волны.

При наложении двух встречных волн с *одинаковой* амплитудой возникают ***стоячие волны.*** Возникновение стоячих волн имеет место, например, при отражении волн от преграды. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.



Образование стоячей волны.

Стоячие волны бывают *продольные* (колебания стержней, звуковые волны в резонаторе музыкального инструмента) и *поперечные* (колебания закрепленной на концах натянутой струны, капиллярные волны на поверхности жидкости).

Рассмотрим две *плоские монохроматические волны*, распространяющиеся навстречу друг другу. Уравнения волн имеют вид:

$$\xi_1(x,t) = a\cos(\omega t - kx) \quad ,$$

$$\xi_2(x,t) = a\cos(\omega t + kx) \quad .$$

Складывая эти уравнения и преобразовывая результат по формуле для суммы косинусов, получим:

$$\xi(x,t) = \xi(x,t) + \xi(x,t) = 2a\cos kx \cos\omega t \quad \cdot$$

Заменив в этом выражении волновое число k его значением $2\pi/\lambda$, придадим ему следующий вид:

$$\xi(x,t) = (2a\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\omega t = \xi_0(x)\cos\omega t \quad ,$$

где $\xi_0(x) = 2a\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$ - *амплитуда* колебаний.

Написанное уравнение – есть ***уравнение стоячей волны***. Из него видно, что в стоячей волне колебания в каждой точке происходят с той же частотой ω, что и у налагающихся волн. При этом амплитуда колебаний ξ_0 зависит от координаты точки *x*.

В точках с координатами $x = 2n\frac{\lambda}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ амплитуда колебаний *максимальна* и равна 2*a*. Эти точки называются ***пучностями*** стоячей волны.

В точках с координатами $x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ амплитуда колебаний *равна нулю*. Эти точки называют ***узлами*** стоячей волны.

Расстояние между соседними пучностями (узлами) составляет $\lambda/2$. Сами пучности и узлы сдвинуты относительно друг друга на четверть длины волны. Фазы колебаний по разные стороны от узла отличаются на π, то есть точки, лежащие по *разные* стороны от узла, колеблются в *противофазе*, а все точки, заключенные *между* двумя соседними узлами, колеблются в *одной фазе.*

Отметим, что в стоячей волне *дважды* за период колебаний происходит переход кинетической энергии от узла (где скорость равна нулю) к пучности (где она максимальна) и обратно. То же происходит и с потенциальной энергией, но в обратной последовательности по отношению к кинетической энергии. В результате ***средний поток энергии*** через любое сечение в стоячей волне ***равен нулю***.

5.10. Эффект Допплера.

При движении источника и(или) приемника ***звуковых волн*** относительно среды, в которой распространяется звук, воспринимаемая приемником частота v, может оказаться отличной от частоты звука v_0, испускаемого источником. Это явление называется ***эффектом Допплера*** (Doppler Ch., 1803-1853).

Частота звука, воспринимаемая приемником, определяется по формуле:

$$\nu = \nu_0 \frac{c + \upsilon_{пр}}{c - \upsilon_{ист}} ,$$

где c – скорость звука в данной среде; $\upsilon_{прием}$ и $\upsilon_{источ}$- соответственно скорость движения приемника и источника звука *относительно* среды.

Из приведенной формулы видно, если расстояние между приемником и источником *увеличивается,* воспринимаемая частота звука v оказывается *меньше* частоты источника v_0, а если *сокращается*, то *больше*.

Эффект Доплера имеет место не только в акустике, но и ***в оптике***. Однако в отличие от *акустического эффекта*, эффект Доплера в *оптике* определяется *только относительной* скоростью источника и приемника, Связано это с тем, что свету (в отличие от звука) не требуется особой среды, которая служила бы носителем электромагнитных волн. Кроме того, в оптике эффект Доплера может быть как ***продольным***, так и ***поперечным***.

Соответствующие формулы имеют вид:

<u>продольный эффект</u>

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}} \quad ;$$

<u>поперечный эффект</u>

$$\nu = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \quad ,$$

где υ– *относительная* скорость источника и приемника электромагнитного излучения (света); *c* – скорость света в вакууме.

При скоростях $\upsilon << c$ написанные формулы принимают соответственно вид:

$$\nu \approx \nu_0\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right) \quad \text{и} \quad \nu \approx \nu_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) .$$

Из приведенных формул видно, что *продольный* эффект Допплера является эффектом *первого* порядка малости по υ/c, а *поперечный* - *второго*, то есть поперечный эффект значительно *слабее* продольного.